Vizualizace funkcí

Robert Mařík

2. února 2015

Tento text je tištěnou verzí prezentací dostupných z http://user.mendelu.cz/marik/am.

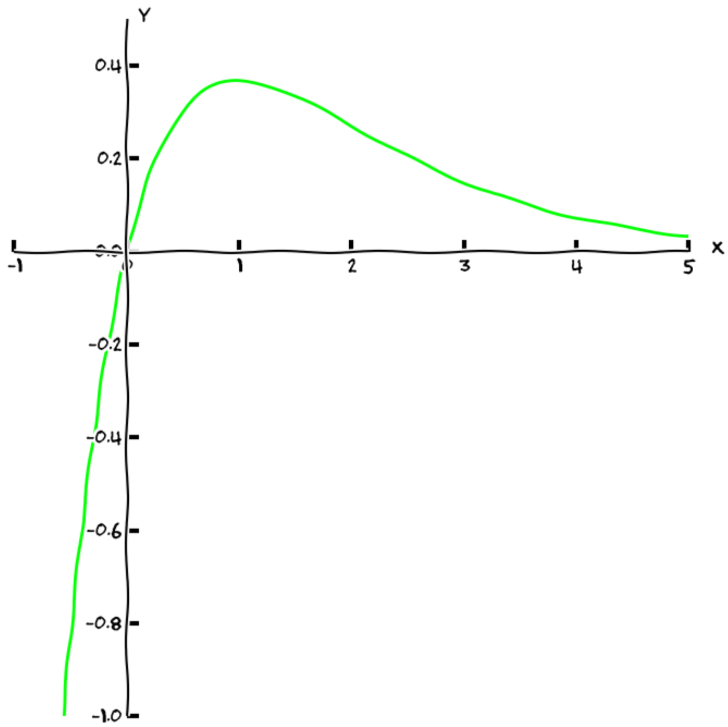
Při vizualizaci funkcí volíme vhodný způsob zejména v závislosti na počtu vstupních a výstupních dat, tj. na počtu proměnných a na tom, jedná-li se o skalární funkci (výsledkem je číslo), nebo vektorovou funkci (výsledkem je uspořádaná n-tice čísel).

Funkce jedné proměnné

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- $y = f(x)$, v rovině x, y kreslíme uspořádané dvojice bodů $[x, y]$
- výstupem je zpravidla křivka v rovině
- zkusit online

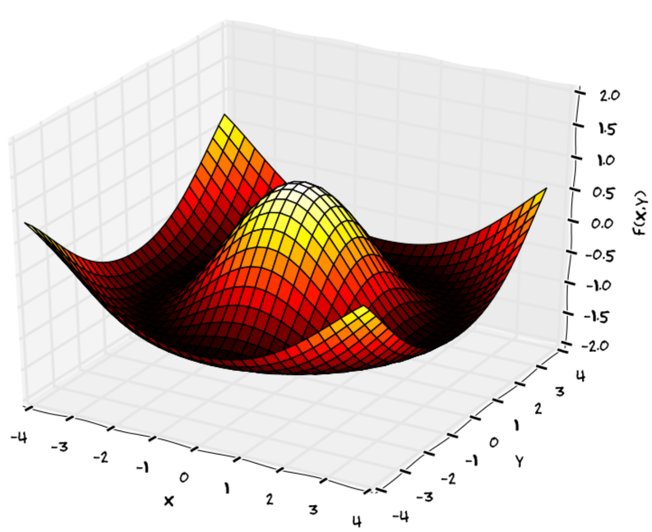
0

Podpořeno projektem Průřezová inovace studijnách programů Lesnické a dřevařské fakulty MENDELU v Brně (LDF) s ohledem na discipliny společného základu (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0021) za přispění finančních prostředků EU a státního rozpočtu České republiky.



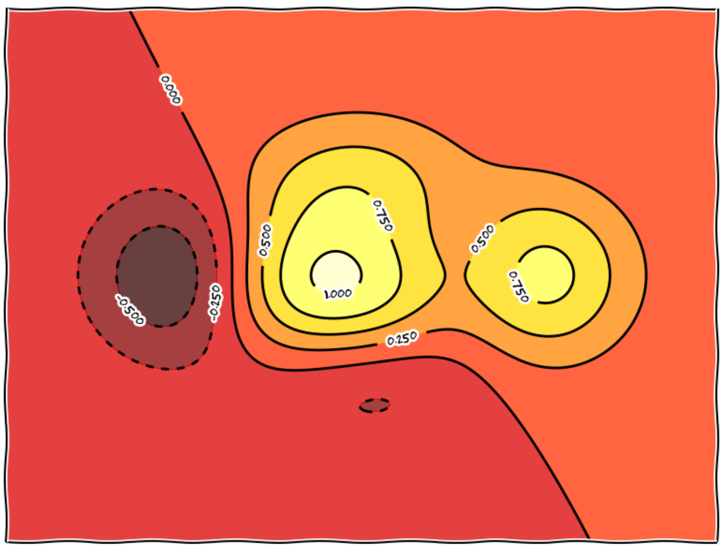
Funkce dvou proměnných, graf

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
- $z = f(x, y)$, v 3D obrázku kreslíme uspořádané trojice bodů $[x, y, z]$
- výstupem je zpravidla plocha v prostoru
- zkusit online (Sage)
- zkusit online (matplotlib)



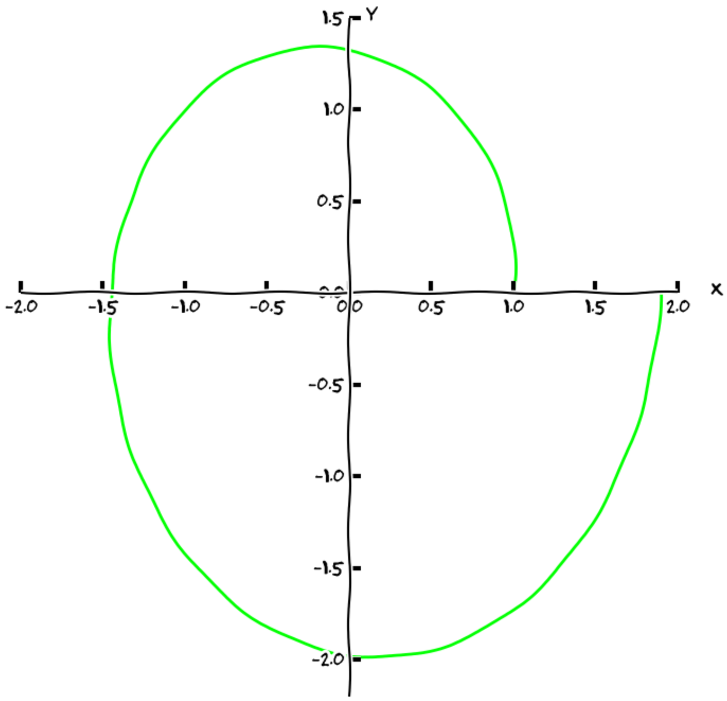
Funkce dvou proměnných, vrstevnice

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
- $z = f(x, y)$, pro dané C v rovině kreslíme uspořádané dvojice bodů $[x, y]$, pro které platí $f(x, y) = C$
- výstupem je (pro různá C) soustava křivek v rovině
- zkusit online (Sage)
- zkusit online (matplotlib)



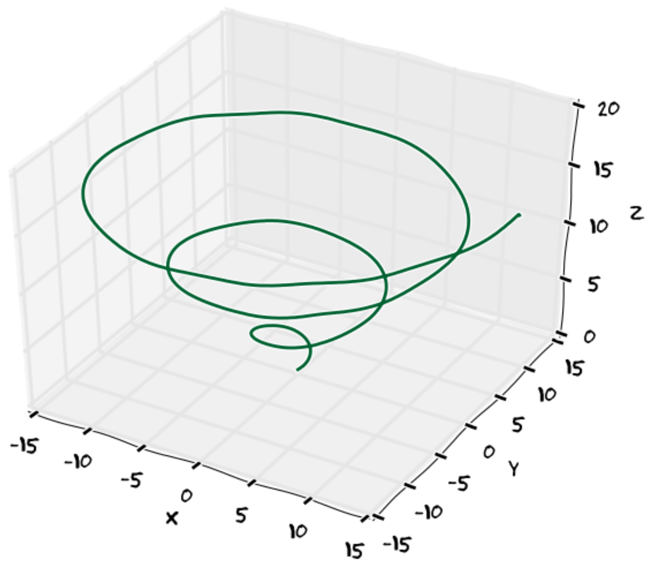
Vektorová funkce jedné proměnné (rovinná křivka)

- $\vec{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$
- $\vec{F}(t) = [f(t), g(t)]$, $t \in [a, b]$
- pro každé t z intervalu $[a, b]$ kreslíme ve 2D bod $[f(t), g(t)]$
- výstupem je (zpravidla) křivka v rovině
- zkusit online (Sage)
- zkusit online (matplotlib)



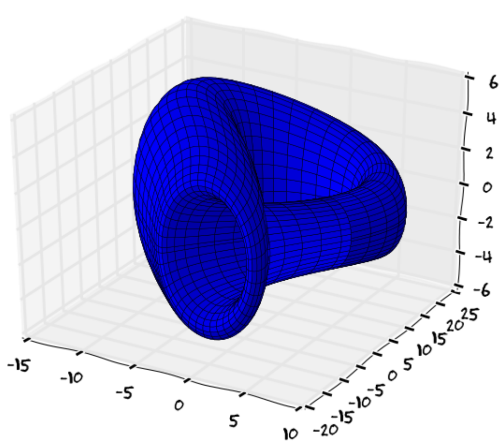
Vektorová funkce jedné proměnné (prostorová křivka)

- $\vec{F}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$
- $\vec{F}(t) = [f(t), g(t), h(t)]$, $t \in [a, b]$
- pro každé t z intervalu $[a, b]$ kreslíme ve 3D bod $[f(t), g(t), h(t)]$
- výstupem je (zpravidla) křivka v prostoru
- zkusit online (Sage)
- zkusit online (matplotlib)



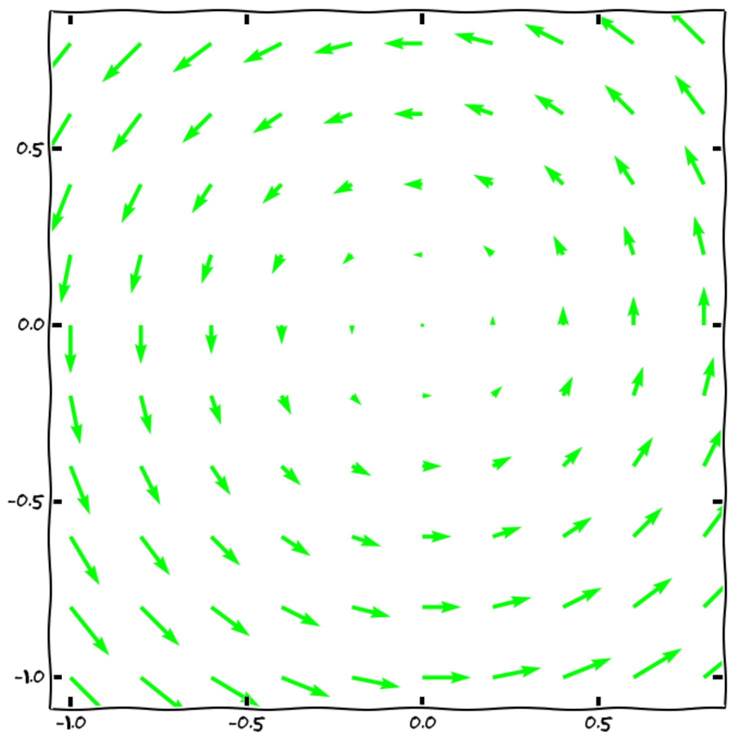
Vektorová funkce dvou proměnných (parametrická plocha)

- $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
- $\vec{F}(u, v) = [f(u, v), g(u, v), h(u, v)]$, $u \in [u_{\min}, u_{\max}]$, $v \in [v_{\min}, v_{\max}]$
- pro každé $[u, v]$ takové že $u_{\min} \leq u \leq u_{\max}$ a $v_{\min} \leq v \leq v_{\max}$ kreslíme ve 3D bod $[f(u, v), g(u, v), h(u, v)]$
- výstupem je (zpravidla) plocha v prostoru
- zkusit online (matplotlib, jednodílný hyperboloid)
- zkusit online (matplotlib, Kleinova láhev)



2D vektorové pole v rovině (1/2)

- $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
- $\vec{F}(x, y) = [f(x, y), g(x, y)]$
- pro každé x, y kreslíme ve 2D vektor $(f(x, y), g(x, y))$ umístěný počátkem do bodu $[x, y]$
- zkusit online (Sage)

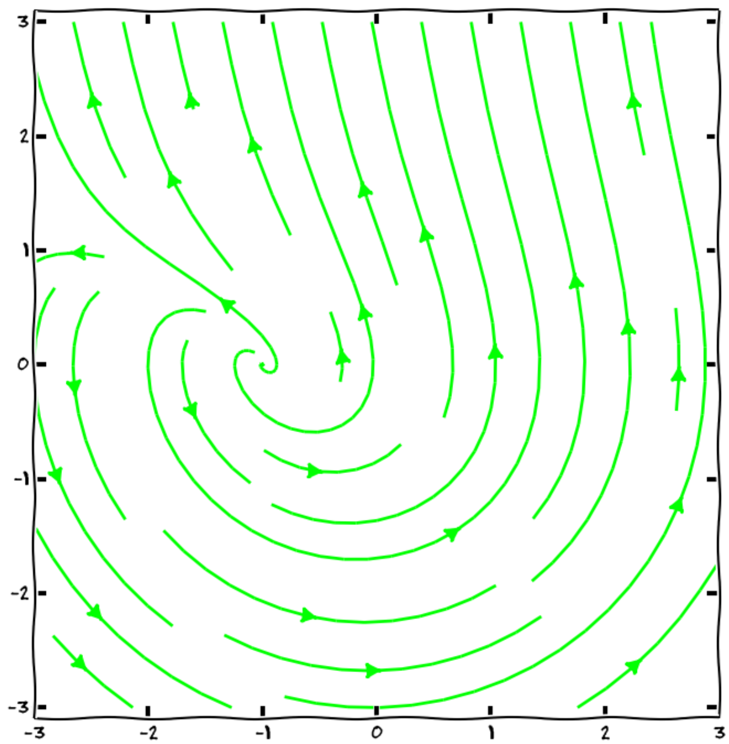


2D vektorové pole v rovině (2/2)

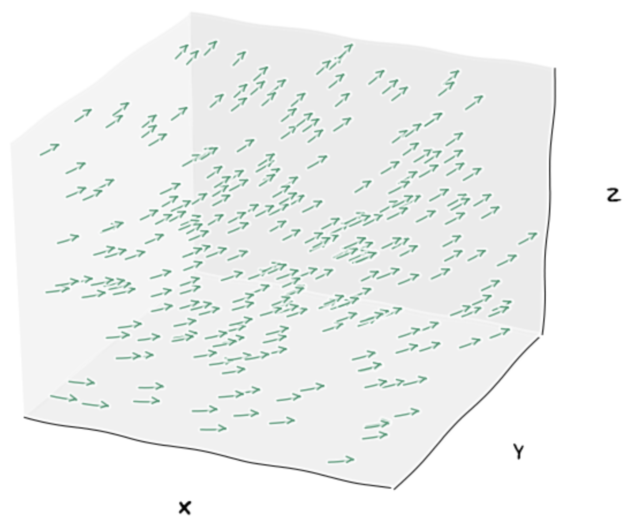
- pro každé x, y kreslíme ve 2D křivku, která má tu vlastnost, že vektory vektorového pole jsou tečné k těmto křivkám
- zkusit online (matplotlib)

3D vektorové pole (v prostoru)

- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
- $\vec{F}(x, y, z)$
  $= [f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z)]$



- pro každé x, y, z kreslíme ve 3D vektor $(f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$ umístěný počátkem do bodu $[x, y, z]$
- zkusit online (Sage)



Z
Y
X

Derivace, parciální derivace a operátory matematické fyziky

Robert Mařík

jaro 2014, aktualizace pro jaro 2015

Tento text je tištěnou verzí prezentací dostupných z http://user.mendelu.cz/marik/am.

Derivace

Derivace je matematický prostředek který umožňuje sledovat, měřit a porovnávat rychlosti změn fyzikálních veličin. Přirozeně se tak objevuje při formulaci a popisu téměř všech dynamicky probíhajících fyzikálních jevů. (Fyzikální popis světa tak je prezentovaný středoškolskou fyzikou je častou pouze jakousi aproximací ve které jevy probíhají konstantní rychlostí - například bez derivací umíme studovat pouze rovnoměrný nebo rovnoměrně zrychlený pohyb).

Poznámka. Všude v následujícím textu budeme předpokládat, že funkce a derivace které zde vystupují jsou dostatečně hladké a rovnosti platí na dostatečně pěkných množinách. V praktických aplikacích bývají tyto předpoklady zpravidla triviálně splněny, proto je pro úsporu místa nebudeme vypisovat. Zájemce najde poučení v odborné literatuře.

Obyčejná derivace

- Derivace funkce $y = f(x)$ je definována vztahem

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

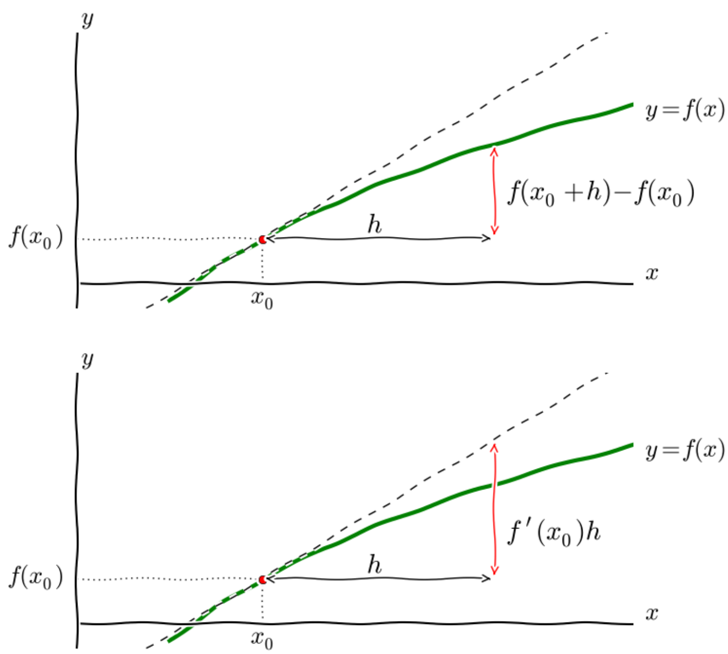
0

Podpořeno projektem Průřezová inovace studijnách programů Lesnické a dřevařské fakulty MENDELU v Brně (LDF) s ohledem na discipliny společného základu (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0021) za přispění finančních prostředků EU a státního rozpočtu České republiky.

- Jedná se o veličinu udávající, jak rychle se mění funkční hodnoty funkce při změnách vstupních dat.
- Alternativní označení je $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.
- Derivace $f'(x)$ je směrnice tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $[x, f(x)]$.
- Lineární aproximací funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 je

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Slovy: funkční hodnota teď (v x) je funkční hodnota před chvílí (v x_0) plus celková změna, která je součinem rychlosti změny ($f'(x_0)$) a času, za který se změna udála ($x - x_0$).



Obrázek 1: Derivace a tečna (lineární aproximace)

Parciální derivace

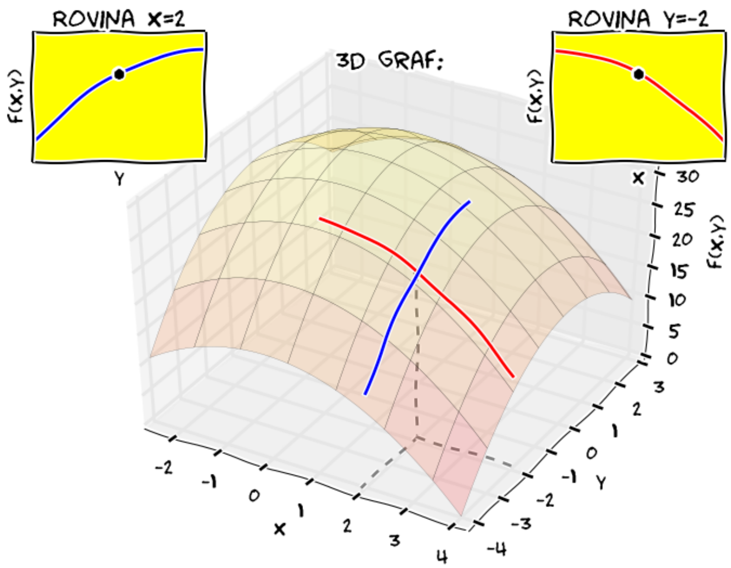
- Pro funkce dvou proměnných rozlišujeme parciální derivace podle jednotlivých proměnných.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

- Jedná se o stejnou veličinu jako u obyčejné derivace, ale vždy jenom vzhledem k jedné proměnné. Parciální derivace $\frac{\partial}{\partial x} f$ tedy udává, jak rychle se mění f při změnách veličiny x.

- V definici a při výpočtu parciální derivace podle x je proměnná y konstantní. Geometricky to je možno interpretovat tak, že studujeme křivku, která vznikne na řezu grafu funkce $z = f(x, y)$ rovinou $y =$ konst.
- Schwarzova věta (smíšené druhé derivace jsou stejné)

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}$$



Obrázek 2: Parciální derivace funkce f v bodě $[2, -2]$ jsou derivace křivek vzniklých na řezech rovinami $x = 2$ a $y = -2$.

- Derivace složené funkce $f(x, y)$, kde $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

- Derivace složené funkce $f(x, y, z)$, kde $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

- Lineární aproximací funkce $z = f(x, y)$ v bodě x_0, y_0 je

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

- **Totálním diferenciálem** funkce $z = f(x, y)$ v bodě x_0, y_0 je

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

  Funkce f se v tomto kontextu nazývá **kmenová funkce** diferenciálu.

- Máme-li výraz
$$M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y,$$
potom k tomuto výrazu existuje kmenová funkce právě tehdy když platí
$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}N(x,y).$$

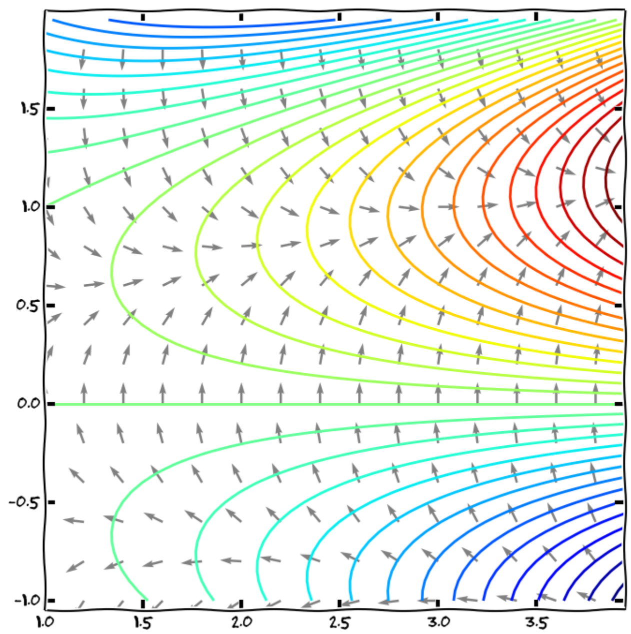
Gradient

- Gradient je definován pro skalární funkce
- Gradient funkce dvou proměnných $f(x,y)$:
$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$
- Gradient funkce tří proměnných $f(x,y,z)$:
$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$
- Formálně většinou zapisujeme gradient
$$\nabla f,$$
kde vystupuje operátor nabla definovaný vztahem $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ nebo $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ (v závislosti na počtu proměnných funkce f). "Násobení" $\frac{\partial}{\partial x}$ s funkcí f přitom chápeme jako parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x}$.
- nakreslit online

Gradient a lineární aproximace funkce

V následujících vzorcích operátor "$\cdot$" označuje skalární součin vektorů. Vztahy jsou uvedeny pro funkci dvou proměnných, ale úplně stejně platí pro funkce libovolného počtu proměnných.

- Lineární aproximací funkce $z = f(x,y)$ v bodě x_0, y_0 je
$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0, y-y_0)$$
- Tečná rovina ke grafu funkce $z = f(x,y)$ vedená bodem $[x_0,y_0,z_0]$, kde $z_0 = f(x_0,y_0)$ má rovnici
$$z - z_0 = \nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0, y-y_0)$$



Obrázek 3: Gradient je kolmý na vrstevnice

- Pro $z = 0 = z_0$ dostáváme z předchozího: Nechť $f(x_0, y_0) = 0$. Tečná rovina k vrstevnici funkce $f(x, y)$ na úrovni nula, tj. ke křivce $0 = f(x, y)$, vedená bodem $[x_0, y_0]$

$$0 = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0)$$

nakreslit online

- Totálním diferenciálem funkce $z = f(x, y)$ v bodě x_0, y_0 je

$$\mathrm{d}f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y).$$

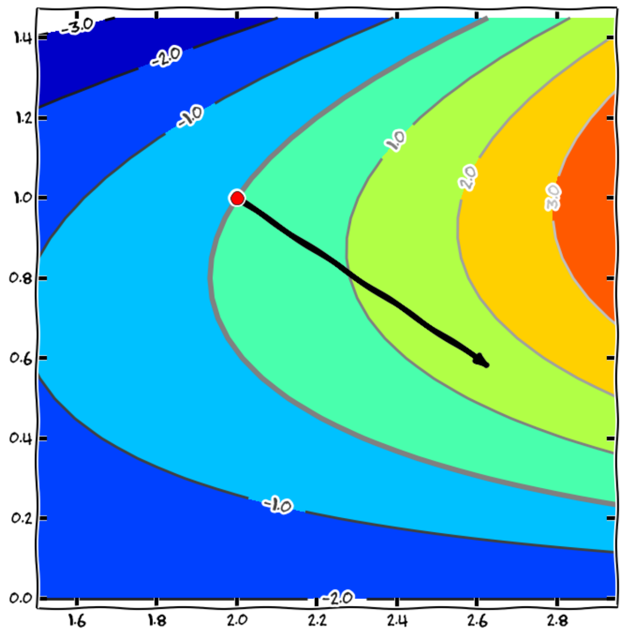
- Přibližná změna Δz funkční hodnoty funkce $f(x, y)$ při změně nezávislých proměnných z (x_0, y_0) na $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ je

$$\Delta z = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (\Delta x, \Delta y)$$

Divergence

- Pro vektorovou funkci $\vec{F}(x, y, z) = (F_x, F_y, F_z)$, kde F_i, $i \in \{x, y, z\}$ jsou funkce tří proměnných x, y a z definujeme divergenci vztahem

$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$



Obrázek 4: Tečna k vrstevnici

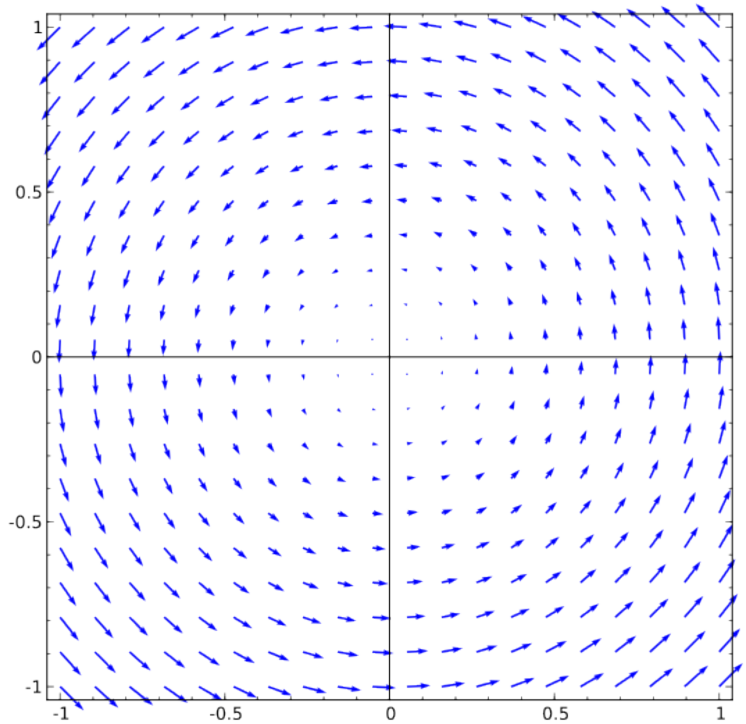
- Pro vektorovou funkci dvou proměnných $\vec{F}(x,y) = (F_x, F_y)$ definujeme divergenci analogicky, pouze chybí třetí člen
- Vektorové pole, jehož divergence je rovna nule, se nazývá **nezřídlové pole**. Siločáry nezřídlového pole nikde nezačínají ani nekončí a jsou to uzavřené křivky.
- online výpočet a obrázek

Rotace

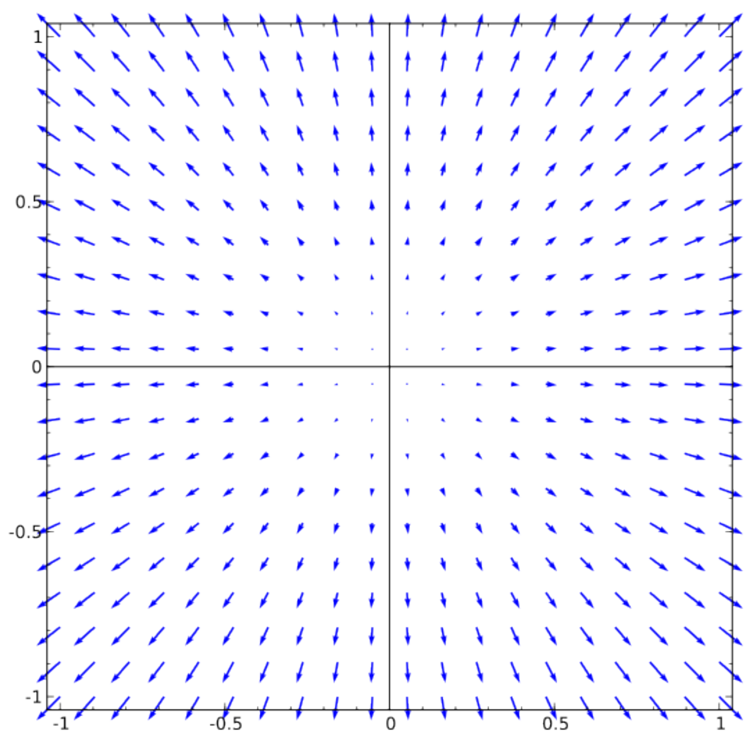
- Pro vektorovou funkci tří proměnných $\vec{F}(x,y,z) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ definujeme operátor rotace symbolicky vztahem

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\vec{F}(x,y,z) &= \nabla \times \vec{F}(x,y,z) \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(x,y,z) & Q(x,y,z) & R(x,y,z) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

- Výsledkem rotace je tedy vektor, jehož komponenty jsou $\mathrm{rot}\,\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$.
- Vektorové pole, jehož rotace je rovna nulovému vektoru se nazývá **nevírové pole** a ve fyzice má důležité postavení - je v něm možno zavést potenciál a potenciální energii.



Obrázek 5: Nezřídlové pole



Obrázek 6: Nevírové pole

Laplaceův operátor

- Laplaceův operátor Δ, je definován jako divergence gradientu skalární funkce

$$\Delta f = \mathrm{div}(\nabla f)$$

- V kartézských souřadnicích a trojrozměrném prostoru tedy platí

$$\Delta f = \frac{\partial^2}{(\partial x)^2} f + \frac{\partial^2}{(\partial y)^2} f + \frac{\partial^2}{(\partial z)^2} f$$

- Laplaceův operátor je možno formálně zapsat pomocí skalárního součinu dvou operátorů ∇

$$\Delta f = \mathrm{div}(\nabla f) = \nabla \cdot (\nabla f) = (\nabla \cdot \nabla) f = \nabla^2 f$$

- Označení symbolem Δ je stejné jako změna funkce f a je nutné tyto dva významy symbolu Δ nezaměňovat. Chceme-li se vyhnout nedorozumění, je možno pro označení Laplaceova operátoru používat ∇^2 namísto Δ.
- Laplaceův operátor vystupuje v problémech týkajících se elektrického nebo gravitačního potenciálu, difuze, nebo kmitů a šíření vln.

Popis pole

Následující popis je pro jednoduchost a konkrétnost proveden pro gravitační pole. Je však plně obecný, pokud odpovídajícím způsobem nahradíme příslušné veličiny a charakteristiky objektů.

- Skalární pole
  - Gravitační pole je úplně popsáno potenciálem (skalární veličina udávající potenciální energii tělesa o jednotkové hmotnosti)
  - Intenzita gravitačního pole je gradientem potenciálu vynásobeným číslem -1. (Intenzita gravitačního pole je síla působící v daném místě pole na objekt o jednotkové hmotnosti.)
- Vektorové pole
  - Gravitační pole je úplně popsáno intenzitou gravitačního pole.
  - Totálním diferenciálem gravitační intenzity je (až na vynásobení faktorem -1) potenciál.

Derivace, parciální derivace a jejich využití v matematice

Robert Mařík

jaro 2014

Tento text je tištěnou verzí prezentací dostupných z http://user.mendelu.cz/marik/am.

Proč je gradient kolmý na vrstevnice?

Buď $z = f(x, y)$ funkce dvou proměnných a $\nabla f(x, y)$ její gradient. Odvodíme vztah mezi vrstevnicemi a gradientem.

- Uvažujme bod $[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$ na grafu funkce $f(x, y)$ a vrstevnici procházející bodem $[x_0, y_0]$. Tuto vrstevnici napíšeme jako parametrickou křivku

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned}$$

- Složená funkce

$$F(t) = f(x(t), y(t))$$

  je podél naší křivky konstantní (křivka je vrstevnicí a podél vrstevnice jsou konstantní funkční hodnoty)
- Platí

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = 0$$

  (derivace konstantní funkce je nula)
- Platí

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

  (derivace složené funkce více proměnných)

0

Podpořeno projektem Průřezová inovace studijnách programů Lesnické a dřevařské fakulty MENDELU v Brně (LDF) s ohledem na discipliny společného základu (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0021) za přispění finančních prostředků EU a státního rozpočtu České republiky.

- Platí
$$\begin{aligned}0 = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)\\ &= \nabla f(x,y) \cdot (x'(t), y'(t))\end{aligned}$$
(derivace konstanty z předešlého bodu, definice sklárního součinu, definice gradientu, zkrácené označení pro derivace funkce jedné proměnné)
- Vektory $\nabla f(x,y)$ a $(x'(t), y'(t))$ jsou kolmé (jejich skalární součin je nula). Zbývá zjistit, jak vypadá vektor $(x'(t), y'(t))$.

Derivace parametrické křivky

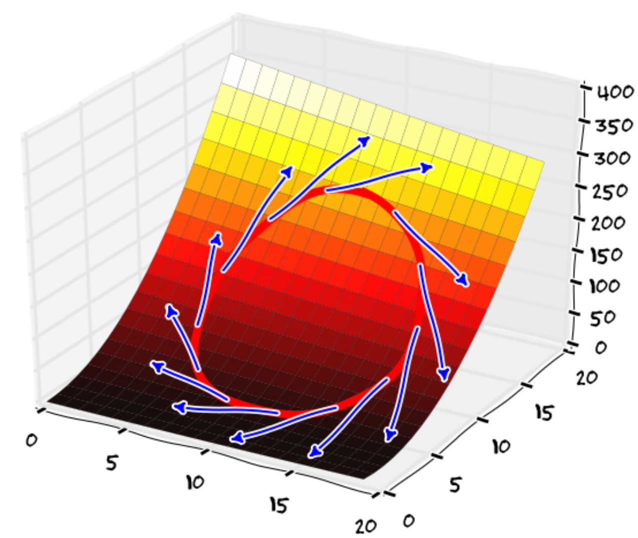
- Buď
$$\begin{aligned}x &= x(t)\\ y &= y(t)\\ z &= z(t), \quad t \in (t_{\text{min}}, t_{\text{max}})\end{aligned}$$
parametrická křivka ve 2D nebo 3D.
- Křivku můžeme považovat za trajektorii hmotného bodu pohybujícího se v čase t.
- Veličina $x'(t)$ je x-ová komponenta rychlosti (udává jak rychle se mění souřadnice x). Totéž platí pro ostatní nezávislé proměnné.
- Vektor $(x'(t), y'(t), z'(t))$ je vektor rychlosti.
- Vektor rychlosti je vždy je tečný k trajektorii.
- Vektor $(x'(t), y'(t), z'(t))$ je tečným vektorem k trajektorii (kreslíme jej pořirozeně s počátečním bodem v $(x(t), y(t), z(t))$).
- Totéž platí pro rovinné křivky, můžete si vyzkoušet online pro vlastní křivku.

Vztah mezi gradientem a vrstevnicemi

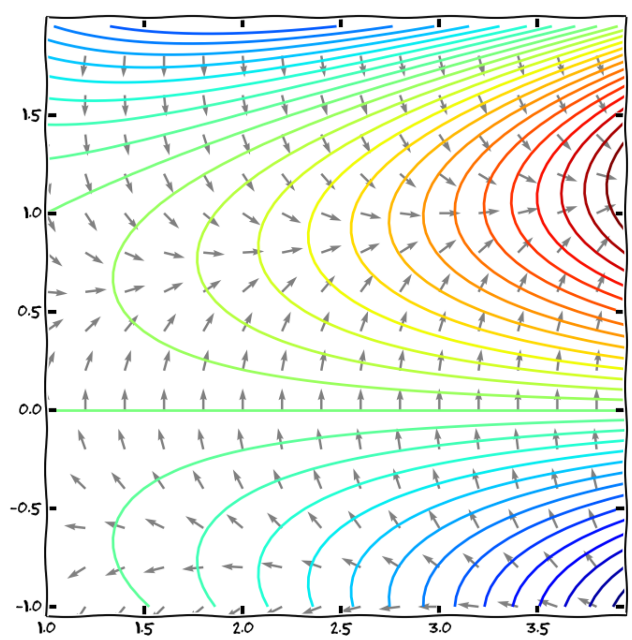
Z přechozího plyne

- Gradient je kolmý na vektor $(x'(t), y'(t))$
- Vektor $(x'(t), y'(t))$ je tečný k vrstevnici

Tedy gradient v daném bodě je kolmý na vrstevnici procházející tímto bodem.



Obrázek 1: Prostorová křivka s tečnými vektory



Obrázek 2: Gradient je kolmý k vrstevnicím

Implicitně definovaná funkce

Mějme funkci $f(x,y)$ dvou proměnných a její vstevnici na úrovni C

$$f(x,y) = C. \tag{1}$$

Tato rovnice za jistých okolností může definovat y jako funkci proměnné x. Pokusíme se najít derivaci této funkce. K tomu uvažujme bod (x_0, y_0) ležící na této vrstevnici, tj. $f(x_0, y_0) = C$.

- Rovnice tečné roviny v bodě (x_0, y_0) je

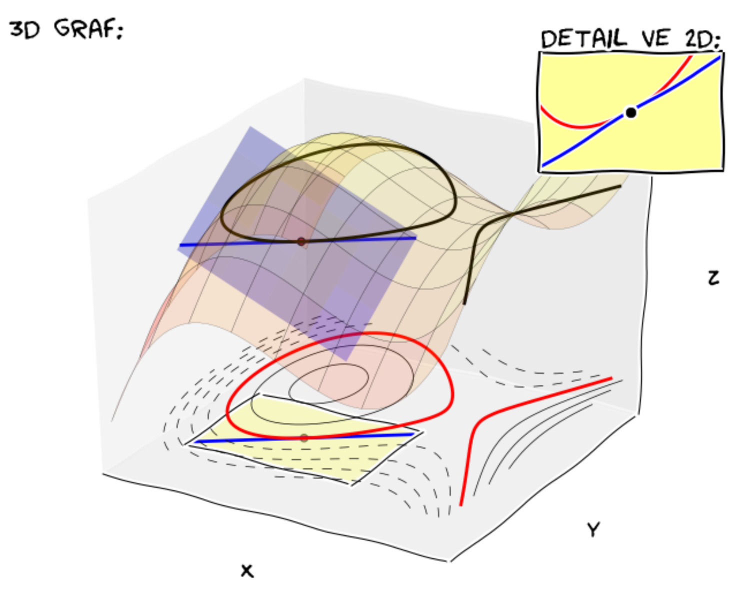
$$z = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0).$$

- Řez grafu rovinou $z = f(x_0, y_0)$ je vrstevnice na úrovni C, řez tečné roviny je tečna k vrstevnici v rovině $z = C$. Rovnice této tečny je

$$C = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0),$$

tj.

$$0 = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0),$$



Obrázek 3: Tečna k vrstevnici

Animace

Implicitně definovaná funkce (pokračování)

- Normálový vektor tečny je

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right),$$

  k němu kolmý je vektor

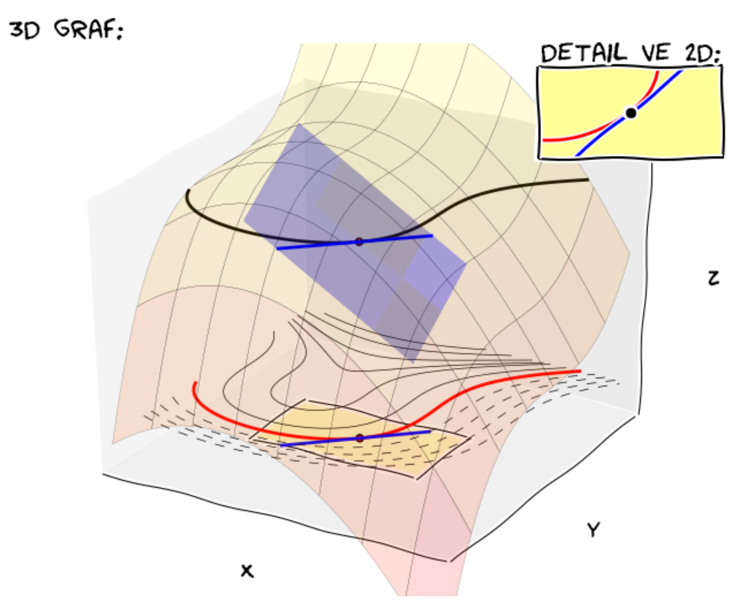
$$\left(-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right)$$

  a po znormování první kompenty dostáváme směrový vektor tečny ve tvaru

$$\left(1, -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)} \right).$$

  Druhá komponenta tohoto vektoru je derivací funkce, která je dána implicitně rovnicí (1). To vše za podmínky, že první komponenta normálového vektoru je nenulová.
- Poznámka: bez újmy na obecnosti většinou při definici implicitní funkce bereme $C = 0$. Vskutku, pokud definujeme $g(x, y) = f(x, y) - C$, potom je možno rovnici vrstevnice funkce f na úrovni C přepsat do tvaru

$$g(x, y) = 0.$$



Obrázek 4: Tečna k vrstevnici

Implicitně definovaná funkce (závěr)

Věta o implicitní funkci: *Uvažujme funkci $f(x, y)$ dvou proměnných, splňující v nějakém bodě (x_0, y_0) podmínku $f(x_0, y_0) = 0$ a mající v okolí bodu (x_0, y_0) spojité parciální derivace. Rovnice*

$$f(x, y) = 0$$

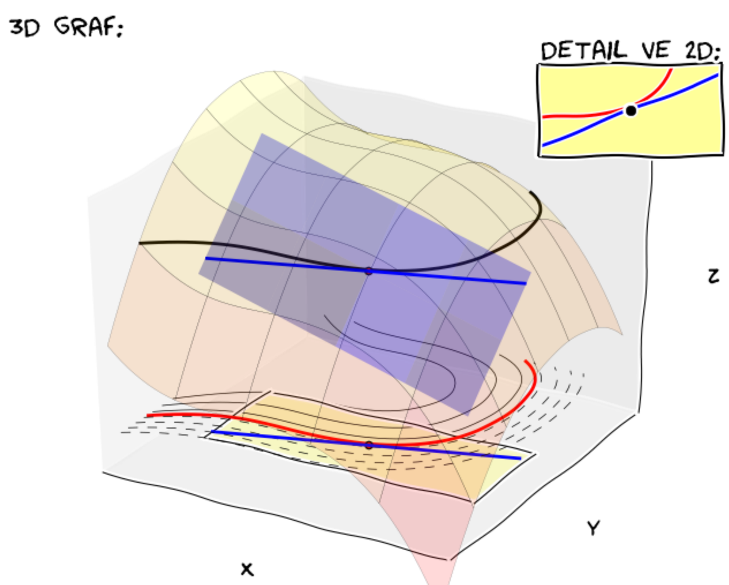
vrstevnice na úrovni 0 popisuje křivku procházející bodem (x_0, y_0).

- *Platí-li*

  $$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0,$$

  je rovnicí $f(x, y) = 0$ v okolí bodu (x_0, y_0) implicitně určena **právě jedna spojitá funkce** *$y = g(x)$ (tj. vrstevnice je v okolí bodu (x_0, y_0) grafem nějaké spojité funkce g).*
- *Funkce g z předchozího bodu* **má v x_0 derivaci**

  $$g'(x_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}.$$



Obrázek 5: Tečna k vrstevnici

Separace proměnných

Některé funkce dvou proměnných je možno zapsat jako součin dvou funkcí jedné proměnné, například $\varphi(x, y) = \sin(x^2 + 1)\frac{\ln y}{y}$. U některých funkcí toto možné není, například funkce

$\varphi(x,y) = x^2 - y^2$. Pomocí parciálních derivací je možno podat jednoduchou charakterizaci všech funkcí, majících výše uvedenou vlastnost.

Věta: *Nechť funkce dvou proměnných $\varphi(x,y)$ je nenulová na konvexní oblasti G a má zde spojité všechny parciální derivace do řádu dva, včetně. Funkci $\varphi(x,y)$ je možno zapsat ve tvaru $\varphi(x,y) = f(x)g(y)$, kde f a g jsou vhodné funkce jedné proměnné právě tehdy, když je na množině G nulový výraz*

$$\varphi(x,y)\frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial y\partial x} - \frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}$$

tj. pokud na množině G platí

$$\begin{vmatrix} \varphi & \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} \end{vmatrix} = 0$$

Naznačíme část důkazu. Pokud platí

$$\varphi(x,y) = f(x)g(y),$$

je

$$\ln\varphi(x,y) = \ln(f(x)) + \ln(g(y)).$$

Derivací podle x dostáváme

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,y)}{\varphi(x,y)} = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Protože pravá strana nezávisí na y, dostáváme derivováním podle y

$$\frac{\left(\frac{\partial^2\varphi(x,y)}{\partial y\partial x}\right)\varphi(x,y) - \left(\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}\right)}{\varphi^2(x,y)} = 0$$

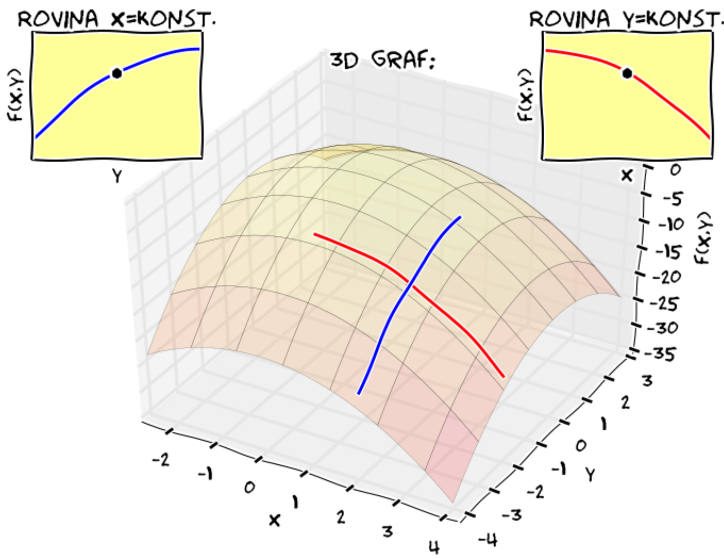
Výraz v čitateli je uveden v tvrzení věty.

Lokální extrémy funkce více proměnných

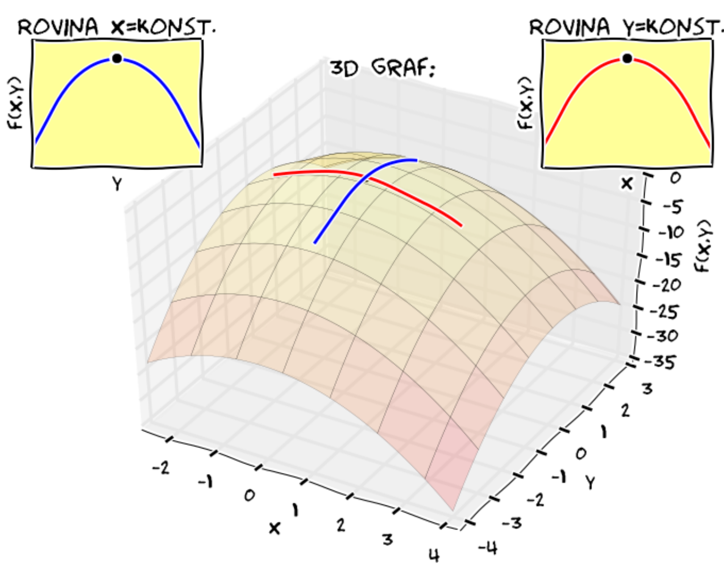
Podobně jako pro funkce jedné proměnné definujeme i pro funkce více proměnných **lokální extrémy** následovně: funkce má v daném bodě **lokální minimum**, pokud v nějakém okolí tohoto bodu neexistuje bod s menší funkční hodnotou a podobně, funkce má v bodě **lokální maximum**, pokud v okolí tohoto bodu neexistuje bod s vyšší funkční hodnotou.

Funkce jedné proměnné určitě nemá v bodě lokální extrém, pokud má v tomto bodě kladnou derivaci (protože potom funkce roste), nebo pokud má v tomto bodě zápornou derivaci (protože potom funkce klesá). Derivce v bodě kde nastává lokální extrém tedy musí být buď nulová nebo nesmí existovat. Stejná myšlenková úvaha se dá provést pro křivky vzniklé na řezech funkce dvou proměnných a proto platí následující věta.

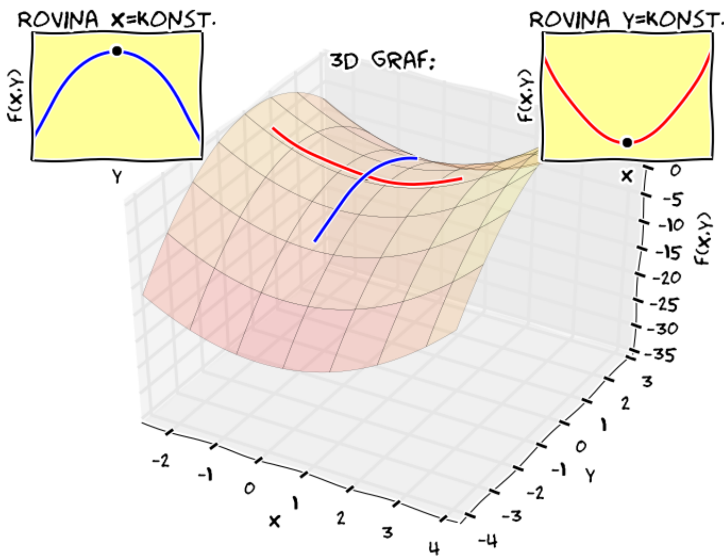
Věta (Fermatova): *Jestliže funkce více proměnných má v nějakém bodě svůj lokální extrém, pak každá parciální derivace, která v tomto bodě existuje, je nulová.*



Obrázek 6: Pokud je některá z parciálních derivací nenulová, extrém nenastává



Obrázek 7: V bodě kde nastává extrém je každá parciální derivace která existuje nulová, tj. křivka na řezu má vodorovnou tečnu



Obrázek 8: Nulovost parciálních derivací nemusí stačit k existenci lokálního extrému - funkce může mít sedlový bod

Lokální extrémy funkce více proměnných (pokračování)

Zákon šíření chyb (chyba nepřímo měřené veličiny)

- V praxi často měříme nepřímo veličinu f tak, že měříme veličiny x_1, x_2, ..., x_n a hodnotu veličiny f určíme pomocí vzorce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
- Měření každé z veličin je zatíženo chybou. Je-li chyba veličiny x_i rovna Δx_i, způsobí tato odchylka to, že chyba veličiny f bude (v souladu se vzorcem pro lineární aproximaci) přibližně
$$\Delta f \approx \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i\right|$$
- Celkovou chybu veličiny f můžeme určit sečtením chyb způsobených jednotlivými veličinami x_i. Častěji se však používá následující vzorec
$$\Delta f(x_1, x_2, \ldots x_n) \approx \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n\right)^2}$$
označovaný **zákon šíření chyb**.

Základní myšlenky vedoucí k rozšíření integrálního počtu

Robert Mařík

jaro 2014

Tento text je tištěnou verzí prezentací dostupných z http://user.mendelu.cz/marik/am.

Jak vypočítat dráhu pohybujícího se tělesa?

- Pro rovnoměrný pohyb platí $s = vt$.
- Co když pohyb není rovnoměrný? Dráha je aditivní veličina. Můžeme tedy pomocí $s = vt$ vypočítat dráhu za každou jednotlivou vteřinu a tyto částečné výpočty sečíst.
- Předchozím postupem dostaneme přesnou dráhu vždy když bude rychlost v rámci každé vteřiny konstantní. Může se během pohybu měnit, ale jenom v každou celou vteřinu.
- Pokud se rychlost mění více než bylo povoleno v předchozím bodě, můžeme postup z předchozího bodu opakovat s tím, že do výpočtu $s = vt$ za v dosadíme nějakou typickou rychlost během každé vteřiny. Výsledek pochopitelně nebude zcela přesný.
- Postup z předchozího bodu je možné vylepšit tak, že bereme kratší časové okamžiky. Teoreticky můžeme délku časového okamžiku stáhnout k nule.
- Výše popsaný princip je základem určitého integrálu. Umožňuje počítat aditivní veličinu která je za konstantních parametrů součinem dvou jiných veličin a v případě, že parametry přestanou být konstantní.

0

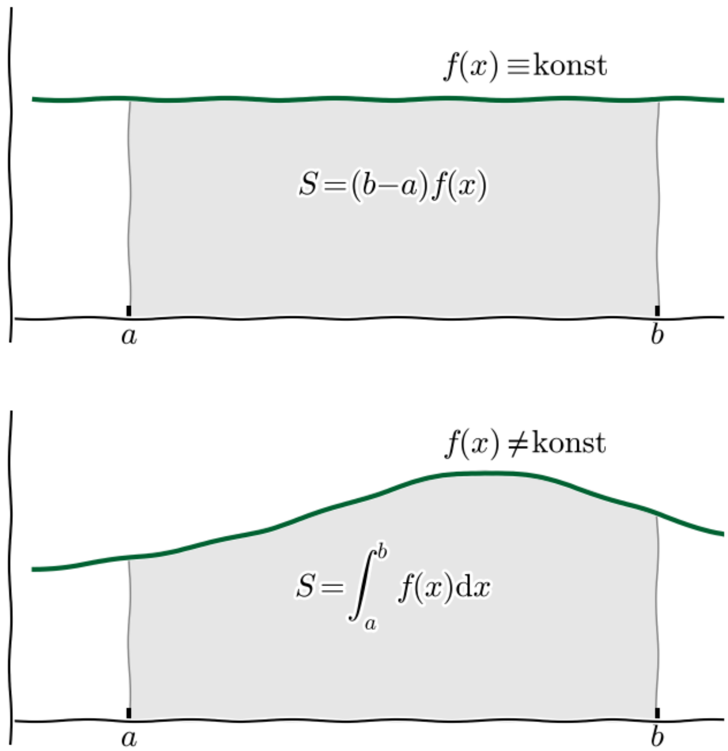
Podpořeno projektem Průřezová inovace studijnách programů Lesnické a dřevařské fakulty MENDELU v Brně (LDF) s ohledem na discipliny společného základu (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0021) za přispění finančních prostředků EU a státního rozpočtu České republiky.

Nejčastější aplikace integrálu

- Obsah obdélníka je součinem délek stran. Pokud se "výška obdélníka mění" jako funkce f proměnné x, je obsah plochy pod grafem funkce
$$S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$
.
- Dráha s pohybujícího se tělesa je integrál rychlosti. Pokud se v čase od t_0 do t_1 těleso pohybuje proměnlivou rychlostí, $v(t)$, urazí za tento časový interval dráhu
$$s = \int_{t_0}^{t_1} v(t)\mathrm{d}t.$$
- Aritmetický průměr konečného počtu bodů je veličina, která je z jistého úhlu pohledu uprostřed souboru bodů. Je-li bodů nekonečně mnoho, nahrazujeme aritmetický průměr pojmem střední hodnota. Střední hodnota funkce $f(x)$ na intervalu (a, b) je číslo
$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$
tj. číslo splňující rovnici
$$(b-a)\mu = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Moment setrvačnosti

- Veličina moment setrvačnosti má stejný význam pro rotační pohyby, jako hmotnost pro pohyby posuvné.
- Tak jako je těžké těleso namáhavé uvést do pohybu, nebo jej v pohybu zastavit, těleso s velkým momentem setrvačnosti je obtížné roztočit, nebo roztočené těleso uvést do klidu.
- V případě nosníků souvisí moment setrvačnosti s odolností nosníku vůči deformaci namáháním.
- Tělesa s velkým momentem setrvačnosti se nazývají setrvačníky.



Obrázek 1: Určitý integrál

Moment setrvačnosti (pokračování)

- Moment setrvačnosti jednoho bodu o hmotnosti m je roven

$$J = mr^2,$$

  kde r je vzdálenost od osy otáčení.
- Moment setrvačnosti je aditivní veličina. Pro konečný počet hmotných bodů ji můžeme určit jako součet od příspěvků od jednotlivých bodů.
- Pro nekonečný počet hmotných bodů můžeme provést podobnou úvahu s dělením na malé části jako u integrálu a rychlosti. Je nutné si však uvědomit, že mohou nastat velmi odlišné situace:
  - těleso je tyčovitého tvaru, v tomto případě si vystačíme s klasickým určitým integrálem
  - těleso má hmotnost rozloženu podél lineárních útvarů (je z drátů, trámů, kulatin)
  - těleso má hmotnost rozloženu v části roviny (tj. je to kus desky)
  - těleso má hmotnost rozloženu v nějaké dvourozměrné ploše (tj. např. kus skořepiny, vytvarované desky)
  - těleso má hmotnost rozloženu v celém svém objemu (tj. klasické trojrozměrné těleso)
- **Pro každý výše uvedený případ je nutno vyvinout nový druh integrálu (křivkový, dvojný, plošný, trojný).**

Křivkový integrál

Robert Mařík

jaro 2014

Tento text je tištěnou verzí prezentací dostupných z http://user.mendelu.cz/marik/am.

Křivkový integrál

Jedná se o rozšíření Riemannova integrálu, kdy množinou přes kterou integrujeme není úsečka, ale křivka. Pro jednoduchost budeme uvažovat dvourozměrnou křivku v rovině x, y.

Rozeznáváme dva druhy křivkových integrálů. První z nich používáme, pokud pracujeme se skalárními veličinami, jako například kvadratický moment. Druhý z nich používáme pokud pracujeme ve vektorovém poli, například při výpočtu práce vykonané po křivce.

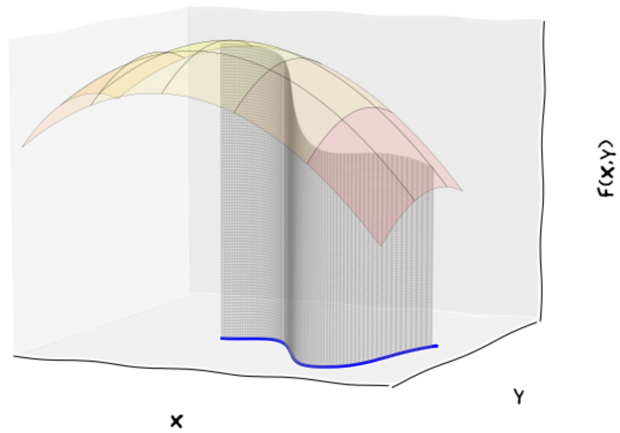
Parametrické rovnice křivky

Nejprve představíme matematický aparát pro popis křivek. Rovinné křivky nejčastěji popisujeme vektorovou funkcí jedné proměnné, resp. dvojicí skalárních funkcí.

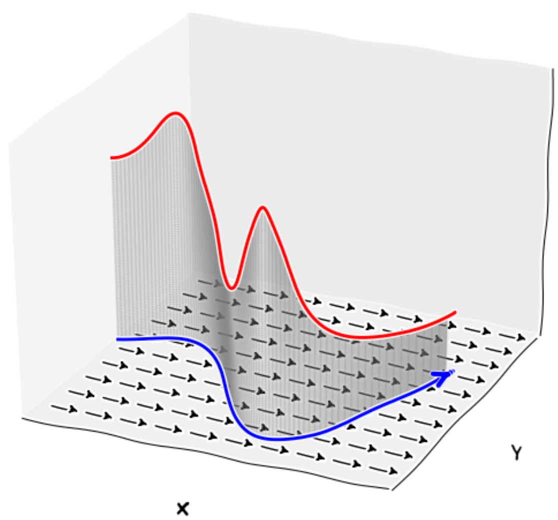
- $\vec{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$
- $\vec{F}(t) = [\varphi(t), \psi(t)]$, $t \in [\alpha, \beta]$
- $C = \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \quad t \in [\alpha, \beta] \end{cases}$
- Graf křivky dostaneme tak, že pro každé t z intervalu $[\alpha, \beta]$ kreslíme ve 2D bod $[\varphi(t), \psi(t)]$.
- Funkce $\varphi(t)$, $\psi(t)$ nazýváme *parametrizace* křivky C
- Pro danou křivku C v rovině xy, nejsou její parametrické rovnice dány jednoznačně.

0

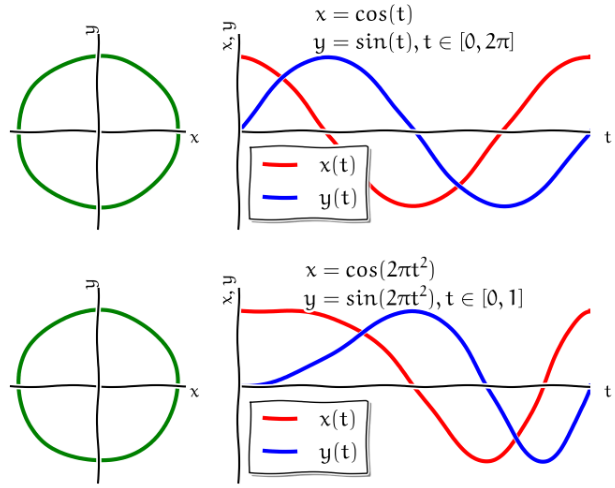
Podpořeno projektem Průřezová inovace studijnách programů Lesnické a dřevařské fakulty MENDELU v Brně (LDF) s ohledem na discipliny společného základu (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0021) za přispění finančních prostředků EU a státního rozpočtu České republiky.



Obrázek 1: Křivkový integrál prvního druhu



Obrázek 2: Křivkový integrál druhého druhu



Obrázek 3: Dvě různé parametrizace jednotkové kružnice

Křivkový integrál prvního druhu

Pokud uvažujeme drát o lineární hustotě F a délce s, je hmotnost drátu rovna součinu $m = Fs$. Uvažujme drát, který není homogenní, leží podél rovinné křivky C a jeho specifická hmotnost se mění a bodě (x, y) je dána funkcí $F(x, y)$. Celkovou hmotnost můžeme odhadnout takto:

- Myšlenkově rozdělíme drát na malé kousíčky a každém z nich odhadneme lineární hustotu konstantou. Můžeme například použít minimální hodnotu hustoty v tomto kousíčku.
- Vynásobením délkou každého kousíčku obdržíme jeho hmotnost a sečtením přes všechny kousky dostaneme dolní odhad pro hmotnost drátu. Tento odhad bude tím přesnější, čím jemnější dělení použijeme.
- Zjemňováním dělení se tyto odhady zpřesňují.

V limitním procesu, kdy se délka všech kousíčků blíží k nule, dostáváme objekt, který se nazývá *křivkový integrál prvního druhu*, označuje

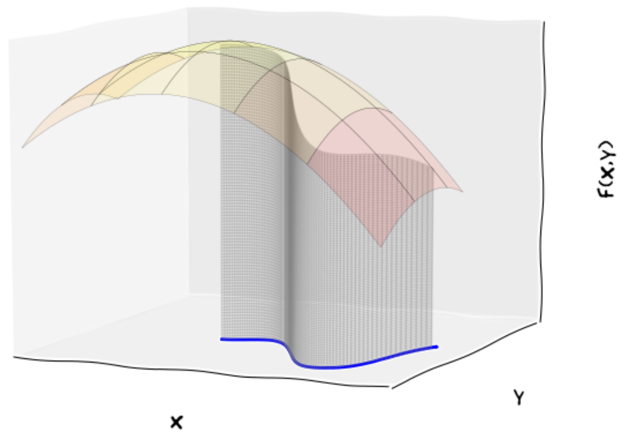
$$\int_C F \, \mathrm{d}s$$

a fyzikálně vyjadřuje hmotnost drátu z výše uvažované úlohy. Pokud počáteční a koncový bod křivky C splývají, píšeme též

$$\oint_C F \, \mathrm{d}s$$

a integrál nazýváme *integrálem po uzavřené křivce*.

Animace



Obrázek 4: Křivkový integrál prvního druhu. Výška plochy je určena zadanou skalární funkcí.

Převod na Riemannův integrál

Známe-li parametrické rovnice křivky C,

$$C = \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \quad t \in [\alpha, \beta], \end{cases}$$

je možno křivkový integrál prvního druhu funkce $F(x, y)$ po křivce dané těmito parametrickými rovnicemi zapsat následovně

$$\int_C F \, \mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta F(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} \, \mathrm{d}t.$$

Podobně převádíme na Riemannův integrál i křivkový integrál prvního druhu po prostorové křivce

$$C = \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \xi(t), \quad t \in [\alpha, \beta], \end{cases}$$

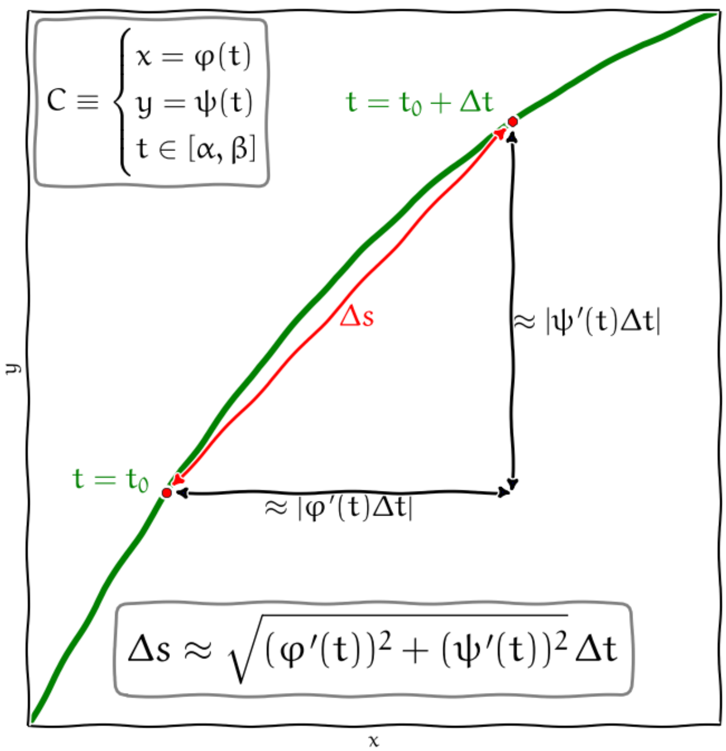
délkový element obsahuje výraz

$$\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \xi'^2(t)}$$

Aplikace křivkového integrálu prvního druhu

- Pro nezápornou funkci F vyjadřuje integrál

$$\int_C F \, \mathrm{d}s$$



Obrázek 5: Aproximace délky oblouku křivky pomocí funkcí z parametrického vyjádření křivky

obsah svislé plochy nad rovinnou křivkou C, shora omezené funkcí $F(x, y)$.

- Integrál z funkce $F(x, y) = 1$ resp $F(x, y, z) = 1$ podél křivky C udává **délku křivky** C v rovině nebo v prostoru.
- Je-li $F(x, y) = \tau(x, y)$, kde $\tau(x, y)$ je lineární hustota materiálu v bodě (x, y), udává integrál celkovou **hmotnost**.
- Je-li $F(x, y) = x\tau(x, y)$, udává integrál **lineární moment** a je-li $F(x, y) = x^2\tau(x, y)$ udává **moment setrvačnosti** vzhledem k ose y.
- Podíl lineárního momentu vzhledem k ose y a hmotnosti udává x-ovou polohu **těžiště**. Podobně stanovíme ostatní souřadnice těžiště.

Z konstrukce křivkového integrálu i z jeho fyzikální interpretace je snadné nahlédnout, že křivkový integrál nezávisí na orientaci křivky - tj. je jedno, který koncový bod volíme jako počáteční a který jako koncový.

Křivkový integrál druhého druhu

Pokud působíme na těleso silou F a přemísťujeme toto těleso ve směru působící síly po dráze délky s , konáme práci $W = Fs$. Pokud přemísťování neprobíhá ve směru působící síly a má-li síla směr $\vec{F}$ a posunutí $\vec{s}$, je práce rovna skalárnímu součinu $\vec{F} \cdot \vec{s}$.

Předpokládejme, že na těleso působí (obecně nekonstantní) síla $\vec{F}$ a těleso se pohybuje podél křivky C určené polohovým vektorem $\vec{r}(t)$. Pro výpočet práce můžeme použít stejný trik jako u křivkového integrálu prvního druhu. Rozdělíme dráhu na malé kousíčky a v rámci těchto kousíčků považujeme $\vec{F}$ i $\Delta\vec{r}$ za konstantu. Tato aproximace bude tím přesnější, čím jemnější dělení použijeme.

V limitě dostáváme veličinu, která se nazývá *křivkový integrál druhého druhu* funkce $\vec{F}$ po křivce C a zapisujeme

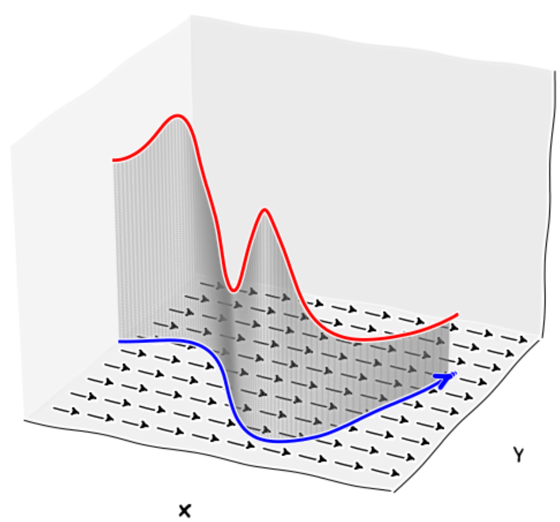
$$\int_C \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r}.$$

Je-li

$$\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j},$$

zapisujeme někdy křivkový integrál (**??**) ve složkách

$$\int_C P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y.$$



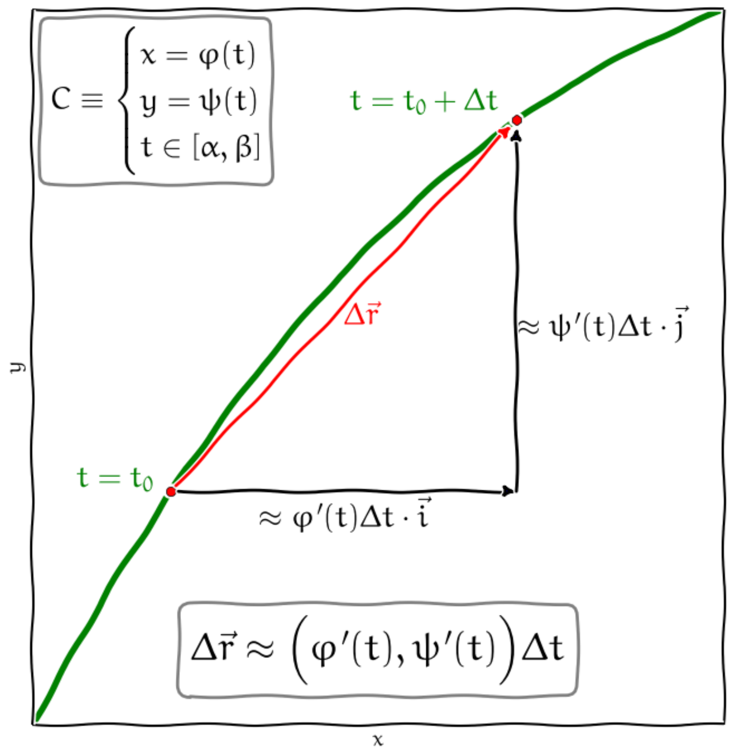
Obrázek 6: Křivkový integrál druhého druhu. Výška plochy je v každém bodě křivky určena skalárním součinem tečného vektoru jednotkové délky a vektorem zadaného vektorového pole.

Převod na Riemannův integrál

Známe-li parametrické rovnice křivky C, je možno křivkový integrál druhého druhu funkce po křivce dané parametrickými rovnicemi zapsat následovně

$$\int_C \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_\alpha^\beta \Big[P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) \\ + Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\Big]\,\mathrm{d}t$$

Protože při pohybu tělesa po křivce jedním směrem se práce koná a při pohybu opačným směrem spotřebovává, je nutné, aby křivka figurující v křivkovém integrálu druhého druhu byla orientovaná - tj. abychom prohlásili, který bod je *počáteční* a který *koncový*. Vždy budeme předpokládat, že křivka je *orientovaná v souladu se svým parametrickým vyjádřením*, tj. že počáteční bod křivky (**??**) odpovídá hodnotě parametru $t = \alpha$ a koncový bod odpovídá hodnotě parametru $t = \beta$.



Obrázek 7: Aproximace posunutí pomocí funkcí z parametrického vyjádření křivky

Aplikace křivkového integrálu druhého druhu

- Integrál
$$\int_C \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r}.$$
vyjadřuje **práci** kterou vykoná síla $\vec{F}$ při přemístění tělesa podél křivky C.
- Je-li křivka C uzavřená, píšeme
$$\oint_C \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r}.$$
Fyzikálně se jedná o **práci** kterou vykoná síla $\vec{F}$ při přemístění tělesa po uzavřené křivce. Tato práce se též nazývá *cirkulace vektorového pole po křivce* C. Pokud je možno v poli zavést potenciální energii a pokud tedy práce závisí jenom na počáteční a koncové poloze, musí tato práce být nulová. To je důsledkem věty kterou si uvedeme později.

- Při odvození křivkového integrálu druhého druhu jako vykonané práce hraje roli vlastně jenom ta složka silového pole, která při posunu ve směru křivky koná práci, tj. složka, která je tečná ke křivce. Pokud použijeme naopak normálovou komponentu, dostaneme veličinu vyjadřující **tok vektorového pole křivkou** C. Výsledný vzorec vyjadřující tento tok je

$$\int_C -Q(x,y)\mathrm{d}x + P(x,y)\mathrm{d}y.$$

- Je-li množina Ω "dostatečně pěkná" (např. souvislá, bez děr, s počástech hladkou hranicí $\partial\Omega$ která se nikde neprotíná, detaily uvedeme později u Greenovy věty), potom každý z integrálů

$$\oint_{\partial\Omega} x\mathrm{d}y \qquad \text{a} \qquad \oint_{\partial\Omega} y\mathrm{d}x$$

udává (až na případné znaménko) obsah množiny Ω. Na tomto principu fungují planimetry.

```
![](planimetr_1.jpg)
![](planimetr_2.jpg)
![](planimetr_3.jpg)
```

Vlastnosti křivkových integrálů

- Oba integrály jsou **aditivní vzhledem k oboru integrace**. Pokud je nutné při parametrizaci křivku rozdělit na konečný počet navzájem disjunktních částí, můžeme vypočítat integrál na každé části samostatně a výsledky sečíst.

- Křivkový integrál prvního ani druhého druhu **nezávisí na konkrétní parametrizaci křivky**.
- Křivkový integrál prvního druhu **nezávisí na orientaci** křivky.
- Křivkový integrál druhého druhu **při změně orientace křivky mění znaménko**.

Závěrečné informace

Parametrizace úsečky

- Hledáme parametrické rovnice orientované úsečky AB, kde je dán počáteční bod $A = [x_A, y_A]$ a koncový bod $B = [x_B, y_B]$.
- Leží-li bod X na úsečce AB, potom vektor $\vec{AX}$ má stejný směr (včetně orientace) jako vektor $\vec{AB}$ a nejvýše stejnou délku.
- Platí tedy $\vec{AX} = t\vec{AB}$ pro nějaké $t \in [0,1]$, tj. $X - A = t(B - A)$ a odsud $X = A + t(B - A)$.
- V souřadnicích zapsáno, parametrické rovnice úsečky jsou

$$\begin{aligned} x &= x_A + t(x_B - x_A) \\ y &= y_A + t(y_B - y_A), \quad t \in [0,1] \end{aligned}$$

- Pro úsečku v prostoru platí totéž, pouze přibývá třetí souřadnice.

Online výpočet křivkového integrálu

- Mathematical assistant on web - i s postupem a grafem křivky
- Křivkový integrál prvního druhu, numericky pomocí Sage
- Křivkový integrál druhého druhu, numericky pomocí Sage

Základní integrální věty z vektorové analýzy

Robert Mařík

jaro 2014

Tento text je tištěnou verzí prezentací dostupných z http://user.mendelu.cz/marik/am.

Úvod

V následujících větách si ukážeme některé souvislosti mezi studovanými pojmy. Tyto souvislosti existují, pokud objekty se kterými pracujeme jsou dostatečně pěkné - funkce jsou dostatečně hladké, oblasti mají dostatečně hladkou hranici a neobsahují díry apod. Pro úplnost uvedeme nebo zopakujeme potřebné pojmy. Některé pojmy pro názornost uvedeme poněkud volnější interpretací, jejich přesnější zavedení je možno nalézt v literatuře.

- Vektorové pole $\vec{F}$ se nazývá **potenciálové**, pokud existuje skalární funkce φ s vlastností $\nabla\varphi = \vec{F}$. Funkce φ se nazývá **kmenová funkce** vektorového pole.
- Křivka C se nazývá **uzavřená**, pokud její počáteční a koncový bod splývají.
- Křivka se nazývá **jednoduchá**, pokud sama sebe neprotíná (s případnou výjimkou stejného počátečního a koncového bodu u uzavřených křivek).
- Křivka se nazývá **regulární**, pokud funkce z jejího parametrického vyjádření jsou hladké (mají spojité derivace) a v každém bodě je aspoň jedna z těchto funkcí nenulová.
- Pokud platí pro libovolné dvě regulární křivky C a C_1, které leží v Ω a mají stejné počáteční body a stejné koncové body, platí
$$\int_C \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F}\mathrm{d}\vec{r},$$
říkáme, že integrál v Ω **nezávisí na integrační cestě**. Vektorové pole ve kterém křivkový integrál nezávisí na integrační cestě se nazývá **konzervativní pole**.
- Oblast se nazývá **jednoduše souvislá**, pokud je souvislá a neobsahuje otvory.

Podpořeno projektem Průřezová inovace studijnách programů Lesnické a dřevařské fakulty MENDELU v Brně (LDF) s ohledem na discipliny společného základu (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0021) za přispění finančních prostředků EU a státního rozpočtu České republiky.

Věta o nezávislosti integrálu na integrační cestě

Věta (o nezávislosti integrálu na integrační cestě): *Uvažujme vektorovou funkci $\vec{F}$, křivku C a oblast Ω v $\mathbb{R}^3$. Následující výroky jsou ekvivalentní za předpokladu hladkosti funkcí, regulárnosti křivek a jednoduše souvislé oblasti Ω.*

a. Integrál $\int_C \vec{F}\mathrm{d}\vec{r}$ nezávisí v Ω na integrační cestě.
b. Křivkový integrál $\oint_C \vec{F}\mathrm{d}\vec{r}$ po libovolné uzavřené křivce C v Ω je roven nule.
c. Rotace $\operatorname{rot}\vec{F}$ vektorového pole $\vec{F}$ je v Ω rovna nulovému vektoru.
d. Existuje funkce φ s vlastností $\nabla\varphi = \vec{F}$ na Ω.

Pokud jsou předchozí podmínky splněny (platnost jedné z nich vynutí platnost i všech ostatních), je možno křivkový integrál vypočítat podle vzorce

$$\int_C \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = \varphi(B) - \varphi(A)$$

kde A a B jsou počáteční a koncový bod křivky C a φ je kmenová funkce vektorového pole $\vec{F}$.

Podle této věty je tedy vektorové pole v prostoru konzervativní právě tehdy, když je jeho rotace nulová a to je právě tehdy, když pro toto pole existuje kmenová funkce a je tedy možno zavést potenciál (záporně vzatá kmenová funkce).

Poznámky k větě o nezávislosti křivkového integrálu na integrační cestě

Větu je možno formálně vyslovit i pro jiný než trojrozměrný prostor. Pokud je pole v předchozí větě pouze v rovině, tj. $\vec{F} = (F_x, F_y)$, doplníme třetí komponentu pro výpočet rotace nulou. Protože $\operatorname{rot}\vec{F} = \left(\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x}\right)\vec{k}$, přechází podmínka na nulovost rotace v nám již známou nutnou a postačující podmínku

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

pro to aby výraz

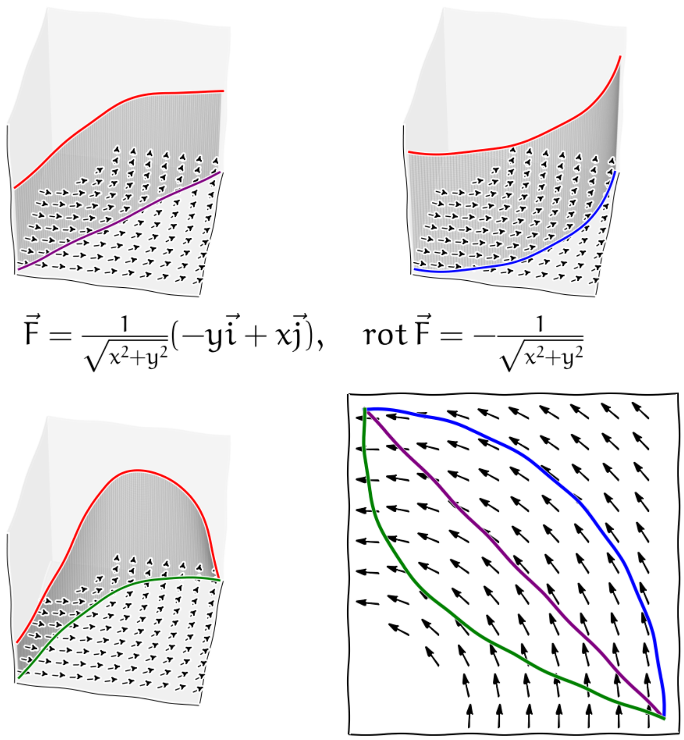
$$F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y$$

byl totálním diferenciálem.

Pokud pracujeme v prostoru vyšší dimenze, podmínka na rotaci je nahrazena jinou, komplikovanější podmínkou. Všechny další body věty o nezávislosti na integrační cestě však zůstávají v platnosti beze změny.

Podmínka hladkosti funkcí na jednoduše souvislé oblasti je podstatná. Například pole $\vec{v} = -\frac{y}{x^2+y^2}\vec{\imath} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{\jmath}$ má rotaci rovnu nule ve všech bodech, kde je definované, tj. v celém prostoru kromě osy z. Přímým výpočtem je možno ukázat, že křivkový integrál po jednotkové kružnici v rovině $z = 0$ je roven 2π.

Závislost a nezávislost integrálu na integrační cestě



Obrázek 1: Křivkový integrál v nekonzervativním poli (obsahy jsou různé)

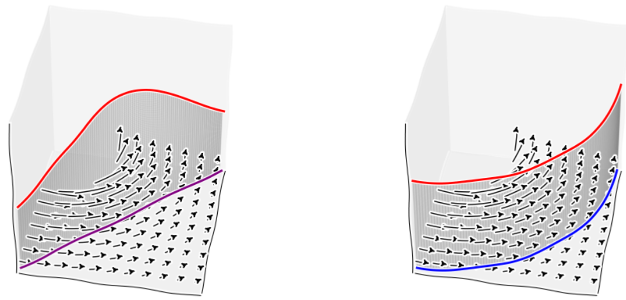
- online výpočet integrálů z obrázků
- online výpočet rotace nekonzervativního pole z obrázku
- online výpočet rotace konzervativního pole z obrázku

Greenova věta

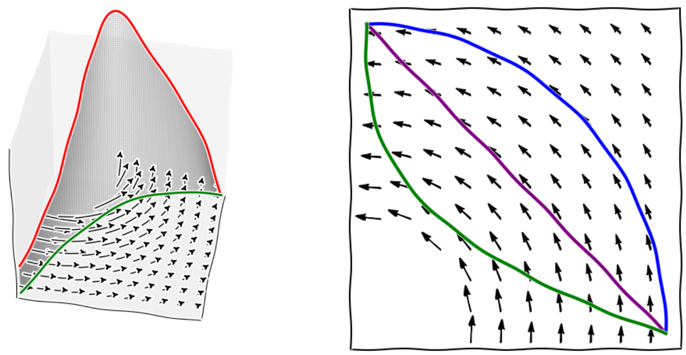
Greenova věta: *Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ je jednoduše souvislá regulární oblast,jejíž hranicí je po částech regulární křivka $\partial\Omega$ orientovaná tak, že při obíhání podél křivky $\partial\Omega$ je oblast Ω vlevo. Nechť vektorová funkce $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i}+Q(x, y)\vec{j}$ je hladká uvnitř nějaké oblasti, obsahující množinu Ω a její hranici $\partial\Omega$. Platí*

$$\underbrace{\oint_{\partial\Omega} P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y}_{\textit{Cirkulace po hranici } \partial\Omega} = \iint_{\Omega} \underbrace{\left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\right)}_{[\mathrm{rot}(P\vec{i}+Q\vec{j})]_z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

online výpočet - pro množiny typu $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, u(x) \leq y \leq v(x)\}$



$$\vec{\mathrm{F}} = \frac{1}{x^2+y^2}(-y\vec{\imath} + x\vec{\jmath}), \quad \operatorname{rot}\vec{\mathrm{F}} = 0$$



Obrázek 2: Křivkový integrál v konzervativním poli (obsahy jsou stejné)

Použijeme-li pro funkci $\vec{F}$ vystupující v Greenově větě třídimenzionální rozšíření (třetí komponenta nulová), vidíme, že vpravo v dvojném integrálu figuruje třetí komponenta rotace $\operatorname{rot}\vec{F}$. Je to současně jediná nenulová komponenta vektoru rotace, zbylé dvě komponenty vektoru rotace jsou rovny nule.

Pokud zvolíme funkce P a Q tak, že platí $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 1$, potom vpravo vychází obsah množiny Ω a Greenova věta umožňuje najít obsah množiny Ω pouze z informace podél hranice! Na tomto principu fungují planimetry.

Varianta Greenovy věty pro tok křivkou

Nahradíme-li formálně vektorové pole $P\vec{i}+Q\vec{j}$ vektorovým polem $-Q\vec{i}+P\vec{j}$, dostáváme následující vztah mezi dvojným integrálem divergence vektorového pole přes oblast Ω a křivkovým integrálem vyjadřujícím tok vektorového pole $P\vec{i} + Q\vec{j}$ protékající přes hranici $\partial\Omega$

$$\underbrace{\oint_{\partial\Omega} -Q(x,y)\mathrm{d}x + P(x,y)\mathrm{d}y}_{\text{Tok přes hranici } \partial\Omega} = \iint_\Omega \underbrace{\left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}\right)}_{\operatorname{div}(P\vec{i}+Q\vec{j})} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Výše popsaně dvě varianty Greenovy věty nám dávají možnost najít fyzikální interpretaci operátorů divergence a rotace. Podíl dvojného integrálu funkce f přes oblast Ω a obsahu této oblasti je roven střední hodnotě funkce f na množině Ω. Při limitním přechodu, kdy rozměry množiny Ω jdou k nule, dostaneme přímo funkční hodnotu funkce f. Toto nám umožňuje dostat se do integrandů na pravých stranách vztahů.

Rotaci je tedy možno chápat jako limitu podílu cirkulace vektorového pole po uzavřené křivce a obsahu množiny uvnitř této křivky, kdy v limitním procesu stahujeme délku křivky k nule. Zejména pokud je práce po libovolné uzavřené křivce nulová, je nulová i rotace.

Podobně divergenci je možno chápat jako limitu podílu toku uzavřenou křivkou a obsahu množiny ohraničené touto křivkou, když rozměry uvažované oblasti jdou k nule. Zejména pokud pole neobsahuje žádné zdroje ani spotřebiče, pak tok dovnitř křivky je stejný jako tok ven (co do uzavřeného prostoru vteče, to i vyteče ven), je divergence rovna nule.

Dvojný integrál

Robert Mařík

jaro 2014

Tento text je tištěnou verzí prezentací dostupných z http://user.mendelu.cz/marik/am.

Dvojný integrál

Pro dvojný integrál použijeme podobnou myšlenkovou konstrukci jako u křivkového integrálu prvního druhu, pouze místo drátu s danou lineární hustotou budeme uvažovat rovinnou ohraničenou desku s danou plošnou hustotou.

- Pokud je hustota desky konstantní, je možno její hmotnost získat jednoduše jako součin plošné hustoty a obsahu.
- Pokud se hustota desky mění a v obecném bodě (x, y) je dána funkcí $f(x, y)$, můžeme myšlenkově rozdělit desku na malé kousky, v rámci každého malého kousku hustotu aproximovat konstantou, vypočítat hmotnost každého kousku jako součin hustoty a obsahu a všechny hmotnosti sečíst.
- Získaná veličina je aproximací celkové hmotnosti.

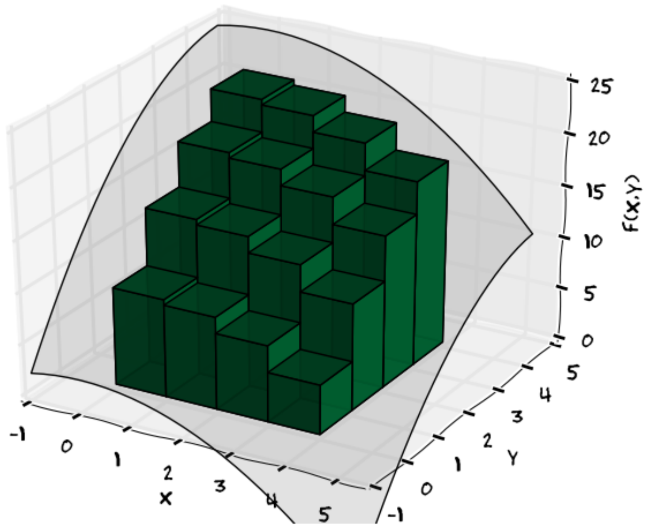
V limitním přechodu kdy rozměry všech kousků na něž je deska dělena jde k nule dostáváme **dvojný integrál**

$$\iint_\Omega f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde Ω je oblast v rovině (x, y) definovaná uvažovanou deskou.

0

Podpořeno projektem Průřezová inovace studijnách programů Lesnické a dřevařské fakulty MENDELU v Brně (LDF) s ohledem na discipliny společného základu (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0021) za přispění finančních prostředků EU a státního rozpočtu České republiky.



Výpočet dvojného integrálu

V závislosti na tom, jakými nerovnostmi množinu Ω definujeme, můžeme pro výpočet dvojného integrálu použít následující věty. Tyto věty udávají, jak je možno dvojný integrál přepsat jako dvojnásobný integrál. Mají název **Fubiniovy věty**.

Nechť f je funkce spojitá v uzavřené oblasti

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ a } \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}.$$

Potom

$$\iint_\Omega f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \Big[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\mathrm{d}y\Big]\mathrm{d}x.$$

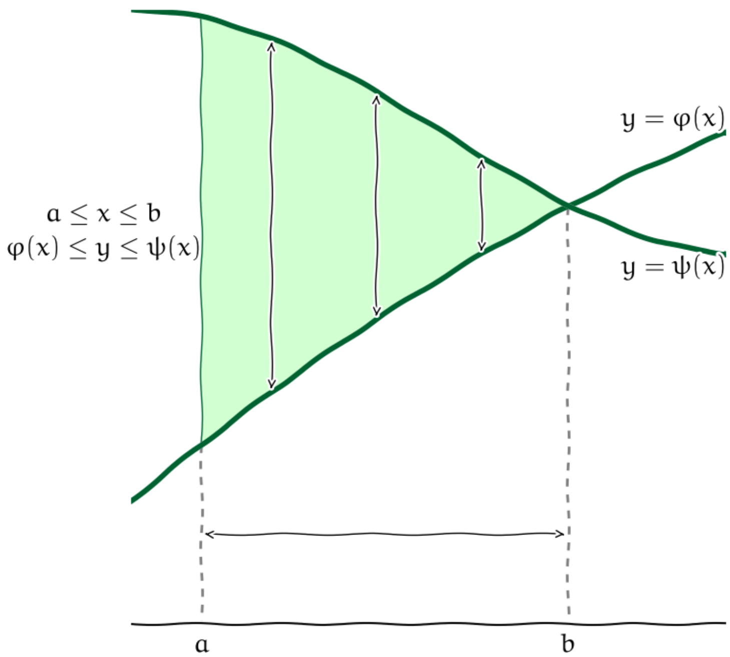
Výpočet dvojného integrálu (pokračování)

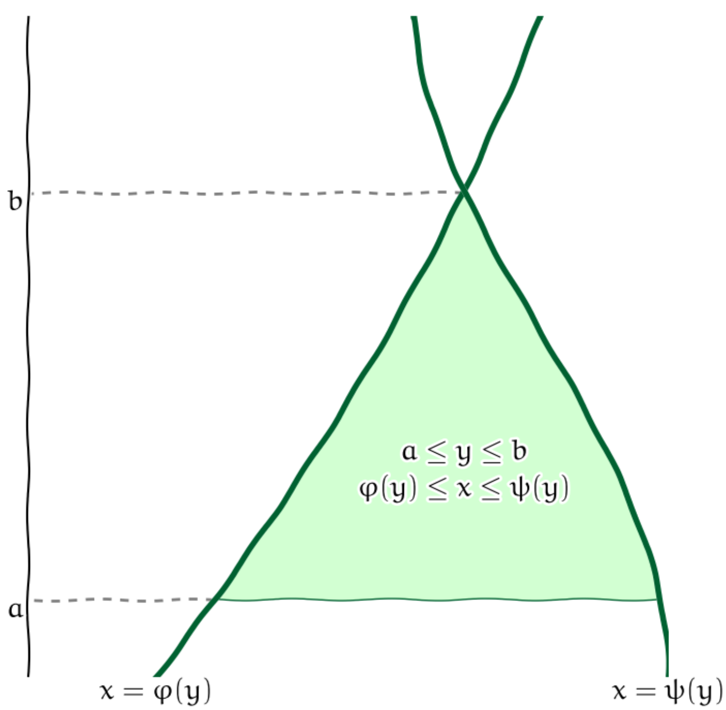
Nechť f je funkce spojitá v uzavřené oblasti

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq y \leq b \text{ a } \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}.$$

Potom

$$\iint_\Omega f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \Big[\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\mathrm{d}x\Big]\mathrm{d}y.$$


$y = \varphi(x)$
$a \leq x \leq b$
$\varphi(x) \leq y \leq \psi(x)$
$y = \psi(x)$
a
b


b
$a \leq y \leq b$
$\varphi(y) \leq x \leq \psi(y)$
a
$x = \varphi(y)$
$x = \psi(y)$

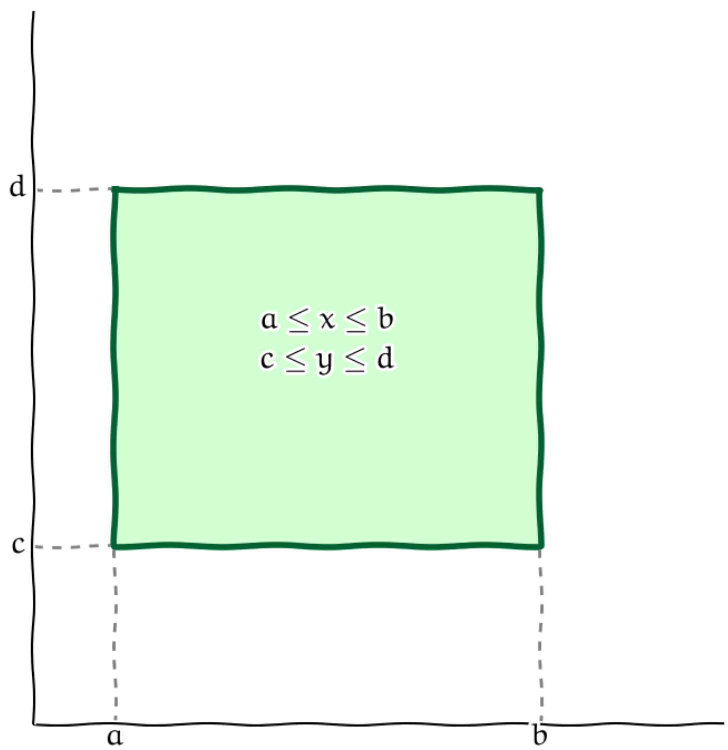
Výpočet dvojného integrálu (závěr)

Nechť $R = [a, b] \times [c, d]$ je uzavřený obdélník v $\mathbb{R}^2$ a f funkce definovaná a spojitá na R. Pak platí

$$\iint_R f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \Big[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\Big]\mathrm{d}x$$
$$= \int_c^d \Big[\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\Big]\mathrm{d}y.$$

Platí-li dokonce rovnost $f(x, y) = g(x)h(y)$, pak

$$\iint_R f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \int_c^d h(y)\mathrm{d}y.$$



Matematické aplikace dvojného integrálu

- **Obsah** $\mu(\Omega)$ množiny Ω vypočteme jako integrál

$$\mu(\Omega) = \iint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

- **Integrální střední hodnota** funkce $f(x,y)$ definované na množině Ω je

$$\frac{\iint_\Omega f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\mu(\Omega)},$$

kde $\mu(\Omega) = \iint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ je obsah množiny Ω.

Fyzikální aplikace dvojného integrálu

- **Hmotnost** množiny M je

$$m = \iint_M \sigma(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde $\sigma(x,y)$ je **plošná hustota** (hmotnost vztažená na jednotku povrchu).

- **Lineární momenty** hmotné množiny M vzhledem k osám y a x jsou rovny

$$\iint_M x\sigma(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

a

$$\iint_M y\sigma(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

- **Moment setrvačnosti** hmotné množiny M vzhledem k ose je

$$J = \iint_M \rho^2(x,y)\sigma(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde $\rho(x,y)$ je vzdálenost bodu (x,y) od osy otáčení. Například pro osu x je $\rho(x,y) = y$ a pro osu y je $\rho(x,y) = x$. Pro osu procházející kolmo počátkem je $\rho(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

Fyzikální aplikace dvojného integrálu (pokračování)

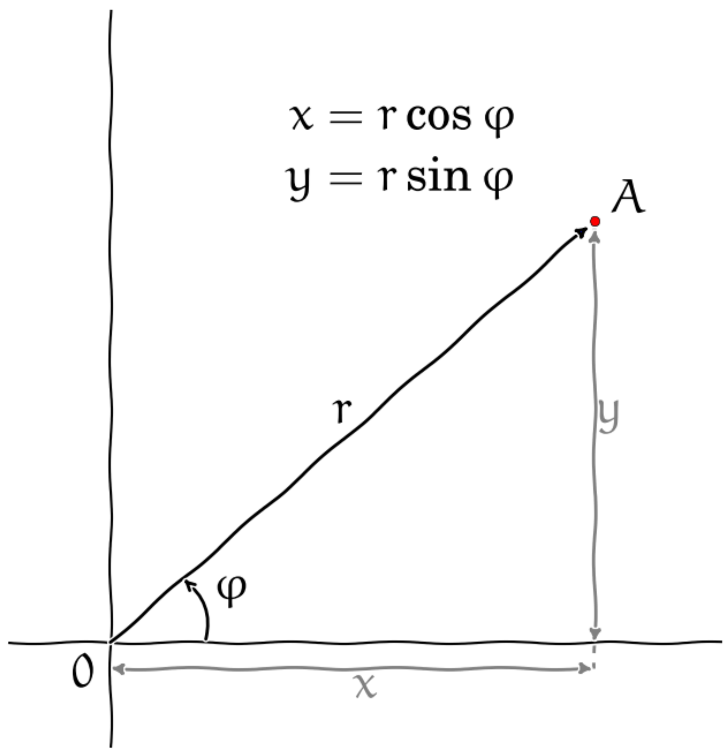
- **Souřadnice těžiště** množiny jsou podílem lineárních momentů a celkové hmotnosti množiny.
- **Kvadratický moment průřezu** (což je moment setrvačnosti pro $\sigma(x,y) = 1$, anglicky *second moment of area*) je veličina, která hraje podstatnou roli v mechanice (nábytek, stavby) při dimenzování (polic, nosných tyčí, nosníků).
- Vzorce pro obsah x-ovou souřadnici těžiště (x_T), y-ovou souřadnici těžiště (y_T), kvadratický moment vzhledem k ose x (I_x) a kvadratický moment vzhledem k ose y (I_y) (pro množinu M s plošnou hustotou 1) jsou

$$x_T = \frac{1}{S}\iint_M x\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad I_x = \iint_M y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$y_T = \frac{1}{S}\iint_M y\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad I_y = \iint_M x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Polární souřadnice

Dosud jsme používali pouze kartézské souřadnice: dvojici čísel udávající vzdálenost bodu od osy y a od osy x, která jednoznačně určuje polohu bodu v rovině. V praxi je někdy výhodnější použít i jiný způsob jak pomocí dvojice čísel charakterizovat polohu bodu v rovině - takové souřadnice potom nazýváme **křivočaré** souřadnice.

Z křivočarých souřadnic jsou nejdůležitější **polární souřadnice**. Při jejich použití polohu bodu A zadáváme tak, že určíme vzdálenost r bodu od počátku soustavy souřadnic O a úhel φ, který svírá spojnice bodů O a A s kladnou částí osy x.

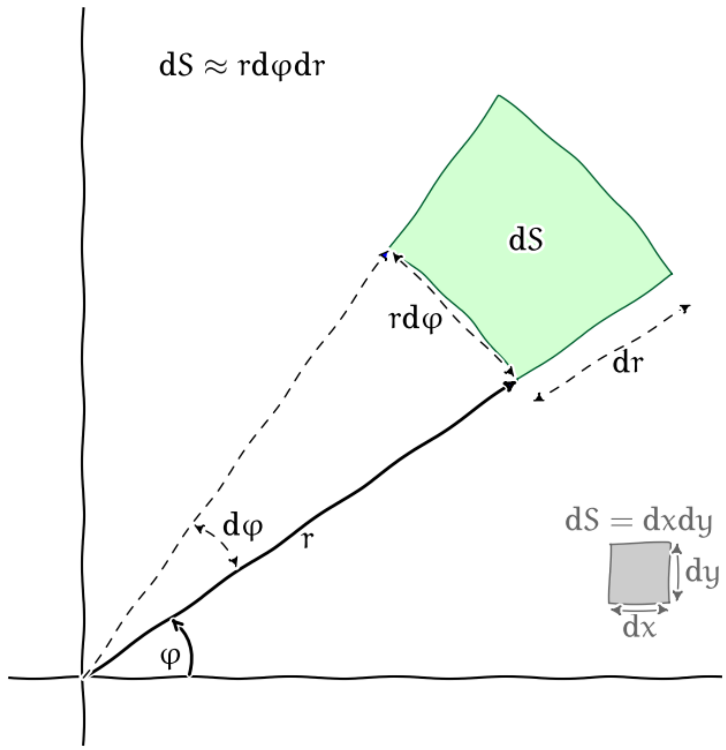


Dvojný integrál v polárních souřadnicích

Chceme-li převést dvojný integrál do polárních souřadnic, provádíme v něm vlastně substituci $x = r\cos\varphi$ a $y = r\sin\varphi$. Přitom se transformují i diferenciály $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}y$. Při změně úhlu o $\mathrm{d}\varphi$ a změně vzdálenosti o $\mathrm{d}r$ má odpovídající část roviny rozměry $\mathrm{d}r$ a $r\mathrm{d}\varphi$ a její obsah je $r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r$ (viz obrázek). Platí tedy, že obsah elementární oblasti $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ se transformuje na $\mathrm{d}S = r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r$. Podíl $\frac{\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$ udává, kolikrát se změní obsah elementární oblasti při změně souřadnic a nazývá se **jakobián**. V případě polárních souřadnic je jakobián jak vidíme roven r a platí tedy

$$\iint_\Omega f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Omega f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r.$$

V diferenciálním počtu polární souřadnice používáme především tam, kde má problém radiální symetrii. Například při studiu ochlazování nebo kmitů kruhových desek či válcovitých součástek. V integrálním počtu tyto souřadnice použijeme zejména v případě, kdy integrujeme přes kružnici nebo její část (např. mezikruží či kruhová výseč). V takovém případě mají totiž integrály které vzniknou po transformaci dvojného integrálu na dvojnásobný pevné meze a výpočet druhého integrálu je zpravidla jednodušší.



Řetězovka (catenary)

Robert Mařík

jaro 2014

Tento text je tištěnou verzí prezentací dostupných z http://user.mendelu.cz/marik/am.

Řetězovka - křivka lan a řetězů prověšených vlastní vahou

Budeme se zajímat o to, jaký tvar vlivem gravitace zaujmou volně visící ohebná lana a řetězy. Tento tvar vidíme často kolem sebe, například tento tvar zaujmou elektrické dráty (zejména když jsou sloupy daleko od sebe a na drátech je námraza). Stejný tvar zaujmou mosty, které mají hmotnost rozloženu podél délky. Lano na němž visí kotě zaujme tvar řetězovky až se kotě pustí. Teprve potom bude splněna podmínka, že lano nese pouze svou vlastní hmotnost.

Zavěšený most (tohle není řetězovka)

Jednodušším úkolem je zkoumat nejprve most zavěšený na laně. Nejedná se o řetězovku, protože lano nese další zátěž.

- Hmotnost nosného lana a svislých lan je zanedbatelná vzhledem k hmotnosti vozovky.
- Délka svislých lan, na kterých je vozovka zavěšena, je zvolena tak, aby namáhání bylo rovnoměrně rozloženo.
- Je potřeba zvolit délku svislých nosných lan aby hlavní nosné lano mělo (při rovné vozovce) tvar, který je pro ně "přirozený". Potom nebude vozovka zbytečně namáhána ve vertikálním směru.

0

Podpořeno projektem Průřezová inovace studijnách programů Lesnické a dřevařské fakulty MENDELU v Brně (LDF) s ohledem na discipliny společného základu (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0021) za přispění finančních prostředků EU a státního rozpočtu České republiky.


W
2
321.1


©www.extremeinstability.com


BATESVILLE 14
BALD KNOB 40

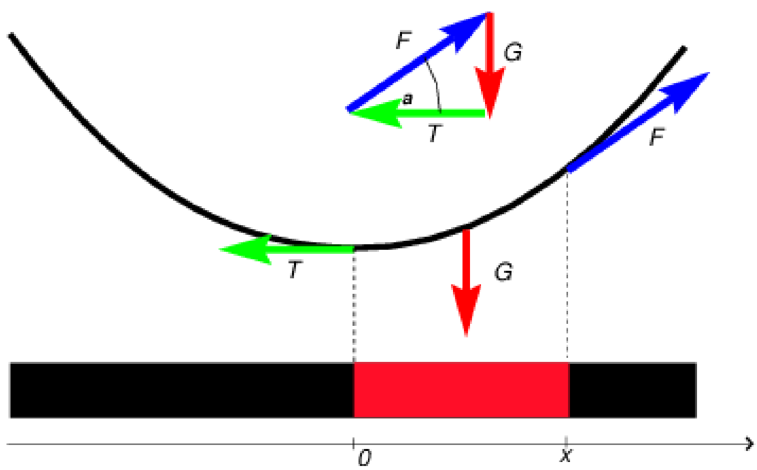
Proč je dobré znát řešení problému zavěšeného mostu?

Problém špatně navrženého mostu v malém měřítku a malém rozsahu škod: Na napnutém laně visí težký gumový pás sloužící pro děti jako skluzavka nebo opora při šplhání nahoru.

- Nosné lano má tendenci se prohnout, dírky na uchycení tuto tendenci nerespektují a jsou vyvrtané všechny v jedné řadě.
- Krajní dírky jsou tedy nejvíc namáhané a v tomto místě dojde k poruše materiálu.
- Podél jaké křivky se měly udělat otvory pro uchycení?

Zjednodušená formulace problému zavěšeného mostu

Jaký tvar zaujme lano zanedbatelné hmotnosti, které nese zátěž rovnoměrně rozloženou ve vodorovném směru?



Fyzikální podstata: Osu x volíme vodorovně, počátek je volen v nejnižším bodě lana. Na část lana mezi tímto nejnižším bodem a obecným bodem x působí tyto síly:

- Tahová síla T v bodě $x = 0$. Tato síla má směr tečný k lanu, tj. vodorovný.
- Tahová síla F v obecném bodě x. Tato síla má také tečný směr k lanu. Směrnice přímky, ve které síla působí, je tedy rovna derivaci funkce, kterou hledáme.
- Tíhová síla, způsobená gravitací. Tato síla je součinem hmotnosti m a tíhového zrychlení $\vec{g}$. Podle předpokladu je hmotnost rozložena konstantně. Definujeme-li tedy lineární hustotu τ mostu jako hmotnost jedné délkové jednotky, je hmotnost mostu délky x dána vztahem $m = \tau x$.

Uvažovaný úsek je v klidu, celková síla, která na něj působí je tedy nulová. To znamená, že vektorový součet všech tří sil je nulový vektor a po přesunutí tedy vektory tvoří strany pravoúhlého trojúhelníka. Z tohoto trojúhelníka plyne $\tan\alpha = \frac{G}{T} = \frac{\tau x g}{T} = \mu x$, kde $\mu = \frac{\tau g}{T}$ je konstanta.

Matematické formulace: Najděte rovnici křivky splňující rovnici $y' = \mu x$.

Řešení: Známe-li derivaci funkce, původní funkci najdeme integrováním.

$$y(x) = \int y'(x)\mathrm{d}x = \int \mu x \mathrm{d}x = \mu\frac{1}{2}x^2 + C.$$

Nosné lano musí mít parabolický tvar.

Konečně k řetězovce (sestavení diferenciální rovnice)

Uvažujme stejnou situaci jako na předhozím slidu, ale **hmota je rozložena rovnoměrně podél délky lana**. Jediné, co se na předchozí úloze mění, je vztah pro tíhu. Hmotnost uvažovaného úseku lana je součinem lineární hustoty τ a délky tohoto úseku, dané vztahem $\int_0^x \sqrt{1+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t$. Platí tedy

$$y' = \alpha \int_0^x \sqrt{1+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t.$$

Matematická formulace: Nalezněte funkci splňující

$$y' = \alpha \int_0^x \sqrt{1+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t.$$

Řešení: Derivováním dostáváme

$$y'' = \alpha\sqrt{1+[y'(x)]^2}.$$

Vskutku, je-li funkce $\mathcal{F}(x)$ primitivní funkcí k funkci $\sqrt{1+y'^2(x)}$, je podle Newtonovy–Leibnizovy věty integrál napravo roven rozdílu $\mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(0)$. Derivováním podle x obdržíme $F'(x)$, což není nic jiného než $\sqrt{1+y'^2(x)}$, protože $\mathcal{F}$ je podle předpokladu primitivní funkcí. Úkolem je tedy najít funkci, která splňuje rovnici

$$y'' = \alpha\sqrt{1+y'^2}$$

Substituce $z(x) = y'(x)$, $z'(x) = y''(x)$ převádí tuto rovnici na rovnici

$$z' = \alpha\sqrt{1+z^2}.$$

Toto je rovnice, kde neznámou je funkce $z(x)$ a v rovnici vystupuje i derivace $z'(x)$. Takové rovnice nazýváme **diferenciální rovnice**

Rozřešení diferenciální rovnice

Separací proměnných obdržíme

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \alpha dx$$

a po integraci

$$\ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right) = \alpha x + C.$$

Odsud

$$\begin{aligned} z+\sqrt{1+z^2} &= e^{\alpha x + C} \\ \sqrt{1+z^2} &= e^{\alpha x + C} - z \\ 1+z^2 &= e^{2(\alpha x + C)} - 2ze^{\alpha x + C} + z^2 \\ 2ze^{\alpha x + C} &= e^{2(\alpha x + C)} - 1 \\ z &= \frac{1}{2}\left[e^{\alpha x + C} - e^{-(\alpha x + C)}\right] \end{aligned}$$

Platí tedy

$$y' = \frac{1}{2}\left[e^{\alpha x + C} - e^{-(\alpha x + C)}\right]$$

a integrací obdržíme

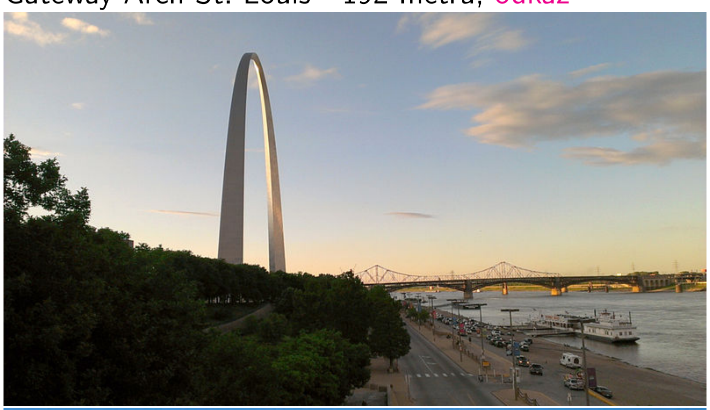
$$y = \frac{1}{2\alpha}\left[e^{\alpha x + C} + e^{-(\alpha x + C)}\right] = \frac{1}{\alpha}\cosh(\alpha x + C)$$

Lano zaujme tvar hyperbolického kosinu.

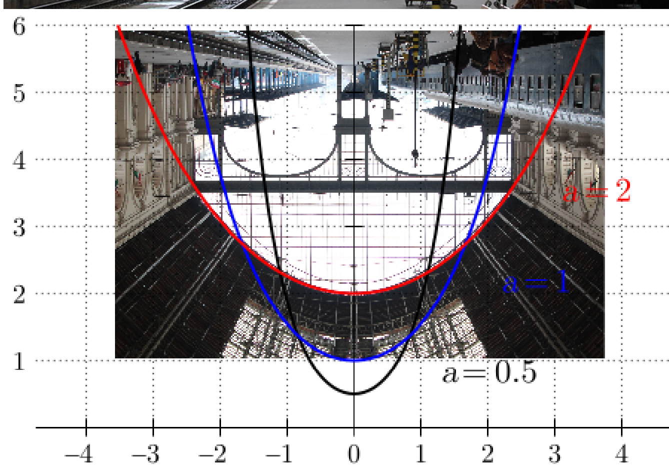
Další řetězovky okolo nás

- Pavučina

- Gateway Arch St. Louis - 192 metrů, odkaz



- Nádraží Keletti v Budapešti



- Pro kolo s hranatými koly jsou řetězovky ideálním povrchem


Video na Youtube

Diferenciální rovnice prvního řádu

Robert Mařík

jaro 2014

Tento text je tištěnou verzí prezentací dostupných z http://user.mendelu.cz/marik/am.

Obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu

Obyčejná diferenciální rovnice je rovnice, kde vystupuje neznámá funkce a její derivace. Setkáváme se s ní například všude tam, kde rychlost růstu nebo poklesu veličiny souvisí s její velikostí. Například rychlost s jakou se mění teplota horkého tělesa je funkcí teploty samotné. Rychlost tepelné výměny mezi dvěma tělesy je totiž úměrná rozdílu jejich teplot (Newtonův zákon).

Definice. Obyčejnou diferenciální rovnicí prvního řádu rozřešenou vzhledem k derivaci *(stručněji též diferenciální rovnicí, DR) s neznámou y rozumíme rovnici tvaru*

$$y' = \varphi(x, y) \tag{ODE}$$

kde φ je funkce dvou proměnných.

(anglicky ordinary differential equation, ODE)

Další formy zápisu:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \varphi(x, y)$$

$$\mathrm{d}y = \varphi(x, y)\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}y - \varphi(x, y)\mathrm{d}x = 0$$

0

Podpořeno projektem Průřezová inovace studijnách programů Lesnické a dřevařské fakulty MENDELU v Brně (LDF) s ohledem na discipliny společného základu (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0021) za přispění finančních prostředků EU a státního rozpočtu České republiky.

Příklady diferenciálních rovnic

Z fyzikálního hlediska diferenciální rovnice popisuje mechanismus vývoje systému.

Tepelná výměna

Rychlost tepelné výměny mezi dvěma tělesy je úměrná rozdílu jejich teplot (Newtonův zákon). Tento proces je tedy možno modelovat diferenciální rovnicí

$$y' = -k(y - T)$$

teplota y horkého tělesa se mění (rychlost změny je derivace y') tak, že klesá (znaménko minus) rychlostí úměrnou (konstanta k) teplotnímu rozdílu mezi teplotou tělesa a teplotou okolí (člen $y - T$).

Vývoj populace

Udává-li y velikost určité populace, K nosnou kapacitu prostředí, $h(y)$ intenzitu lovu a $r\left(1 - \frac{y}{K}\right)$ specifickou míru růstu populace (rychlost s jakou se velikost populace zvětšuje vztažená na jednotkové množství populace, přičemž tato rychlost klesá s tím, jak se velikost populace přibližuje k nosné kapacitě prostředí), je možno populaci modelovat rovnicí

$$y' = ry\left(1 - \frac{y}{K}\right) - h(y).$$

Podle velkosti koeficientů v této rovnici dělíme živočichy na r-stratégy a K-stratégy, toto dělení odráží, jak se snaží druh přežít.

Cauchyova úloha, počáteční podmínka

Diferenciální rovnice udává scénář vývoje systému. K jednoznačnému předpovězení budoucího stavu je ovšem nutno znát nejenom, jaký mechanismus ovlivňuje vývoj systému, ale také stav současný.

Definice. *Nechť x_0, y_0 jsou reálná čísla. Úloha najít řešení rovnice*

$$y' = \varphi(x, y), \tag{ODE}$$

které splňuje zadanou počáteční podmínku

$$y(x_0) = y_0 \tag{IC}$$

se nazývá počáteční *(též* Cauchyova*)* úloha*.*

Řešení Cauchyovy úlohy nazýváme též partikulárním řešením rovnice*. Graf libovolného partikulárního řešení se nazývá* integrální křivka*.*

(anglicky initial condition, IC, initial value problem, IVP)

Geometrická interpretace ODE

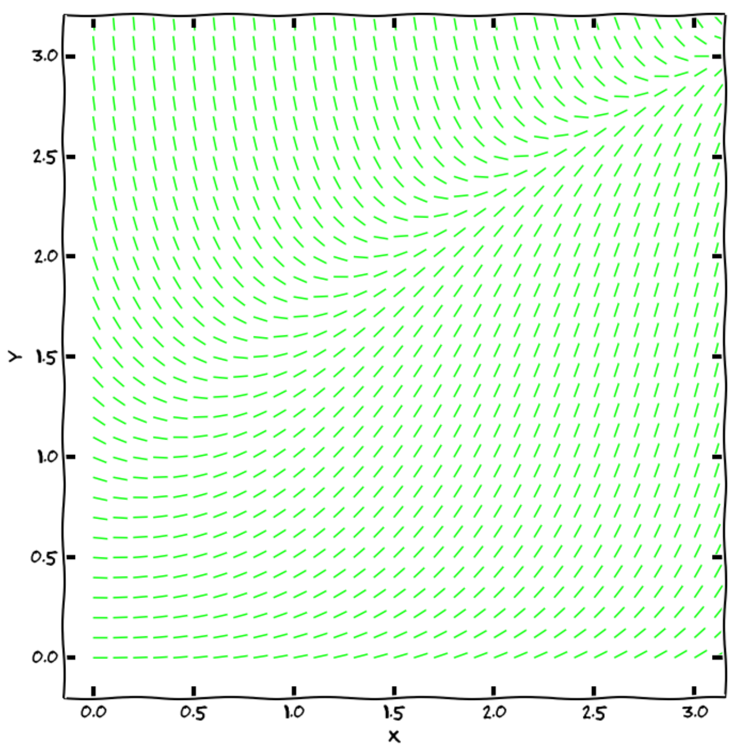
Protože derivace funkce v bodě udává směrnici tečny ke grafu funkce v tomto bodě, lze rovnici

$$y' = \varphi(x, y) \tag{ODE}$$

chápat jako předpis, který každému bodu v rovině přiřadí směrnici tečny k integrální křivce, která tímto bodem prochází. Sestrojíme-li v dostatečném počtu (například i náhodně zvolených) bodů $[x, y]$ v rovině vektory $(1, \varphi(x, y))$, obdržíme **směrové pole diferenciální rovnice** — systém lineárních elementů, které jsou tečné k integrálním křivkám.

Počáteční podmínka $y(x_0) = y_0$ geometricky vyjadřuje skutečnost, že graf příslušného řešení prochází v rovině bodem $[x_0, y_0]$. Má-li tato počáteční úloha jediné řešení, neprochází bodem $[x_0, y_0]$ žádná další křivka. Má-li každá počáteční úloha jediné řešení (což bude pro nás velice častý případ), znamená to, že integrální křivky se *nikde neprotínají*.

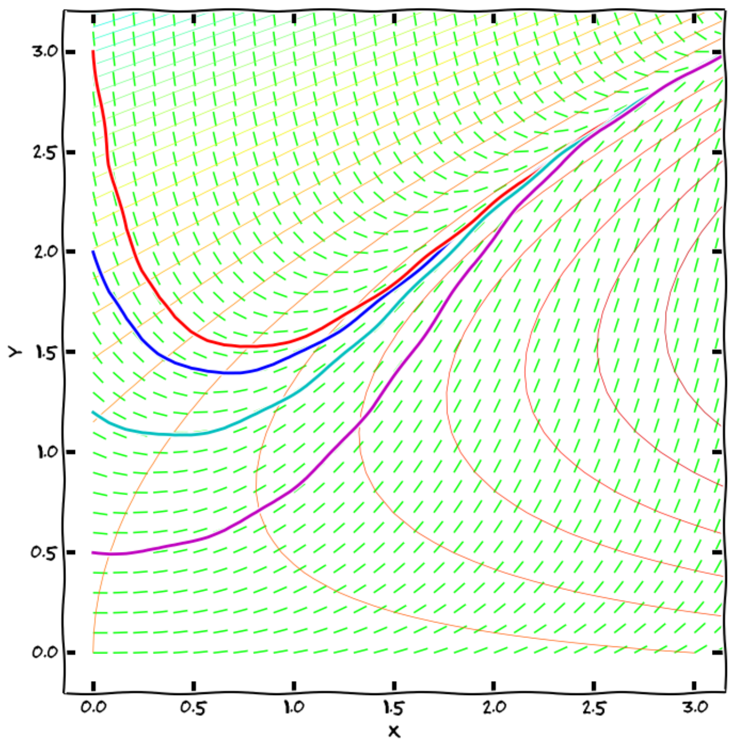
Vrstevnice funkce $\varphi(x, y)$ mají tu vlastnost, že derivace integrálních křivek podél každé z vrstevnic je konstantní. Proto tyto křivky nazýváme **isokliny**.



Obrázek 1: Směrové pole diferenciálni rovnice

Obecné a partikulární řešení

Řešení diferenciální rovnice je nekonečně mnoho. Zpravidla je dokážeme zapsat pomocí jediného vzorce, který obsahuje nějakou (alespoň do jisté míry libovolnou) konstantu C. Takový vzo-



Obrázek 2: Směrové pole diferenciálni rovnice, integrální křivky, isokliny

rec se nazývá **obecné řešení rovnice**. Pokud není zadána počáteční podmínka a mluvíme o **partikulárním řešení**, máme tím na mysli jednu libovolnou funkci splňující diferenciální rovnici.

Příklad: Obecným řešením diferenciální rovnice

$$y' = 2xy$$

je

$$y = Ce^{x^2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Žádná jiná řešení neexistují, všechna řešení se dají zapsat v tomto tvaru pro nějakou vhodnou konstantu C. Partikulárním řešením je například $y = 5e^{x^2}$. Řešením počáteční úlohy

$$y' = 2xy, \quad y(0) = 3$$

je

$$y = 3e^{x^2}.$$

Online řešiče ODE (symbolicky):

- Wolfram Alpha
- Mathematical Assistant on Web
- Sage

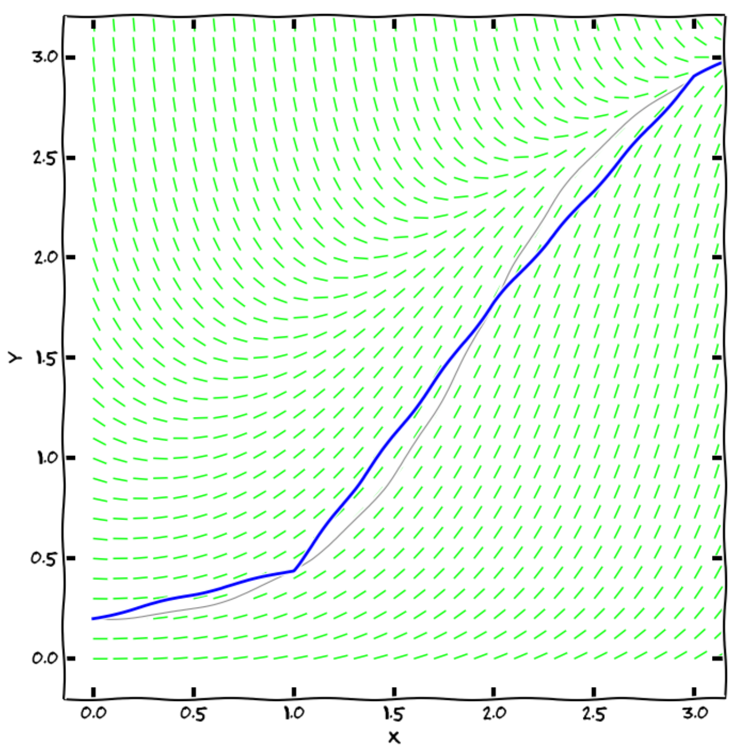
Numerické řešení IVP

Řešení počáteční úlohy lze numericky aproximovat poměrně snadno: začneme v bodě zadaném počáteční podmínkou a v okolí tohoto bodu nahradíme integrální křivku její tečnou. Tím se dostaneme do dalšího bodu, odkud opět integrální křivku aproximujeme tečnou.

Směrnici tečny zjistíme z diferenciální rovnice, buď přímo z derivace (Eulerova metoda), nebo poněkud rafinovaněji, kdy bereme v úvahu i konvexnost či konkávnost a fakt, že se derivace mění s měnícím se x i y (metoda Runge–Kutta). Stačí tedy mít zvolen *krok* numerické metody (délku intervalu, na kterém aproximaci tečnou použijeme) a výstupem metody bude aproximace integrální křivky pomocí lomené čáry.

Online řešiče ODE (numericky):

- dfield
- Sage



Obrázek 3: Metoda Runge Kutta s velmi dlouhým krokem (modrou barvou, jde jasně vidět aproximace lomenou čarou). Přesné řešení je nakresleno šedou barvou.

ODE se separovanými proměnnými

Definice. *Diferenciální rovnice tvaru*

$$y' = f(x)g(y) \tag{S}$$

kde f a g jsou funkce spojité na (nějakých) otevřených intervalech se nazývá obyčejná diferenciální rovnice se separovanými proměnnými.

Příklad: Rovnice

$$y' + xy + xy^2 = 0$$

je rovnicí se separovanými proměnnými, protože je možno ji zapsat ve tvaru

$$y' = -xy(y+1).$$

Rovnice

$$y' = x^2 - y^2$$

není rovnice se separovatelnými proměnnými.

Test separovatelnosti proměnných: Diferenciální rovnice

$$y' = \varphi(x, y)$$

je rovnicí se separovanými proměnnými právě tehdy, když existují funkce $f(x)$ a $g(y)$ takové, že

$$\varphi(x, y) = f(x)g(y).$$

Pokud je φ nezáporná a dostatečně hladká na nějaké otevřené konvexní množině, je rovnice rovnicí se separovanými proměnnými právě tehdy, když platí

$$\begin{vmatrix} \varphi & \frac{\partial}{\partial x}\varphi \\ \frac{\partial}{\partial y}\varphi & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\varphi \end{vmatrix} = 0.$$

Řešení ODE se separovanými proměnnými

1. Má-li algebraická rovnice $g(y) = 0$ řešení $k_1, k_2, \ldots, k_n$, jsou konstantní funkce $y \equiv k_1$, $y \equiv k_2, \ldots, y \equiv k_n$ řešeními rovnice.

2. Pracujme na intervalech, kde $g(y) \neq 0$. Formálně nahradíme derivaci y' podílem diferenciálů $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y).$$

3. Odseparujeme proměnné
$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\mathrm{d}x.$$

4. Získanou rovnost integrujeme

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x + C.$$

5. Pokud je zadána počáteční podmínka, je možné ji na tomto místě dosadit do obecného řešení a určit hodnotu konstanty C. Tuto hodnotu poté dosadíme zpět do obecného řešení a obdržíme řešení *partikulární*.

6. Pokud je to možné, převedeme řešení (obecné nebo partikulární) do explicitního tvaru (vyjádříme odsud y).

Existence a jednoznačnost řešení

Věta o existenci a jednoznačnosti řešení: *Je-li $g(y_0) \neq 0$, je řešení počáteční úlohy*

$$y' = f(x)g(y), \qquad y(x_0) = y_0$$

které obdržíme pomocí postupu z předchozího odstavce, definované a jednoznačně určené v nějakém okolí bodu x_0.

Vzorec pro řešení IVP pro rovnici se separovatelnými proměnnými: Partikulární řešení počáteční úlohy

$$y' = f(x)g(y), \qquad y(x_0) = y_0$$

lze psát též přímo ve tvaru určitého integrálu

$$\int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}t}{g(t)} = \int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Definice. *Nechť funkce a, b jsou spojité na intervalu I. Rovnice*

$$y' + a(x)y = b(x) \tag{LDE}$$

se nazývá obyčejná lineární diferenciální rovnice prvního řádu *(zkráceně píšeme LDE). Je-li navíc $b(x) \equiv 0$ na I, nazývá se rovnice* homogenní, *v opačném případě* nehomogenní.

Věta o řešitelnosti LDE. *Jsou-li funkce a, b spojité na intervalu I, $x_0 \in I$ a $y_0 \in \mathbb{R}$ libovolné, má každá počáteční úloha právě jedno řešení definované na celém intervalu I.*

Definice. *Buď dána lineární diferenciální rovnice. Homogenní rovnice, která vznikne z rovnice nahrazením pravé strany nulovou funkcí, tj. rovnice*

$$y' + a(x)y = 0$$

se nazývá homogenní rovnice, asociovaná s nehomogenní rovnicí (LDE)

Homogenní LDE má vždy (bez ohledu na konkrétní tvar funkce $a(x)$) konstantní řešení $y = 0$, jak lze ověřit přímým dosazením. Toto řešení se nazývá *triviální řešení*.

Operátorová symbolika a linearita operátoru

Definujeme-li na množině všech funkcí diferencovatelných na intervalu I operátor L vztahem

$$L[y](x) = y'(x) + a(x)y(x)$$

pro každé $x \in I$, je možno LDE a s ní asociovanou homogenní rovnici zapsat v krátkém tvaru $L[y] = b(x)$ a $L[y] = 0$.

Operátor L splňuje pro všechna reálná čísla C_1, C_2 a všechny diferencovatelné funkce $y_1(x)$, $y_2(x)$ vztah

$$L[C_1y_1 + C_2y_2] = C_1L[y_1] + C_2L[y_2].$$

Vskutku:

$$\begin{aligned} L[C_1y_1 + C_2y_2](x) &= \Bigl(C_1y_1(x) + C_2y_2(x)\Bigr)' + a(x)\Bigl(C_1y_1(x) + C_2y_2(x)\Bigr) \\ &= C_1y_1'(x) + C_2y_2'(x) + a(x)C_1y_1(x) + a(x)C_2y_2(x) \\ &= C_1\Bigl(y_1'(x) + a(x)y_1(x)\Bigr) + C_2\Bigl(y_2'(x) + a(x)y_2(x)\Bigr) \\ &= C_1L[y_1](x) + C_2L[y_2](x). \end{aligned}$$

Operátorová symbolika a linearita operátoru (pokračování)

Důsledkem vztahu

$$L[C_1y_1 + C_2y_2] = C_1L[y_1] + C_2L[y_2],$$

tj. důsledkem skutečnosti že lineární operátor zachovává lineární kombinaci funkcí jsou vztahy

$$L[Cy] = CL[y]$$

(pro $C_2 = 0$, $C_1 = C$, $y_1 = y$) a

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$$

(pro $C_1 = C_2 = 1$).

Tedy lineární operátor aplikovaný na součet je možno zapsat jako součet lineárních operátorů aplikovaných na jednotlivé sčítance a dále je možno z operátoru vytáhnout ven multiplikativní konstanty. To jsou obraty dobře známé při výpočtu derivací a je možné je použít i při dosazování do lineárního operátoru.

Násobek řešení homogenní LDE je řešením téže LDE

Buď $y_{p0}(x)$ řešením rovnice

$$L[y] = 0,$$

tj. nechť platí $L[y_{p0}] = 0$. Buď $C \in \mathbb{R}$ libovolné reálné číslo.

Násobek řešení hom. LDE je také řešením.

Ukážeme, že $y_1 = Cy_{p0}(x)$ je řešením téže rovnice, tj. že platí $L[y_1] = 0$. Toto však platí, neboť

$$L[y_1] = L[Cy_{p0}] = CL[y_{p0}] = C \cdot 0 = 0.$$

Máme-li jedno řešení homogenní lineární diferenciální rovnice, vynásobením konstantou dostaneme další řešení téže rovnice. Ještě ukážeme, že pokud řešení které násobíme není triviální, dostaneme tímto způsobem dokonce všechna řešení.

C-násobek nenulového řešení hom. LDE je obecným řešením.

Ukážeme, že je-li $y_{p0}(x)$ nenulovým řešením rovnice $L[y] = 0$, je obecným řešením této rovnice

$$y(x) = Cy_{p0}(x), \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Vskutku, podle předchozího se jedná o řešení a stačí ukázat, že zde jsou zahrnuta všechna možná řešení. Stačí ukázat, že pro libovolnou počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$, kde $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ je možno partikulární řešení IVP dostat vhodnou volbou konstanty. Toto je však triviální, protože funkce

$$y(x) = \frac{y_0}{y_{p0}(x_0)} y_{p0(x)}$$

má požadované vlastnosti.

Obecné řešení homogenní LDE

Uvažujme homogenní LDE

$$y' + a(x)y = 0. \qquad \text{(HLDE)}$$

Přepsáním do

$$y' = -a(x)y$$

a přímým dosazením vidíme, že

$$y_{p0} = e^{-\int a(x)\mathrm{d}x}$$

je řešením této rovnice. Obecné řešení rovnice (HLDE) je potom

$$y = Ce^{-\int a(x)\mathrm{d}x}.$$

Jedno řešení nehomogenní LDE stačí

Je-li y_p řešením nehomogenní LDE

$$y' + a(x)y = b(x),$$

je obecným řešením této rovnice

$$y(x) = Cy_{p0}(x) + y_p(x),$$

kde $Cy_{p0}(x)$ je obecným řešením asociované homogenní LDE.

Vskutku, jestliže $L[y_p] = b(x)$ a $L[y_{p0}(x)] = 0$, potom

$$L[y] = L[Cy_{p0} + y_p] = CL[y_{p0}] + L[y_p] = C \cdot 0 + b(x) = b(x).$$

Funkce $y(x)$ tedy je řešením.

Pokud potřebujeme splnit libovolnou počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$, kde $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, stačí vzít řešení

$$y(x) = \frac{y_0 - y_p(x_0)}{y_{p0}(x_0)} y_{p0}(x) + y_p(x),$$

Jedno řešení nehomogenní LDE stačí (pokračování)

Slovně:

- Všechna řešení homogenní lineární rovnice jsou násobky jednoho libovolného nenulového řešení této rovnice.
- Součet jednoho libovolného řešení zadané nehomogenní a obecného řešení asociované homogenní lineární rovnice je obecným řešením dané nehomogenní rovnice.

Stačí tedy najít dvě (do jisté míry speciální) řešení a z nich snadno sestavíme obecné řešení zadané rovnice.

Příklad: Rovnice

$$y' + y = 3 \tag{*}$$

má partikulární řešení $y = 3$ (vidíme hned po dosazení). Asociovaná homogenní rovnice

$$y' + y = 0$$

má obecné řešení $y = Ce^{-x}$. Obecné řešení rovnice (*) tedy je

$$y = 3 + Ce^{-x}.$$

Nehomogenní LDE – metoda variace konstanty

Než začneme hledat řešení nehomogenní rovnice, prozkoumejme, jak se lineární operátor L chová vzhledem k součinu funkcí. Buďte $u = u(x)$ a $v = v(x)$ funkce. Platí

$$\begin{aligned} L[u \cdot v] &= \Big(uv\Big)' + auv \\ &= u'v + uv' + auv \\ &= v\Big(u' + au\Big) + uv' \\ &= vL[u] + uv'. \end{aligned}$$

Tento výpočet ukazuje, že pokud $L[u] = 0$, tj. pokud je funkce u řešením asociované homogenní diferenciální rovnice, je možno řešení nehomogenní rovnice $L[y] = b(x)$ hledat ve tvaru součinu $y(x) = u(x)v(x)$, kde funkce $v(x)$ splňuje vztah

$$\begin{aligned} b(x) &= L[u \cdot v] \\ &= vL[u] + uv' \\ &= 0 + uv' \\ &= uv'. \end{aligned}$$

tj.

$$v'(x) = \frac{b(x)}{u(x)}.$$

Odsud však funkci v můžeme nalézt již pouhou integrací a součin $u(x)v(x)$ poté bude řešením nehomogenní rovnice. V praxi je také obvyklé, že si pamatujeme pouze hlavní myšlenku – *budeme hledat řešení nehomogenní rovnice ve tvaru součinu nějaké funkce a řešení asociované homogenní rovnice* – a provádíme všechny úvahy pro konkrétní funkce a, b v běžném neoperátorovém označení.

Nehomogenní LDE – metoda variace konstanty (pokračování)

Pokud v předchozím volíme $u = e^{-\int a(x)\mathrm{d}x}$, je

$$v' = b(x)e^{\int a(x)\mathrm{d}x}$$

a odsud

$$v = \int b(x)e^{\int a(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x.$$

Partikulární řešení je

$$uv = e^{-\int a(x)\mathrm{d}x} \int b(x)e^{\int a(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

a obecné řešení LDE

$$y' + a(x)y = b(x)$$

je

$$y = Ce^{-\int a(x)\mathrm{d}x} + e^{-\int a(x)\mathrm{d}x} \int b(x) e^{\int a(x)\mathrm{d}x} \mathrm{d}x$$

Nehomogenní LDE – metoda integračního faktoru

Protože platí

$$\left(ye^{\int a(x)\mathrm{d}x}\right)' = y'e^{\int a(x)\mathrm{d}x} + ya(x)e^{\int a(x)\mathrm{d}x},$$

je možno rovinci

$$y' + a(x)y = b(x)$$

přepsat do tvaru

$$y'e^{\int a(x)\mathrm{d}x} + a(x)ye^{\int a(x)\mathrm{d}x} = b(x)e^{\int a(x)\mathrm{d}x}$$

a odsud

$$\left(ye^{\int a(x)\mathrm{d}x}\right)' = b(x)e^{\int a(x)\mathrm{d}x}.$$

Integrací dostáváme

$$ye^{\int a(x)\mathrm{d}x} = \int b(x)e^{\int a(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C$$

a explicitní tvar řešení je

$$y = Ce^{-\int a(x)\mathrm{d}x} + e^{-\int a(x)\mathrm{d}x} \int b(x) e^{\int a(x)\mathrm{d}x} \mathrm{d}x$$

Lineární diferenciální rovnice druhého řádu

Robert Mařík

jaro 2014

Tento text je tištěnou verzí prezentací dostupných z http://user.mendelu.cz/marik/am.

Lineární diferenciální rovnice druhého řádu

Definice. *Buďte p, q a f funkce definované a spojité na intervalu I. Diferenciální rovnice*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{LDE}$$

se nazývá lineární diferenciální rovnice druhého řádu. Řešením rovnice *(nebo též* integrálem rovnice*) na intervalu I rozumíme funkci, která má spojité derivace do řádu 2 na intervalu I a po dosazení identicky splňuje rovnost (LDE) na I. Úloha nalézt řešení rovnice, které splňuje v bodě* $x_0 \in I$ počáteční podmínky

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_0', \end{cases} \tag{IC}$$

kde y_0 a y_0' jsou reálná čísla, se nazývá počáteční úloha *(*Cauchyova úloha*). Řešení počáteční úlohy se nazývá* partikulární řešení rovnice.

Zkratky: LDE - lineární diferenciální rovnice, IC - počáteční podmínka, IVP - počáteční úloha

Příklad: Kmity tělesa o hmotnosti m pružně připevněného k nehybné podložce spojem tuhosti k jsou popsány diferenciální rovnicí $\ddot y + \frac{k}{m}y = 0$. Zde navíc používáme fyzikální úzus označovat derivace podle času pomocí tečky a ne čárky. Symbol $\ddot y$ tedy značí druhou derivaci funkce y, kde y bereme jako funkci času.

Podpořeno projektem Průřezová inovace studijnách programů Lesnické a dřevařské fakulty MENDELU v Brně (LDF) s ohledem na discipliny společného základu (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0021) za přispění finančních prostředků EU a státního rozpočtu České republiky.

Řešitelnost LDE druhého řádu

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{LDE}$$

Věta o existenci a jednoznačnosti řešení LDE druhého řádu. *Každá počáteční úloha pro LDE druhého řádu má řešení, které je určeno jednoznačně a toto řešení je definované na celém intervalu I.*

Definice (speciální typy LDE druhého řádu). *Platí-li v rovnici (LDE) $f(x) = 0$ pro všechna $x \in I$, nazývá se rovnice (LDE)* homogenní*, v opačném případě* nehomogenní*.*

Jsou-li koeficienty $p(x)$ a $q(x)$ na intervalu I konstantní funkce, nazývá se (LDE) rovnice s konstantními koeficienty*.*

Definice (triviální řešení). *Funkce $y(x) \equiv 0$ je řešením homogenní LDE druhého řádu vždy, bez ohledu na tvar koeficientů p, q. Toto řešení nazýváme* triviální řešení rovnice LDE*.*

Definice (asociovaná homogenní rovnice). *Nahradíme-li v nehomogenní LDE pravou stranu (tj. funkci f) nulovou funkcí obdržíme rovnici*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Tato rovnice se nazývá asociovaná homogenní rovnice k rovnici (LDE)*.*

Definice (obecné řešení). *Všechna řešení LDE druhého řádu lze vyjádřit ve tvaru obsahujícím dvě nezávislé konstanty C_1, $C_2 \in \mathbb{R}$. Takovýto předpis se nazývá* obecné řešení rovnice (LDE)*.*

Operátorová symbolika

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{LDE}$$

Podobně jako lineární diferenciální rovnice prvního řádu, i u (LDE) často pravou stranu rovnice často zkracujeme do tvaru $L[y](x)$. Definujeme-li tedy

$$L[y](x) = y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x),$$

je tímto předpisem definován operátor, který každé dvakrát diferencovatelné funkci přiřazuje levou stranu rovnice (LDE). Rovnici (LDE) je potom možno zapsat ve tvaru

$$L[y] = f(x).$$

Věta o linearitě. *Operátor $L[y]$ zachovává lineární kombinaci funkcí, tj. pro libovolné dvě funkce y_1 a y_2 a libovolné reálné konstanty C_1 a C_2 platí*

$$L[C_1 y_1 + C_2 y_2] = C_1 L[y_1] + C_2 L[y_2].$$

Důsledky linearity

Jako speciální případ vztahu

$$L[C_1y_1 + C_2y_2] = C_1L[y_1] + C_2L[y_2].$$

dostáváme implikace

$$\begin{aligned}
&L[y_2] = 0 \text{ a } L[y_1] = f(x) \implies L[y_1 + y_2] = f(x),\\
&L[y_1] = L[y_2] = f(x) \implies L[y_1 - y_2] = 0,\\
&L[y_1] = L[y_2] = 0 \implies L[C_1y_1 + C_2y_2] = 0,
\end{aligned}$$

- Součet řešení nehomogenní a asociované homogenní LDE je řešením původní nehomogenní rovnice.
- Rozdíl dvou řešení nehomogenní LDE je řešením asociované homogenní rovnice.
- Každá lineární kombinace dvou řešení homogenní LDE je opět řešením této rovnice.

Důsledky linearity prakticky

Vztah

$$L[C_1y_1 + C_2y_2] = C_1L[y_1] + C_2L[y_2]$$

poslouží (podoně jako u lineárních rovnic prvního řádu), abychom popsali strukturu množiny všech řešení rovnice a dokázali tuto množinu vytvořit jenom na základě znalosti několika prvků.

Rovnice

$$y'' + y = x \tag{1}$$

má partikulární řešení $y = x$.

Asociovaná homogenní rovnice je

$$y'' + y = 0. \tag{2}$$

Tato rovnice má řešení například $y = \sin x$, $y = \cos x$. Z linearity plyne

- Funkce $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$ je řešením rovnice (1) pro libovolná reálná C_1, C_2.
- Funkce $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + x$ je řešením rovnice (2) pro libovolná reálná C_1, C_2.
- Je-li funkce y_p řešením rovnice (1), potom je $y_p - x$ řešením rovnice (2).

Kdy pomocí linearity získáme obecné řešení?

Budeme studovat homogenní LDE druhého řádu, tj. rovnici

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

kterou můžeme zkráceně zapsat jako $L[y] = 0$, kde operátor L je lineární diferenciální operátor druhého řádu.

Motivace. Budeme předpokládat že funkce $y_1(x)$ a $y_2(x)$ jsou obě řešeními a budeme hledat podmínky, za kterých je funkce

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

obecným řešením. Derivováním tohoto vztahu získáváme

$$y'(x) = C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x)$$

a dosazení počátečních podmínek $y(\alpha) = \beta$, $y'(\alpha) = \gamma$ vede k následující soustavě lineárních rovnic s neznámými C_1, C_2

$$\begin{aligned} \beta &= C_1 y_1(\alpha) + C_2 y_2(\alpha), \\ \gamma &= C_1 y_1'(\alpha) + C_2 y_2'(\alpha). \end{aligned}$$

Jak je známo z lineární algebry, tato soustava má právě jedno řešení pro libovolnou volbu čísel β, γ právě tehdy, když matice soustavy, tj. matice $\begin{pmatrix} y_1(\alpha) & y_2(\alpha) \\ y_1'(\alpha) & y_2'(\alpha) \end{pmatrix}$, je regulární. Tato matice je regulární právě tehdy, když její determinant je nenulový a to nastane právě tehdy když jeden sloupec není násobkem druhého.

Homogenní LDE 2. řádu (wronskián, lineárně nezávislá řešení)

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{LDE0}$$

Definice (lineární (ne-)závislost funkcí). *Buďte y_1 a y_2 funkce definované na intervalu I. Řekneme, že funkce y_1 a y_2 jsou na intervalu I* lineárně závislé, *jestliže jedna z nich je na intervalu I násobkem druhé, tj. jestliže existuje reálné číslo $k \in \mathbb{R}$ s vlastností*

$$y_1(x) = k y_2(x) \qquad \text{pro všechna } x \in I,$$

nebo

$$y_2(x) = k y_1(x) \qquad \text{pro všechna } x \in I.$$

V opačném případě říkáme, že funkce y_1, y_2 jsou na intervalu I lineárně nezávislé.

Definice (Wronskián). *Buďte $y_1(x)$ a $y_2(x)$ dvě libovolná řešení homogenní rovnice (LDE0).* Wronskiánem *funkcí $y_1(x)$, $y_2(x)$ rozumíme determinant*

$$W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}.$$

Věta o lineární (ne)závislostí řešení. *Buďte $y_1(x)$ a $y_2(x)$ dvě řešení rovnice (LDE0) na intervalu I. Tato řešení jsou lineárně nezávislá právě tehdy když je jejich Wronskián různý od nuly na intervalu I.*

Homogenní LDE 2. řádu (obecné řešení)

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{LDE0}$$

Definice (obecné řešení homogenní LDE) *Jsou-li y_1 a y_2 dvě netriviální lineárně nezávislá řešení rovnice (LDE0) na intervalu I, pak funkce y definovaná vztahem*

$$y(x, C_1, C_2) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

kde $C_{1,2} \in \mathbb{R}$, je obecným řešením rovnice (LDE0) na intervalu I.

Definice (fundamentální systém řešení). *Dvojici funkcí y_1 a y_2 z předchozí věty nazýváme* fundamentální systém řešení rovnice (LDE0).

Homogenní LDE 2. řádu s konstantními koeficienty

Budeme studovat rovnici tvaru

$$y'' + py' + qy = 0,$$

kde $p, q \in \mathbb{R}$. Všimněme si nejprve následujícího faktu: Dosadíme-li do levé strany rovnice $y = e^{zx}$, kde z je reálné číslo, po výpočtu derivací a po vytknutí faktoru e^{zx} získáváme

$$y'' + py' + qy = e^{zx}(z^2 + pz + q).$$

Protože exponenciální faktor na pravé straně je vždy nenulový, bude výraz na pravé straně roven nule pokud bude splněna podmínka

$$z^2 + pz + q = 0.$$

Pouze v tomto případě bude uvažovaná funkce řešením rovnice (1).

Definice (charakteristická rovnice). *Kvadratická rovnice*

$$z^2 + pz + q = 0$$

s neznámou z se nazývá charakteristická rovnice *pro rovnici*

$$y'' + py' + qy = 0.$$

Homogenní LDE 2. řádu s konstantními koeficienty

Věta o obecném řešení LDE s konstantními koeficienty. *Uvažujme LDE*

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{1}$$

a její charakteristickou rovnici

$$z^2 + pz + q = 0.$$

- *Jsou-li* $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ *dva různé reálné kořeny charakteristické rovnice, definujme*

$$y_1 = e^{z_1 x}, \qquad y_2 = e^{z_2 x}.$$

- *Je-li* $z_1 \in \mathbb{R}$ *dvojnásobným kořenem charakteristické rovnice, definujme*

$$y_1 = e^{z_1 x}, \qquad y_2 = xe^{z_1 x}.$$

- *Jsou-li* $z_{1,2} = \alpha \pm i\beta \notin \mathbb{R}$ *dva komplexně sdružené kořeny charakteristické rovnice, definujme*

$$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x), \qquad y_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x).$$

Potom obecné řešení rovnice (1) je

$$y(x, C_1, C_2) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \qquad C_1 \in \mathbb{R},\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Nehomogenní LDE 2. řádu

Věta o obecném řešní nehomogenní LDE. *Součet libovolného partikulárního řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice a obecného řešení asociované homogenní rovnice je obecným řešením původní nehomogenní rovnice*

Následující věta udává jednu z metod nalezení partikulárního řešení, pokud je diferenciální rovnice do jisté míry speciální: má konstantní koeficienty a polynomiální pravou stranu.

Věta (metoda neurčitých koeficientů). *Uvažujme lineární diferenciální rovnici druhého řádu*

$$y'' + py' + qy = P_n(x),$$

kde $p \in \mathbb{R}$ *je konstanta,* $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *je nenulová konstanta a* $P_n(x)$ *je polynom stupně* n*. Existuje polynom stupně* n*, který je partikulárním řešením této diferenciální rovnice.*

V praxi polynom který má být řešením napíšeme s neurčitými koeficienty a dosazením do rovnice určíme potřebné hodnoty těchto koeficientů.

Dirichletova okrajová úloha, vlastní čísla

Někdy je nutné řešit diferenciální rovnice druhého řádu s jinými než počátečními podmínkami. Ukážeme si na jednoduchém příkladě odlišnost od počáteční úlohy. Následující úloha má velké uplatnění při studiu kmitavých pohybů.

Pro parametr $\lambda \in \mathbb{R}$ najděte řešení rovnice

$$y'' + \lambda y = 0 \tag{*}$$

splňující podmínky

$$y(0) = 0 = y(1). \tag{**}$$

Definice (okrajová úloha). *Úloha najít řešení diferenciální rovnice (*), které splňuje podmínky (**) se nazývá (Dirichletova)* okrajová úloha.

Odlišnost Dirichletovy úlohy od (Cauchyovy) počáteční úlohy je v tom, že nezadáváme funkční hodnotu a derivaci v jednom bodě, ale funkční hodnotu ve dvou různých bodech.

Jedno z řešení Dirichletovy úlohy je triviální řešení $y(x) = 0$. Ukazuje se, že netriviální řešení existuje jen pro některé hodnoty parametru λ.

Definice (vlastní funkce, vlastní hodnota). *Hodnota λ, pro kterou existuje netriviální řešení Dirichletovy okrajové úlohy se nazývá* vlastní hodnota okrajové úlohy *a příslušné řešení se nazývá* vlastní funkce okrajové úlohy.

Výpočet vlastních hodnot

Je-li $\lambda > 0$, je řešením rovnice

$$y'' + \lambda y = 0 \tag{*}$$

funkce

$$y(x) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda} x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda} x).$$

Z podmínky $y(0) = 0$ dostáváme $C_2 = 0$. Tedy

$$y(x) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda} x).$$

Z podmínky $y(1) = 0$ dostáváme

$$0 = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}),$$

která je splněna pokud $C_1 = 0$, nebo $\sqrt{\lambda} = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Okrajová úloha

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0 = y(1)$$

má vlastní hodnoty $\lambda = (k\pi)^2$, $k \in \mathbb{Z}$

Kmity struny

Při kmitání struny délky l upevněné na koncích se ukazuje, že proces je možno modelovat okrajovou úlohou

$$y'' + \lambda^2 y = 0, y(0) = 0 = y(l).$$

Rovnice má obecné řešení

$$y(x) = C_1 \sin(\lambda x) + C_2 \cos(\lambda x)$$

Z podmínky $y(0) = 0$ dostáváme $C_2 = 0$ a z podmínky $y(l) = 0$ dostáváme

$$y(x) = C_1 \sin(\lambda x)$$

pokud

$$\lambda l = k\pi \qquad (***)$$

a $y = 0$ jinak. Při podrobnějším popisu (jedna ze závěrečných přednášek semestru) se ukazuje, že λ souvisí s hmotností struny, napětím ve struně a frekvencí, kterou slyšíme. Podmínka (***) určuje spektrum slyšitelných frekvencí, na kterých může struna kmitat, výsledný pohyb (a zvuk) je složením jednotlivých variant.

Neumannova a smíšená okrajová úloha

Při řešení Dirichletovy úlohy hledáme řešení diferenciální rovnice druhého řádu s předepsanými hodnotami ve dvou různých bodech

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta.$$

Tento požadavek se uplatní při studiu kmitů struny nebo tyče s pevnými konci.

V praxi je možné si představit i jiné podmínky. Například v termodynamice se používají podmínky na hodnotu derivací ve dvou různých bodech

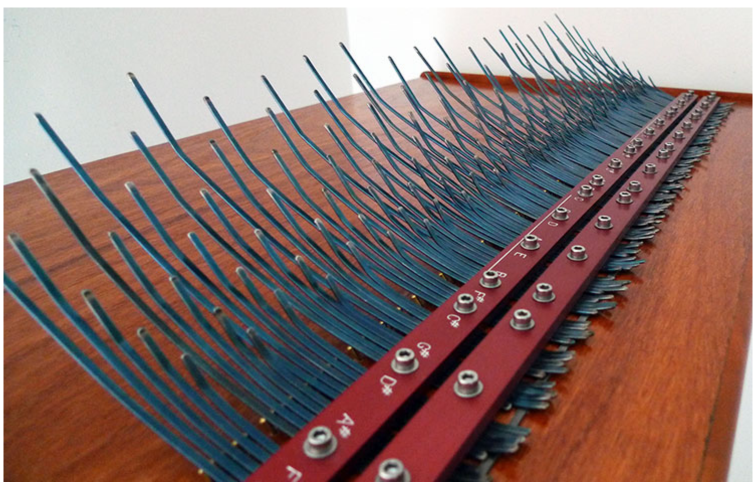
$$y'(a) = \alpha, \quad y'(b) = \beta.$$

Takové podmínky se nazývají Neumannovy podmínky a úloha najít řešení rovnice, které tyto podmínky splňuje se nazývá **Neummannova okrajová úloha**, též **Neumannova úloha**.

Existují i smíšené úlohy, například při kmitání tělesa s jedním upevněným a jedním volným koncem je přirozené formulovat **smíšenou okrajovou podmínku**

$$y(a) = 0, \quad y'(b) = 0,$$

kde a je upevněný konec a b volný konec.



Obrázek 1: Array mbira - hudební nástroj se smíšenou okrajovou úlohou

Rovnice matematické fyziky

Robert Mařík

jaro 2014

Tento text je tištěnou verzí prezentací dostupných z http://user.mendelu.cz/marik/am.

V této podkapitole se seznámíme se základními diferenciálními rovnicemi používanými v matematické fyzice. Jedná se o rovnice zachycující matematicky děje okolo nás. Protože se bude jednat o rovnice, kde neznámé jsou funkce více proměnných a v rovnicích vystupují i derivace těchto funkcí, patří tyto rovnice do kategorie parciálních diferenciálních rovnic.parciální diferenciální rovnice Naprostá většina fyzikálních zákonů a procesů je matematicky formulována právě pomocí parciálních diferenciálních rovnic nebo jejich integrálních ekvivalentů a vztahy, které známe například ze střední školy, jsou aproximacemi řešení těchto rovnic. Tyto rovnice můžeme uvažovat v jedné dimenzi (například šíření tepla nebo kmitů v tyči), ve dvou dimenzích (šíření tepla v desce, kmity membrány) nebo ve třech dimenzích (šíření tepla nebo kmitů v tělese).

Úmluva: Abychom se vyhnuli nedorozuměním v používání symbolu Δ, budeme tímto symbolem v následující kapitole vždy rozumět konečnou změnu. Laplaceův operátor budeme označovat symbolem ∇^2.

Pozorování 1: Všechny rovnice, se kterými se setkáme v této kapitole jsou lineární. Jsou tedy zachovány všechny principy, které plynou přímo z linearity. Zejména tedy libovolná lineární kombinace libovolného počtu řešení homogenní rovnice je opět řešením.

Pozorování 2: V rovnicích uvedených v následujících podkapitolách figurují vždy parciální derivace a jisté materiálové konstanty, dané povahou problému. Tyto konstanty jsou důležité z fyzikálního hlediska, při matematickém studiu je však budeme pro větší přehlednost v některých podkapitolách vynechávat (položíme je rovny jedné). Toto není na úkor obecnosti, protože číselné velikosti konstant lze měnit vhodnou volbou fyzikálních jednotek. Můžeme například délku měřit v tak obrovských jednotkách, že rychlost světla ve vakuu bude rovna jedné. Že je taková jednotka velmi nepraktická při měření prováděná v běžném životě není pro matematické studium povahy problému nijak podstatné.

0

Podpořeno projektem Průřezová inovace studijnách programů Lesnické a dřevařské fakulty MENDELU v Brně (LDF) s ohledem na discipliny společného základu (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0021) za přispění finančních prostředků EU a státního rozpočtu České republiky.

Rovnice kontinuity (bilance množství stavové veličiny)

Odvodíme rovnici kontinuity pro dvě proměnné, pro tři proměnné nebo jednu proměnnou je postup analogický. Nechť x, y jsou prostorové proměnné a t čas. Uvažujme skalární stavovou funkci $u(x,y,t)$ charakterizující stav studovaného objektu v daném bodě a čase. Například hustotu plynu v oblasti mezi dvěma rovnými deskami. Pro jednoduchost předpokládejme, že všechny veličiny jsou dostatečně hladké a použijeme poněkud neformální postup bez podrobných důkazů.

Nechť M je jednoduše souvislá oblast v rovině. Rovnice kontinuity vyjadřuje, že ke změně celkového množství veličiny u v oblasti M za jednotku času přispívá tok veličiny přes hranici ∂M (dovnitř nebo ven) a případné zdroje nebo spotřebiče uvnitř množiny M. Je-li $\vec{\varphi}(x,y,t)$ vektorová funkce popisující tok prostředí popsaného veličinou u, $\sigma(x,y,t)$ je hustota zdrojů (je-li σ kladné) a spotřebičů (je-li σ záporné), docházíme k následující bilanci pro rychlost změny celkového množství veličiny v množině M:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\overbrace{\iint_M u(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}^{\text{množství veličiny v množině } M}}_{\text{velikost změny za jednotku času}} = \underbrace{\iint_M \sigma(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}_{\text{celková vydatnost zdrojů uvnitř množiny } M} - \underbrace{\oint_{\partial M} -\varphi_2(x,y,t)\mathrm{d}x + \varphi_1(x,y,t)\mathrm{d}y}_{\text{tok přes hranici množiny } M},$$

kde $\varphi_{1,2}(x,y,t)$ jsou jednotlivé komponenty vektoru $\vec{\varphi}(x,y,z)$.

Rovnice kontinuity (integrální tvar)

Použijeme-li na rovnici

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\overbrace{\iint_M u(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}^{\text{množství veličiny v množině } M}}_{\text{velikost změny za jednotku času}} = \underbrace{\iint_M \sigma(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}_{\text{celková vydatnost zdrojů uvnitř množiny } M} - \underbrace{\oint_{\partial M} -\varphi_2(x,y,t)\mathrm{d}x + \varphi_1(x,y,t)\mathrm{d}y}_{\text{tok přes hranici množiny } M},$$

Greenovu větu, dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial t}\iint_M u(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_M \sigma(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_M \operatorname{div}\vec{\varphi}(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

Pokud se oblast M nemění v čase, je možné na levé straně přesunout časovou derivaci dovnitř integrálu a dostáváme dále rovnici zvanou *rovnice kontinuity v integrálním tvaru*

$$\iint_M \frac{\partial}{\partial t}u(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_M \Big(-\operatorname{div}\vec{\varphi}(x,y,t) + \sigma(x,y,t)\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Rovnice kontinuity (lokální tvar)

Z rovnice kontinuity v integrálním tvaru

$$\iint_M \frac{\partial}{\partial t} u(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_M \Big(-\operatorname{div}\vec{\varphi}(x,y,t) + \sigma(x,y,t)\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

plyne (protože rovnost musí platit pro každou množinu M) nutně

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div}\vec{\varphi} + \sigma,$$

neboli

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{\varphi} = \sigma,$$

což je *diferenciální tvar rovnice kontinuity*, ve kterém jsme pro stručnost vynechali explicitní vypisování nezávislých proměnných. Ve stejném tvaru rovnice platí i v lineárním případě a trojdimenzionálním případě. Z integrálního tvaru a z odvození ihned vidíme, že se vlastně jedná o rovnici vyjadřující zákon zachování veličiny u, kde člen $\frac{\partial u}{\partial t}$ vyjadřuje časovou změnu veličiny u, $\vec{\varphi}$ vyjadřuje hustotu toku veličiny u, $\operatorname{div}\vec{\varphi}$ je divergence této hustoty toku a σ je člen související s přítomností zdrojů nebo spotřebičů.

Rovnice kontinuity (speciální případy)

Speciálními případy rovnice kontinuity jsou rovnice kontinuity bez zdrojů

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{\varphi} = 0,$$

stacionární rovnice kontinuity pro popis stacionárních jevů

$$\operatorname{div}\vec{\varphi} = \sigma$$

a stacionární bezzdrojová rovnice kontinuity

$$\operatorname{div}\vec{\varphi} = 0,$$

kterou známe ze střední školy v integrálním tvaru pro ustálené proudění nestlačitelné tekutiny trubicí s proměnným průřezem:

$$Sv = \text{konst}$$

a která říká, že objem nestlačitelné tekutiny, který do trubice na jedné straně vteče je stejný jako objem, který z ní vyteče.

Difuzní rovnice (vedení tepla)

Difuzní rovnice je kombinací rovnice kontinuity a Fickova zákona, který říká, že v označení z předchozí kapitoly je směřuje vektor $\vec{\varphi}$ (difuzní tok, tj. množství veličiny u které projde elementární oblastí za jednotku času) z oblastí s vyšší koncentrací do oblastí s nižší koncentrací a velikost je úměrná gradientu veličiny u. Platí tedy

$$\vec{\varphi} = -D\nabla u,$$

kde D je tzv. difuzní koeficient. Je-li tento koeficient konstantní (nezávislý na prostorových souřadnicích a na čase), potom má difuzní rovnice vhledem k identitě

$$\operatorname{div} \vec{\varphi} = -\nabla(D\nabla u) = -D\nabla(\nabla u) = -D\nabla^2 u$$

konečný tvar

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\nabla^2 u = \sigma,$$

kde ∇^2 je Laplaceův operátor. Tuto rovnici je možno najít v literatuře pod názvem rovnice vedení tepla, protože popisuje šíření tepla v prostředí s teplotním součinitelem vodivosti D a hustotou tepelných zdrojů σ.

Difuzní rovnice (rozměrová analýza)

Odhadnout některé aspekty chování rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\nabla^2 u = \sigma$$

je možné i bez znalosti řešení této rovnice, kterou je možno vyřešit pouze v některých speciálních případech. Například z toho, že členy $\frac{\partial u}{\partial t}$ a $D\nabla^2 u$ musí mít stejné jednotky vidíme, že jednotka difuzního koeficientu D je $m^2 s^{-1}$. Proto je přirozené očekávat, že

- průměrná vzdálenost na kterou dodifunduje látka za čas t je úměrná výrazu $\sqrt{Dt}$;
- průměrný čas za který látka dodifunduje na vzdálenost d je úměrný výrazu $\frac{d^2}{D}$.

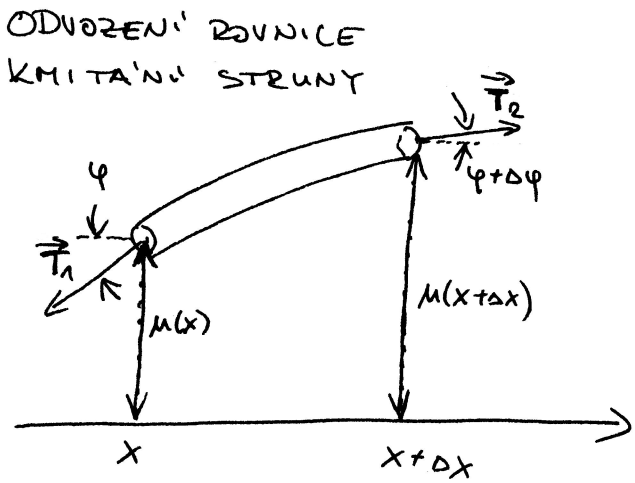
Vlnová rovnice (odvození v jedné dimenzi)

Vlnová rovnice je rovnice popisující kmity strun (v jednorozměrném případě), membrán (ve dvourozměrném případě) nebo těles (v trojrozměrném případě). Odvodíme rovnici kmitání strun. Na kmitající struně uvažujme v bodě x element o délce Δx. Výchylku z rovnovážného stavu označme u. Dále označme $\vec{\mathcal{T}}$ sílu, která v tomto bodě napíná strunu - vnitřní napětí ve struně. Tento vektor má podél struny konstantní velikost a směr se mění podle zakřivení struny. Označíme-li φ úhel mezi vektorem $\vec{\mathcal{T}}$ a vodorovným směrem, je $\tan\varphi = \frac{\partial u}{\partial x}$ (derivace je směrnice tečny). Na levý konec působí síla $\vec{\mathcal{T}}_1$, kterou pro další počítání rozložíme do vodorovného a svislého směru. Doleva působí síla o velikosti $\mathcal{T}\cos\varphi$ a dolů síla $\mathcal{T}\sin\varphi$. Podobně, na pravý konec, kde je směrnice tečny $\varphi+\Delta\varphi$ působí doprava síla $\mathcal{T}\cos(\varphi+\Delta\varphi)$ a nahoru síla $\mathcal{T}\sin(\varphi+\Delta\varphi)$. Protože se element pohybuje ve svislém směru, podle Newtonova pohybového zákona platí

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mathcal{T}\sin(\varphi+\Delta\varphi) - \mathcal{T}\sin\varphi,$$

kde m je hmotnost uvažovaného elementu. Je-li lineární specifická hmotnost struny ρ a délka elementu v rovnovážné poloze (bez deformace) je přibližně Δx, je možno vyjádřit hmotnost jako $m = \rho\Delta x$ a dostáváme po úpravě vztah

$$\frac{\rho}{\mathcal{T}}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\sin(\varphi+\Delta\varphi) - \sin\varphi}{\Delta x},$$



Pokud pravou stranu rovnice, tj.

$$\frac{\sin(\varphi+\Delta\varphi) - \sin\varphi}{\Delta x}$$

přepíšeme do tvaru

$$\frac{\sin(\varphi+\Delta\varphi) - \sin\varphi}{\Delta\varphi}\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}$$

a v limitě stáhneme velikost uvažovaného elementu k nule, dostáváme výraz známý z definice derivace

$$\frac{\partial\sin(\varphi)}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x} \quad \text{tj.} \quad \cos(\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

Potřebujeme nyní vyjádřit výraz $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$. Ze vztahu $\tan\varphi = \frac{\partial u}{\partial x}$ derivováním podle x dostáváme

$$\frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

a za předpokladu malých výchylek nahradíme v předchozích dvou vzorcích funkci kosinus její lineární aproximací v okolí nuly:

$$\begin{aligned}\cos(\varphi) &\approx \cos(0) + (\cos(\varphi))'\Big|_{\varphi=0}(\varphi - 0)\\ &= 1 + \sin(\varphi)\Big|_{\varphi=0}\varphi = 1.\end{aligned}$$

Tím se pravá strana rovnice zjednoduší na $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ a získáváme rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\mathcal{T}}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Vlnová rovnice

Rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\mathcal{T}}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

je rovnice popisující kmitavý pohyb struny. Ve vícerozměrném případě je situace obdobná, pouze na pravé straně dostaneme Laplaceův operátor a výsledná rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\mathcal{T}}{\rho}\nabla^2 u.$$

se nazývá vlnová rovnice.

Po přeznačení je možno vlnovou rovnici zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\nabla^2 u,$$

kde c je kladná konstanta.

Rovnice postupné vlny

Nechť f je libovolná dvakrát diferencovatelná funkce jedné proměnné a uvažujme jednorozměrnou vlnovou rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

a funkci dvou proměnných $u(x,t) = f(x - ct)$. Potom platí

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= f'(x-ct), &\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= f''(x-ct),\\ \frac{\partial u}{\partial t} &= -cf'(x-ct), &\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 f''(x-ct),\end{aligned}$$

odkud snadno vidíme, že funkce u je řešením vlnové rovnice Vrstevnice funkce $u(x,t)$ jsou dány rovnicí $x - ct =$ konst, což odpovídá tomu, že bod o dané výchylce se za čas Δt posune o $\Delta x = c\Delta t$. Jedná se tedy o postupnou vlnu, která se šíří rychlostí c doprava. Podobně, funkce $v(x,c) = f(x+ct)$ je řešením této rovnice, které odpovídá postupné vlně, která postupuje rychlostí c doleva.

Rovnice popisující podélné kmity kmity tyče modulu pružnosti E a hustotě ρ má stejný tvar, kde $c = \sqrt{E}\rho$ je rychlost šíření kmitů. Trojrozměrná analogie této rovnice je vhodná pro popis elastických kmitů (chvění) v tělese.

Fourierova metoda (separace proměnných)

Jedna z nejjednodušších metod řešení parciálních diferenciálních rovnic spočívá v tom, že se řešení rovnic snažíme najít v nějakém konkrétním tvaru, který nám umožní rovnici redukovat na několik rovnic jednodušších.

Uvažujme šíření tepla v tyči jednotkové délky bez vnitřních zdrojů tepelné energie, popsané diferenciální rovnicí

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Pro jednoznačný popis děje je nutno zadat počáteční teplotu $\varphi(x)$ ve všech bodech tyče a podmínky, které udávají, v jakém prostředí se tyč nachází – například teplotu konců tyče. Pro jednoduchost uvažujme homogenní okrajové podmínky $u(0,t) = 0 = u(1,t)$ a počáteční podmínku $u(x,0) = \varphi(x)$.

Řešení u budeme hledat ve tvaru funkce

$$u(x,t) = X(x)T(t),$$

kde X a T jsou funkce jedné proměnné. V tomto označení platí $\frac{\partial u}{\partial t} = X(x)T'(t)$ a $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t)$ a po dosazení do rovnice a po vydělení faktorem $X(x)T(t)$ dostaneme

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Fourierova metoda (separace proměnných, pokračování)

Protože levá strana rovnice

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

závisí pouze na t a pravá strana pouze na x, musí být obě strany rovny stejné konstantě. Tuto konstantu zapíšeme z důvodů které budou patrné později jako $-\lambda^2$. Z okrajových podmínek naložených na funkci u plyne, že funkce X musí splňovat

$$X(0) = 0 = X(1). \tag{*}$$

Funkce X a T tedy musí splňovat rovnice

$$T' = -\lambda^2 T, \quad X'' + \lambda^2 X = 0$$

a okrajovou podmínku (*).

Rovnice

$$T' = -\lambda^2 T$$

je lineární a její obecné řešení je libovolný násobek funkce $T(t) = e^{-\lambda^2 t}$.

Úloha najít funkci vyhovující rovnici

$$X'' + \lambda^2 X = 0$$

souvisí s vlastními hodnotami rovnice.

Okrajová úloha, vlastní čísla

Pro parametr λ řešme rovnici

$$X'' + \lambda^2 X = 0$$

s okrajovými podmínkami

$$X(0) = 0 = X(1).$$

Rovnice je homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu a má (podle toho jaké je řešení charakteristické rovnice) řešení buď exponenciální funkce nebo goniometrické funkce. Podrobným rozborem lze ukázat, že v případě lineární kombinace exponenciálních funkcí se nepodaří splnit podmínky a charakteristická rovnice tedy nesmí mít reálné kořeny. Proto jsme volili konstantu v separaci proměnných ve tvaru $-\lambda^2$. Nyní jsou totiž řešeními charakteristické rovnice čísla $\pm i\lambda$ a řešením rovnice je tvaru

$$X(x) = C_1 \sin(\lambda x) + C_2 \cos(\lambda x).$$

Z podmínky $X(0) = 0$ dostáváme $C_2 = 0$. Tedy

$$X(x) = C_1 \sin(\lambda x).$$

Z podmínky $X(1) = 0$ dostáváme $0 = C_1 \sin(\lambda)$. Zajímá nás pouze netriviální řešení a proto nemůžeme připustit $C_1 = 0$. Platí tedy $\sin(\lambda) = 0$, neboli $\lambda = k\pi$, kde k je přirozené číslo. Vlastní hodnoty jsou tedy tvaru

$$\lambda^2 = k^2 \pi^2$$

a uvažovaná okrajová úloha pro libovolné přirozené číslo k řešení

$$X(x) = C \sin(k^2 \pi^2 x),$$

kde C je reálná konstanta.

Fourierova metoda (separace proměnných, superpozice řešení)

Protože řešení rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

hledáme ve tvaru $u(x,t) = X(x)T(t)$, můžeme výsledky předchozích odstavců shrnout do poznatku, že pro libovolnou konstantu C_k a libovolné přirozené číslo k je funkce

$$C_k \sin(k\pi x)e^{-\lambda^2 t}.$$

Protože rovnice je lineární, je řešením i libovolná lineární kombinace těchto funkcí. Použijeme-li všechny funkce tohoto tvaru, dostáváme řešení

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin(k\pi x)e^{-\lambda^2 t},$$

Protože máme zadánu počáteční podmínku $u(x,0) = \varphi(x)$, potřebujeme najít konstanty C_k takové, že platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin(k\ \pi x) = \varphi(x).$$

Tuto úlohu budeme řešit v dalších odstavcích.

Fourierův rozvoj periodické funkce

Nekonečná řada goniometrických funkcí tvaru

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(k\ x) + b_k \sin(k\ x)\right)$$

může pro konkrétní hodnoty koeficientů a_i, b_i konvergovat k nějaké funkci $f(x)$ a za jistých podmínek je tato funkce dostatečně pěkná: je spojitá, je možno ji derivovat člen po členu apod.

Při řešení rovnic matematické fyziky řešíme opačný problém: pro zadanou funkci $f(x)$ na intervalu $[-\pi, \pi]$ chceme nalézt koeficienty a_i, b_i tak, aby na tomto intervalu platilo

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right).$$

Koeficienty Fourierova rozvoje

Ukazuje se, že tento zápis funkce f pomocí goniometrických funkcí je možný, pokud použijeme následující volbu koeficientů

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x \\ a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\mathrm{d}x \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Tyto vztahy je možno zobecnit i na jiné intervaly než $[-\pi,\pi]$ a také pro jiné funkce než goniometrické – je možné použít například systém všech vlastních funkcí okrajové úlohy. V našem případě je možné ukázat, že pokud platí

$$C_k = 2\int_0^1 \varphi(x)\sin(k\pi x)\mathrm{d}x,$$

potom na intervalu $[0,1]$ platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin(k\pi x) = \varphi(x).$$

Máme tedy koeficienty C_k, které je možno použít pro konečný zápis řešení naší úlohy.

Fourierova metoda (separace proměnných, závěr)

Řešení rovnice vedení tepla, které splňuje zadané počíteční a okrajové podmínky je

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin(k\pi x) e^{-\lambda^2 t},$$

kde

$$C_k = 2\int_0^1 \varphi(x)\sin(k\pi x)\mathrm{d}x.$$

Podobně, kmity struny jednotkové délky, popsané vlnovou rovnicí

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

s okrajovými podmínkami

$$u(0,t) = 0 = u(1,t)$$

(struna upevněná na koncích) a počátečními podmínkami

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x).$$

(počáteční poloha a rychlost všech bodů struny) jsou dány vztahem

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}(a_n\cos(k\pi t)+b_n\sin(k\pi t))\sin(k\pi x),$$

kde

$$a_k=2\int_0^1\varphi(x)\sin(k\pi x)\mathrm{d}x$$

a

$$b_k=2\int_0^1\psi(x)\cos(k\pi x)\mathrm{d}x.$$

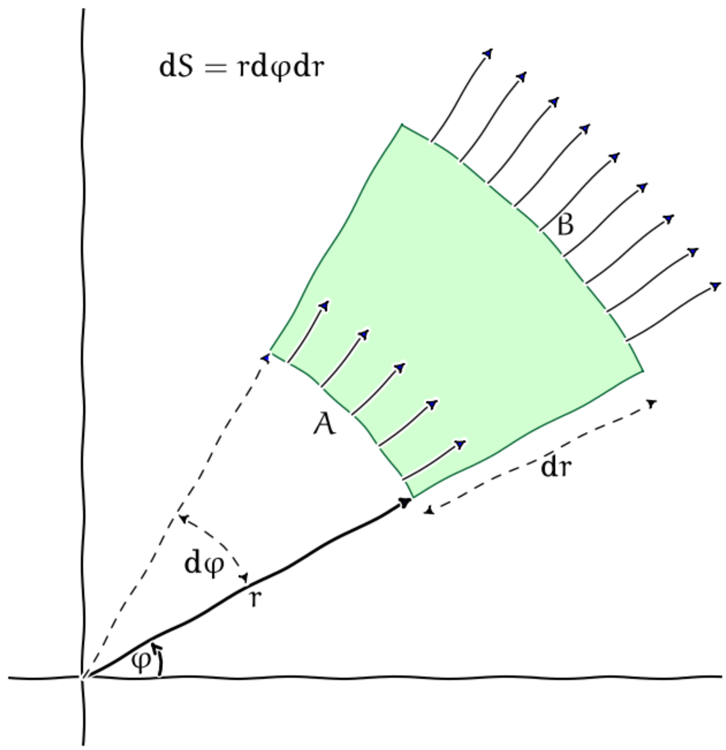
Transformace do křivočarých souřadnic, sfēricky symetrické rovnice

Polární souřadnice známe z kapitoly o dvojném integrálu, vztahují se k poloze bodu v rovině. Následující dva druhy souřadnic se vztahují k poloze bodu v trojrozměrném prostoru.

Cylindrické souřadnice jsou souřadnice v prostoru, kde proměnné x a y vyjádříme stejně jako v polárních souřadnicích a proměnnou z necháme stejnou jako v souřadnicích kartézských.

Sférické souřadnice jsou jakási analogie dobře známých zeměpisných souřadnic, používaných Rozdíl je pouze v tom, že úhel udávající zeměpisnou délku měříme v intervalu $[0,2\pi)$ (tj. nemáme analogii pro východní a západní délku) a úhel udávající zeměpisnou šířku měříme v intervalu $[0,\pi]$, kde severní pól má souřadnici 0 a jižní pól souřadnici π (rovník má souřadnici $\frac{\pi}{2}$ a nemáme analogii pro severní šířku a jižní šířku).

Difuzní rovnice v polárních souřadnicích



Zkusíme odvodit difuzní rovnici pro případ polárních souřadnic. Pro jednoduchost uvažujme, že problém je radiálně symetrický – tj. že všechny hodnoty závisí jenom na vzdálenosti od počátku. Zejména tedy, počítáme-li tok elementární ploškou na obrázku, je nenulový tok pouze na stranách A a B. Tok oběma bočními stranami je nulový. Pro zjednodušení napíšeme bilanci přímo pro elementární plošku na obrázku.

- Obsah plošky je $r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r$, množství veličiny popsané hustotou $u(r)$ je $ur\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r$ a rychlost změny tohoto množství je $r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r\frac{\partial u}{\partial t}$.
- Je-li vydatnost zdrojů dána hustotou $\sigma(r)$, je celkové množství veličiny které vznikne v oblasti rovna $\sigma r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r$.
- Tok stranou je součinem délky strany a intenzity toku. Φ. Pro vyjádření celkového toku přes hranici musíme tok přes stranu A odečíst od toku přes stranu B a využitím definice parciální derivace dostáváme

$$\begin{aligned}
&\overbrace{\Phi(r+\mathrm{d}r)(r+\mathrm{d}r)\mathrm{d}\varphi}^{\text{tok přes } B} - \overbrace{\Phi(r)r\mathrm{d}\varphi}^{\text{tok přes } A}\\
&= \frac{\Phi(r+\mathrm{d}r)(r+\mathrm{d}r) - \Phi(r)r}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r\\
&= \frac{\partial}{\partial r}\Big(r\Phi(r)\Big)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r
\end{aligned}$$

Difuzní rovnice v polárních souřadnicích (sestavení rovnice)

- Rychlost změny množství veličiny u:

$$r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r\frac{\partial u}{\partial t}$$

- Celkové množství veličiny které vznikne v oblasti:

$$\sigma r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r$$

- Tok přes hranici:

$$\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\Phi(r)\Big)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r$$

Rovnice kontinuity a difuzní rovnice mají v polárních souřadnicích tvar, který nalezneme z celkové bilance pro elementární oblast vydělením členem $r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$ a použitím Fickova zákona $\Phi = k\frac{\partial u}{\partial r}$, tj.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\Phi(r)\Big) = \sigma$$

a

$$\frac{\partial u}{\partial t} + k\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial u}{\partial r}\Big) = \sigma.$$

Matematická výročí LS 2015

Robert Mařík

2. února 2015

Tento text je tištěnou verzí prezentací dostupných z http://user.mendelu.cz/marik/am.

Výročí významných osobností souvisejících s předmětem Aplikovaná matematika, která si připomeneme během letního semestru 2015.

Použité zdroje informací:

- wikipedia (česká, slovenská, německá, anglická),
- http://www.converter.cz/fyzici
- http://jaderka.fjfi.cvut.cz
- http://www-history.mcs.st-and.ac.uk

Týden 16.2. až 22.2. (1/2)

0

Podpořeno projektem Průřezová inovace studijnách programů Lesnické a dřevařské fakulty MENDELU v Brně (LDF) s ohledem na discipliny společného základu (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0021) za přispění finančních prostředků EU a státního rozpočtu České republiky.

Ernst Mach (18. února 1838 Brno Chrlice – 19. února 1916) byl rakouský teoretický fyzik, filozof, děkan a rektor německé části Karlovy univerzity.

Ernst Mach patří k nejvýznamnějším osobnostem vědy druhé poloviny 19. století především v oblasti experimentální fyziky. Jeho jménem je označena řada fyzikálních veličin a pojmů. Jako vědec proslul svou důkladností, precizností i manuální zručností, svým klidem a jasným, stručným a výstižným formulováním myšlenek. Jako pedagog a filozof byl autorem řady učebnic a přehledných kompendií z oblasti fyziky, stál u zrodu této vědní disciplíny v Čechách v její novodobé podobě.

Na jeho počest uděluje Akademie věd ČR *Čestnou oborovou medaili Ernsta Macha* v oboru fyzikálních věd.

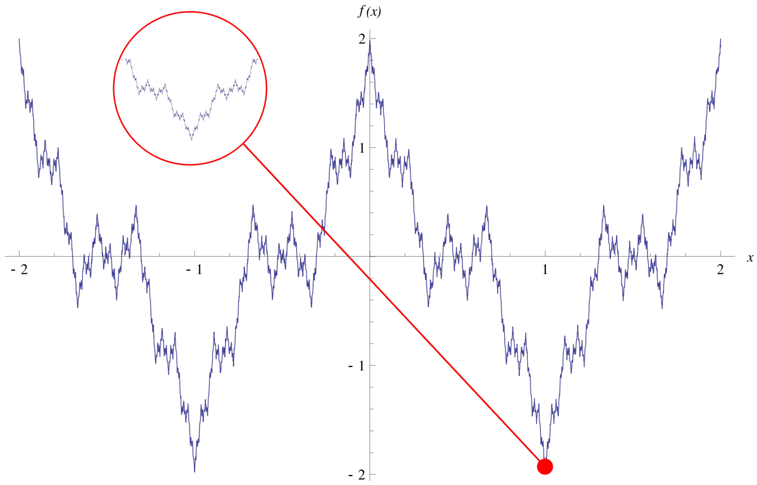
Machovo číslo je hojně užíváno v technické praxi - např. v letectví se jím jakožto poměrem rychlosti letu k rychlosti zvuku udává rychlost letu. Vyrobil zařízení, které umožňovalo fotografovat letící kulku a zároveň zviditelnit i zvukové vlny při průletu projektilu nadzvukovou rychlostí. Ukázal, že rázová vlna má tvar kužele.

Nikdo před ním ještě nevystoupil s tak ostrou kritikou Newtonových fyzikálních představ. Kritizoval zejména **absolutní prostor a čas**, nebo klasické pojetí hmotnosti. Tím inspiroval A. Einsteina. Být praotcem relativity ovšem kategoricky odmítl. K Einsteinově teorii měl dokonce zásadní výhrady.

Další Machova kritika patřila atomové hypotéze. Vývoj bohužel ukázal, že se mýlil. Podle jeho vlastních slov však „chyby jedněch lidí bývají nezřídka ve svých důsledcích plodnější než objevy druhých“.

Wikipedia

Týden 16.2. až 22.2. (2/2)



Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (31. října 1815 – 19. února 1897) byl německý matematik, často nazýván jako „otec moderní matematické analýzy“.

Weierstrass podal přesnou definici pojmu limita a spojitost, zabýval se problematikou konvergence nekonečné řady funkcí, kompaktností metrického prostoru (posloupnost racionálních čísel může konvergovat i k číslu, které není racionální).

Weierstrass udal příklad matematické funkce, která je ve všech bodech spojitá, ale v žádném bodě nemá derivaci. Její graf tedy nejde nakreslit - ani jedním tahem, ani nijak jinak. Funkce se chová jako fraktál, neboť zvětšené části grafu a původní graf jsou podobné. (Již dříve podal jiný příklad funkce s takovými vlastnostmi český matematik Bernard Bolzano, Weistrastrassova funkce však je známější než Bolzanova.)

Týden 23.2. až 1.3.

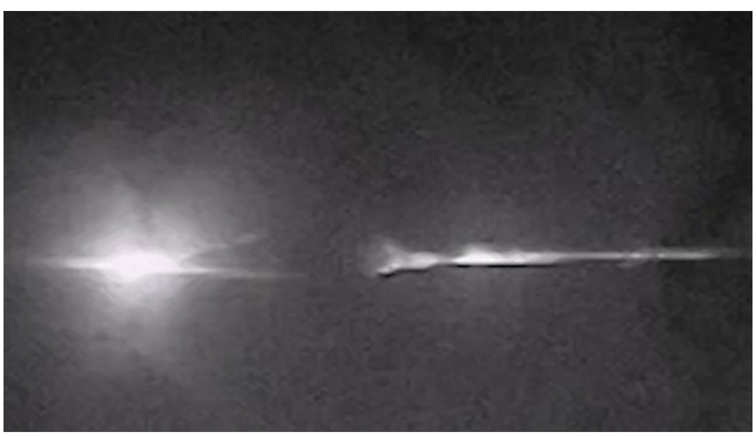
Johann Carl Friedrich Gauss (30. dubna 1777 – 23. února 1855) byl slavný německý matematik a fyzik. Zabýval se mimo jiné geometrií, matematickou analýzou, teorií čísel, astronomií, elektrostatikou, geodézií a optikou. Silně ovlivnil většinu z těchto oborů.

Svými současníky byl nazýván **kníže matematiků**. Měl spíše samotářskou povahu, nevyhledával zábavu ve společnosti, pracoval i bydlel na hvězdárně, měl málo přátel, ale vřelá přátelství. Takřka necestoval ani po Německu, vedl však velmi rozsáhlou korespondenci.

Gaussem vyvinutá metoda výpočtu eliptických oběžných drah planet mu umožnila stanovit polohu asteroidu Ceres s takovou přesností, že byl 1. ledna 1802 na nebi nalezen téměř celý rok po tom, co se ztratil teleskopům pozorovatelů. Tento úspěch se stal neuvěřitelnou senzací a učinil Gausse známým po celé Evropě jako astronoma prvního řádu v lidské historii!

Koluje spousta historek o jeho brzké genialitě a o všech se dá pochybovat. Známým příběhem je epizoda s učitelem J. G. Büttnerem na základní škole, který svým žákům zadal, aby se pokusili spočítat součet všech čísel od 1 do 100. Mladý Gauss odpověděl během chvilky, čímž udivil nejen Büttnera, ale i jeho asistenta Martina Bartelse. Gauss si uvědomil, že sečtením opačných prvků z řady čísel dostane vždy stejný výsledek: $1 + 100 = 101$, $2 + 99 = 101$, $3 + 98 = 101$, atd., což dohromady dává $50 \times 101 = 5050$.

Týden 2.3. až 8.3. (1/2)



Pierre Simon de Laplace (23. března 1749 - 5. března 1827) byl francouzský matematik, fyzik, astronom a politik. Laplace je právem považován za jednoho z největších vědců vůbec. Zanechal monumentální dílo již svým rozsahem. Zabýval se matematickou analýzou, teorií pravděpodobnosti, nebeskou mechanikou.

Laplace je také více než mnoho jiných velikánů vědy spojován se zakořeněnými pověrami a názory, které nikdy prokazatelně nehlásal. Je zejména často zcela neprávem považován za naivního propagátora představy absolutně deterministického vesmíru, analogického kolosálnímu hodinovému stroji, který by po zadání všech rovnic a počátečních podmínek všech částic ve vesmíru umožňoval absolutně přesně předvídat budoucnost. Jde však o pouhou tradovanou pověru. Laplace zastával názor právě opačný.

Nebeská mechanika

- Laplace Napoleonovi dedikoval svou knihu o nebeské mechanice. Též se vypráví, že Laplace byl Napoleonem žertem tázán, proč se ve své knize o nebeské mechanice nikde nemluví o Bohu. Laplace prý odpověděl slavnou větou: „Občane první konzule, tuto hypotézu jsem nikde nepotřeboval“.
- Jeho práce přispěly významně k tomu, že dnes umíme počítat zatmění Slunce a Měsíce (nebližší v Brně bude 20.3.2015, od 9:38:10 do 11:58:45) nebo počítat dráhy meteoritů.

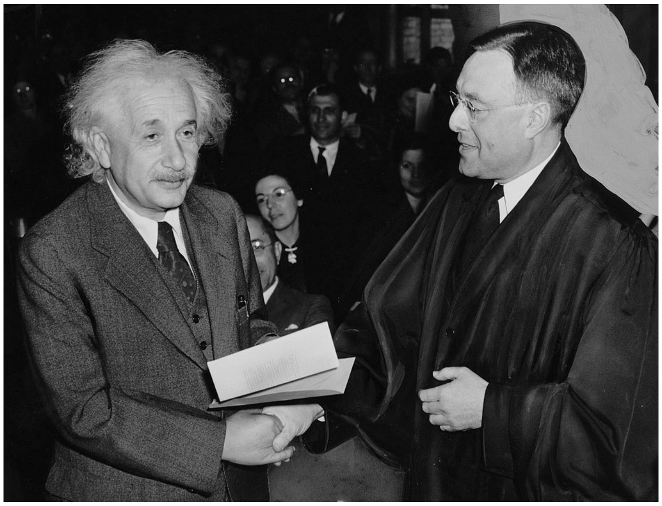
Týden 2.3. až 8.3. (2/2)

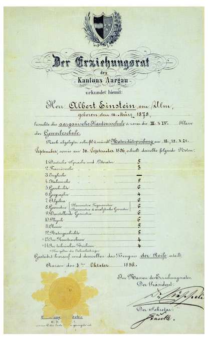
George Gamow (4. března 1904 – 20. srpna 1968) byl americký fyzik původem z Ukrajiny. Zabýval se kvantovou mechanikou, atomovou a jadernou fyzikou, astrofyzikou a kosmologií. Koncem 40.let také předpověděl, že by celý vesmír mělo rovnoměrně vyplňovat chladné mikrovlnné záření, které je pozůstatkem prvotního výbuchu. Jeho revoluční myšlenka: ,,Náš vesmír je vlastně obrovská exploze, která pokračuje dodnes!"Jako první přišel s teorií vzniku vesmíru, kterou jeho odpůrce Hoyle posměšně označil jako „velký třesk“.

George Gamow byl velkým popularizátorem moderní fyziky a vědy vůbec. V zimě roku 1938 napsal krátkou, vědecko-fantastickou povídku, v níž se pokoušel populárně vysvětlit základní myšlenky teorie zakřiveného prostoru a expandujícího vesmíru. V povídce se rozhodl zvětšit existující relativistické efekty do takové míry, aby je mohl snadno pozorovat hrdina povídky C.G.H. Tompkins, bankovní úředník zajímající se o moderní vědu (iniciály pana Tompkinse vznikly ze tří základních fyzikálních konstant – rychlosti světla c, gravitační konstanty G a Planckovy kvantové konstanty h).

Tak se v časopise Discovery objevila řada povídek o panu Tompkinsovi, v nichž byla popularizována teorie relativity a kvantová teorie. V roce 1940 vydavatelství navrhlo Gamowovi, aby články dále rozšířil o několik dalších povídek a vydal je jako knihu. Kniha vyšla pod názvem Pan Tompkins v říši divů v roce 1940. Kniha vyšla i v češtině.

Týden 9.3. až 15.3.





Der Erziehungsrat des Kantons Aargau

urkundet hiemit:

Herr Albert Einstein von Ulm,

geboren den 14. März 1879,

besuchte die aargauische Kantonsschule & zwar die III. & IV. Klasse der Gewerbeschule.

Nach abgelegter schriftl. & mündl. Maturitätsprüfung am 18., 19. & 21. September, sowie am 30. September 1896, erhielt derselbe folgende Noten:

1. Deutsche Sprache und Litteratur	5
2. Französische " "	3
3. Englische " "	—
4. Italienische " "	5
5. Geschichte	6
6. Geographie	4
7. Algebra	6
8. Geometrie (Planimetrie, Trigonometrie, Stereometrie & analytische Geometrie)	6
9. Darstellende Geometrie	6
10. Physik	6
11. Chemie	5
12. Naturgeschichte	5
*13. Im Kunstzeichnen	4
*14. Im technischen Zeichnen	4

Gestützt hierauf wird demselben das Zeugnis der Reife erteilt.

Aarau den 3ten Oktober 1896.

Im Namen des Erziehungsrates,
Der Präsident:

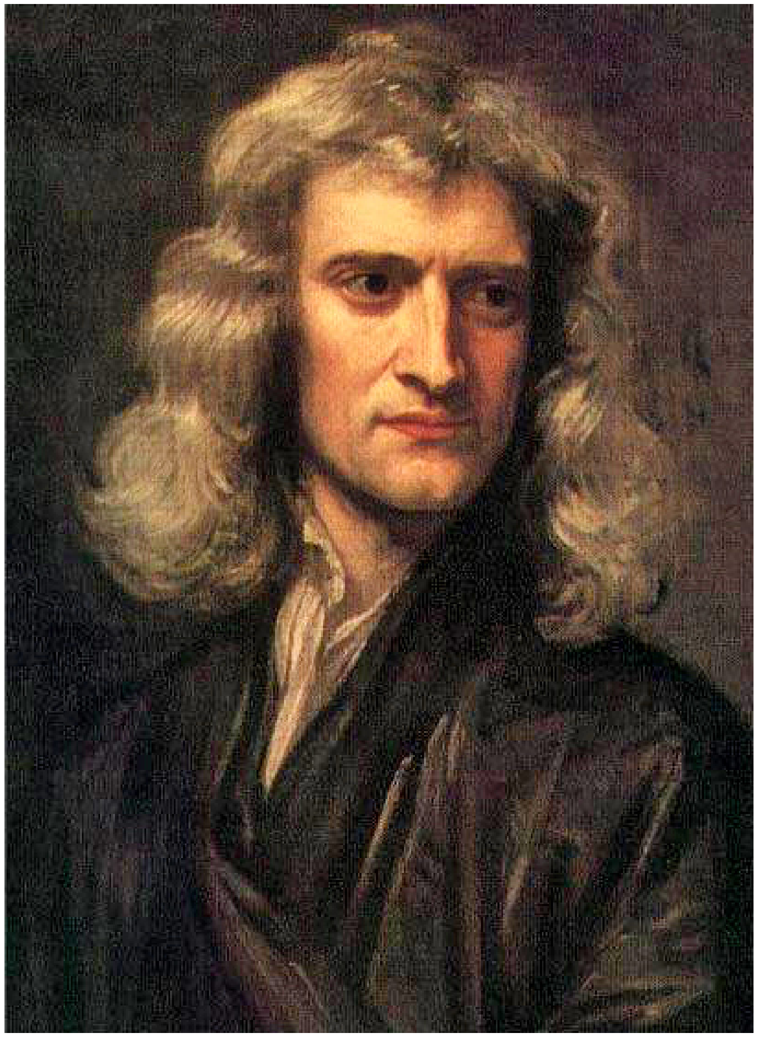
Der Sekretär:

Albert Einstein (14. 3. 1879 – 18. 4. 1955) byl teoretický fyzik, jeden z nejvýznamnějších vědců všech dob. Poté, co zformuloval obecnou teorii relativity, se stal známým po celém světě, což je pro vědce nevídaný úspěch. V pozdějších letech jeho sláva zastínila ostatní vědce a Einstein se stal synonymem pro člověka s velmi vysokou inteligencí nebo zkrátka génia.

Nobelovu cenu získal Albert Einstein v roce 1922 za objev zákona fotoelektrického jevu. I když k tomu Královská švédská akademie zároveň dodala poněkud neurčité zdůvodnění, které znělo "jako uznání za práce pro rozvoj teoretické fyziky", jeho teorie relativity, jeden z nejbrilantnějších objevů lidského ducha, nikdy Nobelovou cenou oceněna nebyla.

Jde o jednoho z mála vědců, jehož tvář je slavnější než tvář hereček či politiků. Není tedy divu, že si Einsteinovo jméno vypůjčují různé anekdoty, příběhy, legendy. Rozšířeným mýtem je, že se Einstein **nedostal na vysokou školu**. Skutečnost je taková, že se na prestižní švýcarskou vysokou školu hlásil v patnácti letech, tedy s dvouletým předstihem, což staví jeho výkon u přijímacího řízení do zcela jiného světla. Další mýtus tvrdí, že Einstein **propadal z matematiky**. I samotný Einstein se v roce 1935 pobavil, když mu kolega na Princentonské univerzitě ukázal článek v novinách: "Největší žijící matematik propadal z matematiky." Původ mýtu o propadajícím Einsteinovi je v odlišném systému známkování v tehdejší době. Einsteinovo maturitní vysvědčení totiž hodnotí výborný výsledek šestkou, zatímco jednička je známkou nejhorší. **Z matematiky, fyziky, geometrie i deskriptivní geometrie měl u maturity Einstein šestky, tedy prošel na výbornou.**

Týden 16.3. až 22.3.



Isaac Newton (25. 12. 1642 – 20.3. 1727 v Londýně) byl anglický fyzik, matematik, astronom, přírodní filosof, alchymista a teolog, jenž bývá často považován za jednu z nejvlivnějších osob v dějinách lidstva. Jeho publikace Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica, vydaná v roce 1687, položila základy klasické mechaniky a dnes bývá řazena mezi nejdůležitější knihy v historii vědy. Newton v ní popisuje zákon všeobecné gravitace a tři zákony pohybu, které se na další tři staletí staly základem vědeckého pohledu na fyzický vesmír. Newton propojil Keplerovy zákony pohybu planet s vlastní teorií gravitace a dokázal, že pohyb předmětů na Zemi se řídí stejnými pravidly jako pohyb vesmírných těles.

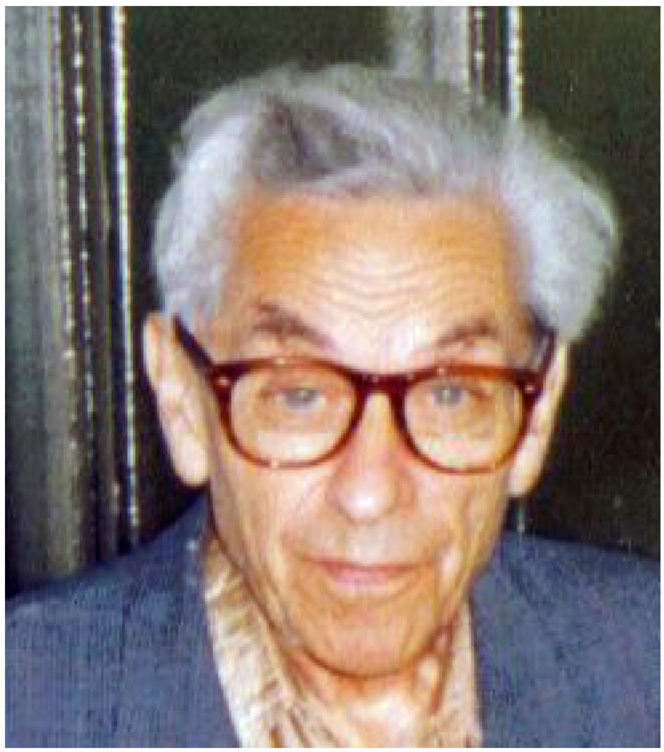
Úspěšně vedl anglickou Královskou společnost, jež se stala v jeho době nejprestižnější vědeckou institucí světa.

Druhý Newtonův zákon (zákon síly)

Jestliže na těleso působí síla, pak se těleso pohybuje se zrychlením, které je přímo úměrné působící síle a nepřímo úměrné hmotnosti tělesa.

Obecněji bývá zákon síly vyjadřován tak, že síla $\vec{F}$ je rovna časové změně hybnosti $\vec{p}$, což lze matematicky vyjádřit jako $\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$. Protože $\vec{p} = m\vec{v}$, m je v newtonovské fyzice konstantní a $\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$, dostáváme $\vec{F} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\vec{r}}$.

Týden 23.3. až 29.3.



Pál Erdős (26.března 1913 - 20.září 1996), křestní jméno někdy uváděné Paul, je jeden ze světově nejproslulejších matematiků 20. století. Proslavil se (kromě své excentričnosti a neustálých přesunů mezi různými výzkumnými institucemi po celém světě) především rozsáhlými objevy v oborech teorie grafů, kombinatorika, teorie množin a teorie pravděpodobnosti.

Paul Erdős patřil do skupiny známých maďarsko-židovských fyziků a matematiků z Budapešti. Patřili sem i Leo Szilárd, Edward Teller, John von Neumann a Eugene Paul Wigner. Jejich američtí kolegové je kvůli jakoby „nadpozemským“ schopnostem nazývali „The Martians“ (Marťani).

Většinu života strávil Erdős cestováním z místa na místo mezi matematickými konferencemi a domovy svých spolupracovníků (**My brain is open!**) Obvykle se zdržel pouze na dobu nutnou k vyřešení problému, na kterém zrovna pracoval (**We'll continue tomorrow — if I live.**) za podpory obrovského množství kávy(Alfréd Rényi: **A mathematician is a machine for turning coffee into theorems**), a přesunul se opět jinam (**Another roof, another proof.**).

Napsal 1500 článků, vetšinou se spoluautory, kterých bylo 511. Jeho způsob práce a fakt, že stovky matematiků po celém světě jsou podepsáni pod různými články a výsledky jako jeho spoluautoři, se stal nesmrtelný zavedením pojmu Erdősovo číslo. (Paul Erdős má erdősovo číslo 0, jeho spoluautoři 1, spoluautoři jeho spoluautorů 2 atd.) Existuje odhad, že 90 procent aktivních matematiků má Erdösovo číslo menší než 8.

Kvůli své naprosté nesamostatnosti nebyl snadným hostem a manželky matematiků bývaly zpravidla po těch několika dnech pečování o Paula totálně vyčerpané. Stejně tak bývali vyčerpaní i jeho kolegové, protože P. Erdös příliš mnoho nespal, časně ráno už svého hostitele budil nesnesitelným rámusem v kuchyni či koupelně a ohlašoval tím nástup k další intenzivní práci.

Vytvořil svůj speciální jazyk - "erdöštinu" - který se ujal v matematických kruzích po celém světě. Komunisté byli *people on the long wavelength*, protože červené světlo má dlouhou vlnovou délku. Také měl speciální termín pro děti a vše malé *epsilon*, pro ženy *bosses* a pro muže *slaves*, pro hudbu *noise* a pro alkohol *poison*. *Give me an epsilon of poison* byla žádost o kapku vína.

Spojovalo jej velmi silné pouto s matkou. Jeho dvě sestry totiž zemřely na spálu, když byla matka s malým Paulem v porodnici. Matka se ze ztráty nikdy nevzpamatovala a o Paula se vždy přehnaně bála. Není divu, že byl nesamostatný. Traduje se, že si až do 11 let neuměl zavázat tkaničky a že si poprvé namazal chleba máslem v Anglii na svých doktorských studiích.

Dá se říci, že P. Erdös zasvětil matematice život: neměl ženu ani děti a říkával, že majetek je na obtíž (cestoval s otrhaným kufrem naplněným sotva z třetiny a oranžovou igelitkou budapešťského obchoďáku Centrum Áruház). Vysloužil si tím přezdívku "matematický mnich".

Victor Dricks, Matematický mnich: žije jen pro čísla — Erdös je považován za největšího ve svém oboru

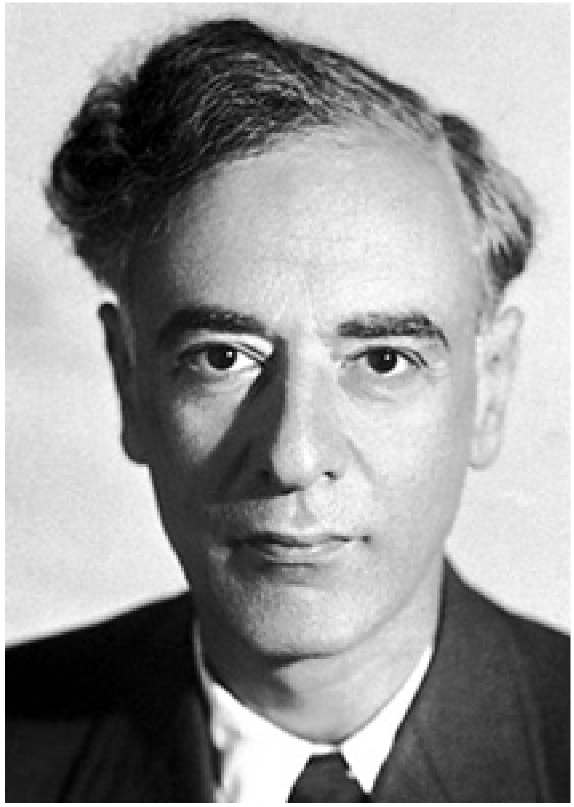
Týden 30.3. až 5.4.

Lev Davidovič Landau (22. ledna 1908 – 1. dubna 1968) byl sovětský fyzik, který přispěl k rozvoji mnoha oblastí teoretické fyziky. V roce 1962 obdržel Nobelovu cenu za fyziku za svou práci v oboru supratekutosti. Specialista na fyziku pevných látek a fyziku nízkých teplot, dále na teoretické problémy jaderné fyziky a kosmického záření.

http://21stoleti.cz/blog/2007/08/17/trpke-osudy-nositelu-nobelovych-cen/: Vztahy mezi ním a jeho studenty jsou naprosto neformální, přátelské a kolegiální. Jistě o tom svědčí i ta skutečnost, že mu říkají familiérně jen Dau. On to ví a nic nenamítá. Vlastně není o mnoho starší než oni.

http://www.techmania.cz: Lev Landau byl velmi náročným pedagogem. Mezi studenty byl pravým postrachem. Uznával pouze dvě známky – výborně a nedostatečně. Vytvořil tzv. **Landauovu bariéru**, systém deseti neobyčejně náročných zkoušek z teoretické fyziky, přičemž pravděpodobnost jejího proniknutí byla pouze v řádu procent. Za celou jeho pedagogickou činnost jí prošlo jen 43 (40. byl český fyzik Josef Kvasnica), zato vynikajících uchazečů. „**Chráním vědu před invazí blbů.**" prohlásil Landau, když vyházel téměř celý ročník u zkoušky.

Tečku za jeho nadějnou a vskutku ojedinělou kariérou velkého vědce a milého člověka udělala dopravní nehoda po níž byl na pomezí klinické smrti (zlomenina spodiny lebeční, prasklá žebra



zlomená pánev). Z celého světa se k jeho lůžku tehdy sjížděli nejlepší neurochirurgové. Všichni plni vůle a odhodlání zachránit život a navrátit zdraví jednomu z největších titánů vědy.

V nemocnici v prosinci 1962 přijal od švédského velvyslance medaili a diplom Nobelovy ceny. Poprvé byla cena předávána mimo území Švédska či Norska. Tak velká to je úcta a zároveň míra soucitu s mužem, který nemůže opustit nemocniční pokoj a přitom si doslova zaslouží světla ramp.

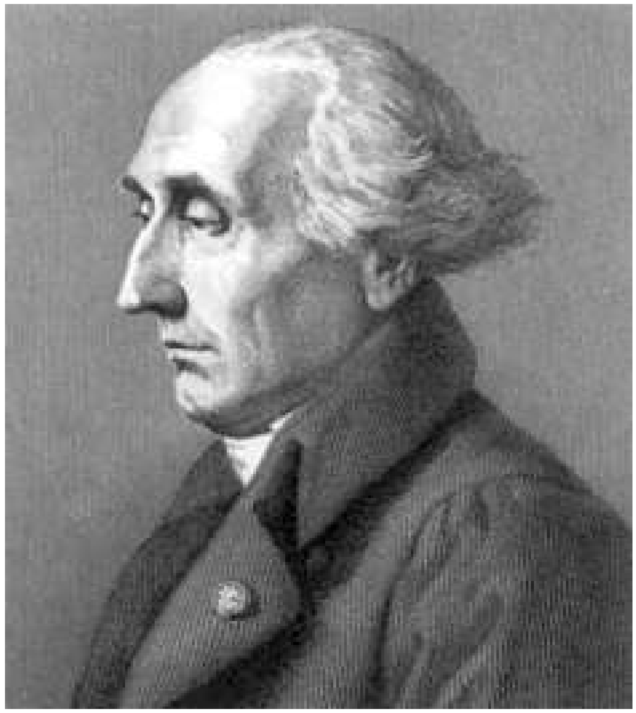
Ukázka Landauova humoru: Na vědecké konferenci, kde sovětský biolog Trofim Lysenko představoval své názory (tehdy prosazované režimem) představoval svoje názory, se ho Landau po ukončení přednášky zeptal: „Takže vy tvrdíte, že když krávě uřežeme ucho, a jejím potomkům také, dříve nebo později se začnou rodit krávy bez uší¿' „Správně," – odpověděl Lysenko. A Landau na to: „Tak mi prosím vysvětlete, proč se stále ještě rodí panny¿'

Další výročí

Stefan Banach, Rene Descartes, Bezout, John Napier,

Týden 6.4. až 12.4.

Joseph-Louis Lagrange (25. ledna 1736 – 10. dubna 1813) byl italsko-francouzský matematik a astronom, který významně rozvinul matematickou analýzu, teorii čísel, a klasickou a nebeskou mechaniku. Je zakladatelem oblasti matematiky nazývané variační počet.



Lagrangeův bod je v nebeské mechanice takový bod v soustavě dvou těles rotujících kolem společného těžiště, v němž se vyrovnávají gravitační a odstředivé síly soustavy. Dva Lagrangeovy body soustavy Slunce-Země které jsou blízko Země lze dobře využít pro umístění stacionárních družic pro pozorování vesmíru. V jednom je umístěna kosmická sonda SOHO, ve druhém kosmický dalekohled Planck a Herschelova vesmírná observatoř.

Týden 13.4. až 19.4.

Leonhard Paul Euler (15. dubna 1707 Basilej, Švýcarsko – 18. září 1783 Petrohrad, Rusko) byl švýcarský matematik a fyzik. Je považován za nejlepšího matematika 18. století a za jednoho z nejlepších matematiků vůbec. Eulerův vliv na matematiku vyjadřuje výrok připisovaný Pierru Simonu de Laplaceovi: *„Čtěte Eulera, čtěte Eulera, je to učitel nás všech.“*

Eulerovo dílo nemá v matematice obdoby. Napsal 865 prací, od jednotlivých pojednání po rozsáhlé učebnice. Jeho díla se vyznačují přesným vyjadřováním a přehlednou symbolikou - dnešní způsob značení matematických pojmů je téměř stejný jako Eulerův.

Jako první použil pojem „imaginární číslo“ pro druhou odmocninu ze záporného čísla. Zavedl například označení $f(x)$ pro funkci.

Jeho a Fermatovy práce s obrovskými prvočísly (v té době pro praktické aplikace nepoužitelné) jsou dnes základem alogritmů pro bezpečnou komunikaci na Internetu.

Během kariéry se Eulerovi zhoršil zrak, ke konci života byl téměř slepý. Jeho slepota neměla ale téměř žádný vliv na jeho produktivitu, kompenzoval ji svými počtářskými schopnostmi a fotografickou pamětí.

Další výročí

Pierre Curie (15. května 1859, Paříž, Francie – 19. dubna 1906, Paříž)

Týden 20.4. až 26.4.

Karl Ferdinand Braun, Michel Rolle, J. Robert Oppenheimer, Emilio G. Segrè, Max Planck, Max von Laue, Siméon Denis Poisson, Felix Klein,

Týden 27.4. až 4.5.

Kurt Gödel (28. dubna 1906, Brno – 14. ledna 1978, Princeton, USA) byl matematik rakouského původu, který se stal jedním z nejvýznamnějších logiků všech dob. Významné jsou i jeho příspěvky ve fyzice a ve filosofii matematiky.

V roce 1931 publikoval dvě věty o neúplnosti axiomatických formálních systémů s aritmetikou. Prostřednictvím těchto vět ukázal, že není možné navrhnout soubor axiomů, které by byly dostačující pro zodpovězení každé otázky, kterou lze klást a formulovat uvnitř formálního systému s aritmetikou. Tyto věty ukončily více než padesátileté úsilí logiků a matematiků úplně formalizovat matematiku: vždy zůstanou nedokazatelná tvrzení a navíc není možno uvnitř axiomatického systému dokázat jeho bezespornost.

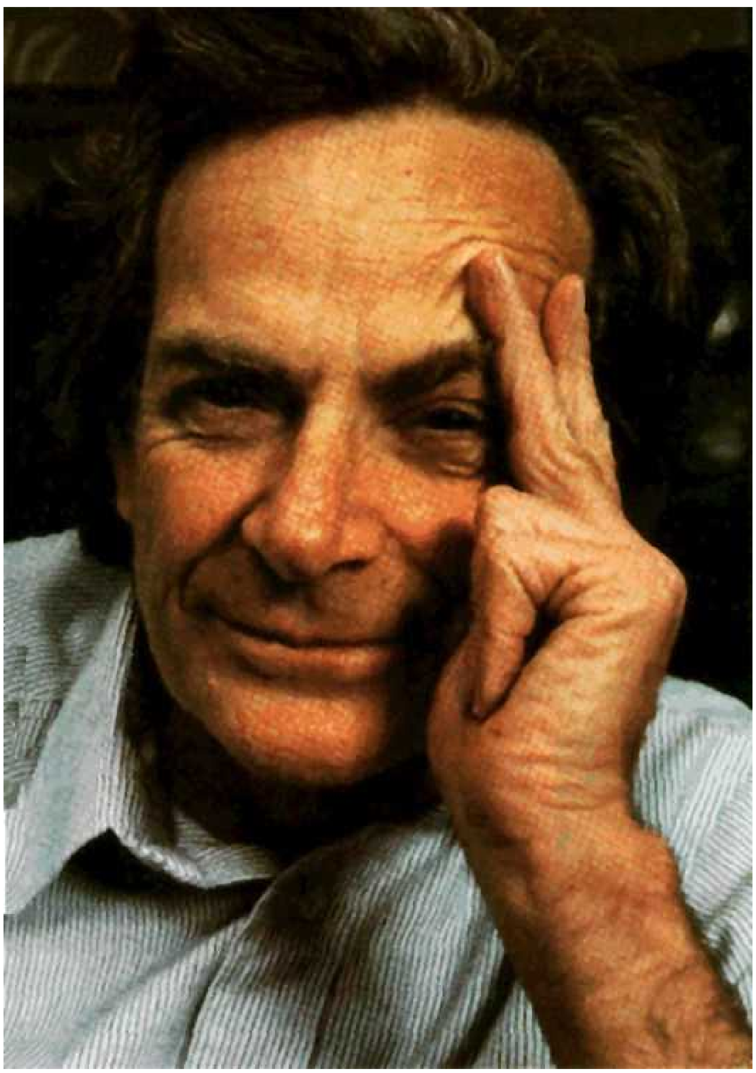
Gödelův výsledek znamenal zlom v matematice 20. století, neboť ukázal, že v principu nikdy nebude možné sestrojit počítač a program, který by zodpověděl všechny matematické otázky.

Jako docent a později profesor na Institutu pokročilých studií v Princetonu se intenzivně věnoval filosofii a pod vlivem Alberta Einsteina, svého tamějšího blízkého přítele, i fyzice. Originálním

způsobem obohatil Einsteinovu obecnou teorii relativity formulováním a nalezením kosmologického modelu rotujícího vesmíru umožňujícího cestování časem. Otevřel tak dodnes neuzavřené diskuse o tom, zda takové cestování neodporuje fyzikálním či filozofickým principům, popř. zda by mohlo být technicky realizováno.

Stal se legendou pro své objevy a vyhledávanou osobou, od níž se očekávaly další převratné výsledky. To nemělo dobrý vliv na plachého, uzavřeného a pečlivého až puntičkářského samotáře, kterým se postupně stal. Chatrné zdraví, které mu rodina připisovala, traumatizující zážitky z období nacismu i tlak na výkon člověka s pověstí génia se podepsaly na jeho psychosomatických potížích, které se stářím a odchodem vrstevníků a blízkých přátel prohlubovaly.

Týden 5.5. až 11.5.



Richard Phillips Feynman (11.5.1918 - 15.2.1988) americký fyzik, nositel Nobelovy ceny, profesor Caltechu (California Institute of Technology, prestižní americké univerzity).

Pro celé generace studentů Caltechu reprezentoval Feynman mnohem víc než symbol velkého fyzika a mimořádného učitele. Byl milovníkem žertů, vášnivým hráčem na bongo, vtipálkem, recesistou, jenž s oblibou přednášel o tom, jak otevírat zámky a dostávat se pak do sejfů.

Richard Feynman se stal legendou své doby. Přicházel na originální řešení a nové způsoby fyzikálního pohledu. Historickou se stala jeho přednáška *There's Always Room at the Bottom* (*Tam dole je spousta místa*) z roku 1959, při níž své kolegy šokoval otázkou: "Proč ještě neumíme zapsat všech dvacet čtyři svazků Encyklopedie Britanniky na špendlíkovou hlavičku?" V přednášce Feynman nastínil možnost manipulace s molekulami a atomy a poprvé přednesl vizi **nanotechnologie**. Dnes je každoročně udělována Feynmanova cena za největší přínos v tomto oboru.

Velmi úspěšná byla Feynmanova autobiografie "Surely You're Joking, Mr. Feynman!" ("To snad nemyslíte vážně!"), která se v době svého vydání v USA dostala na všechny seznamy bestsellerů. Feynman zde s laskavým humorem vzpomíná na léta, kdy studovat na MIT, na své působení v Los Alamos kde pracoval na vývoji atomové bomby a také na pozdější roky na Caltechu.

Na sklonku svého života Feynman sehrál významnou úlohu v oficiální komisi pro vyšetřování katastrofy raketoplánu Challenger. Způsob, jak v televizním vysílání názorně předvedl vliv nízkých teplot na ztrátu pružnosti těsnění nádrže raketoplánu pomocí sklenice vody s ledem, byl skvělou ukázkou jeho fenomenální schopnosti vysvětlit složité problémy co nejjednodušším způsobem a udělal z něj mediální hvězdu.

zdroje: http://www.techmania.cz, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 34 (1989)

Další výročí:

Allan McLeod Cormack, Gaspard Monge, Fresnel, Albert Abraham Michelson ("Všechny důležité fyzikální zákony a skutečnosti už jsme objevili. Jsou tak pevně dokázány, že je prakticky nemožné, aby byly nahrazeny jinými. . . Naše další objevy už budou spočívat pouze ve zpřesňování čísel někde na šestém místě za desetinnou čárkou.")

Týden 12.5. až 18.5.

Jean Baptiste Joseph Fourier (21.3.1768 – 16.5.1830) byl francouzský matematik a fyzik, který se nejvíce proslavil zkoumáním Fourierových řad a jejich aplikací k problémům toků tepla. Objevitel skleníkového efektu (1824). Fourier je jedním ze 72 významných mužů, jejichž jméno je zapsáno na Eiffelově věži v Paříži.

Použil jako první dnešní zápis určitých integrálů.

One physical contribution in the book was the concept of dimensional homogeneity in equations; i.e. an equation can be formally correct only if the dimensions match on either side of the equality; Fourier made important contributions to dimensional analysis.

Hypothyroidismus: Zúčastnil se spolu s dalšími vědci Napoleonova tažení do Egypta. Tam začal trpět extrémní citlivostí na chlad, což působí paradoxně s jeho pracemi o vedení tepla.

'began to suffer from a strange disease, whose main effect was to render him extremely sensitive to cold. . . .caused him to wrap up in many layers of heavy clothing, and live in a highly heated room from which he seldom ventured forth, even in summer heatwaves'. (Paul Strathern, Napoleon in Egypt)

Fourier had been interested in the phenomenon of heat transfer from as early as 1802. It would be anecdotal to think that his return to France's cold shores from Egypt was the cause, though from accounts of his years in Isère, it is conceivable that he had contracted myxedema in Egypt; a disease that would make life in the cold of the Jura mountains all but unbearable.

Další

Pierre François Verhulst

(28. 10. 1804 – 15.2.1849)

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor

(3. března 1845 Petrohrad, 6. ledna, 1918 Halle), byl významný německý matematik a logik. Definoval reálná čísla! Dokázal větu dnes pojmenovanou po něm, která říká, že (silně zjednodušeno) množina všech podmnožin dané množiny obsahuje více prvků než původní množina. To je celkem zřejmé pro konečné množiny, ale revolučnost této věty je v tom, že platí i pro nekonečné množiny. V konečném důsledku to znamená, že existuje více nekonečen než jedno. Dokázal větu, že počet bodů na úsečce je „stejný" jako počet bodů ve čtverci resp. v krychli jakékoli (spočetné) dimenze. Je to natolik paradoxní tvrzení, že i sám Cantor se svému důkazu podivoval a napsal Dedekindovi: Vidím to před sebou, ale nemohu tomu uvěřit.

Daniel Bernoulli

(8. 2. 1700 - 17. 3. 1782) byl v Nizozemí narozený švýcarský fyzik a matematik, zakladatel hydrodynamiky. Je jedním z členů rodiny významných švýcarských matematiků a fyziků, syn Johanna Bernoulliho. Při studiu horizontálních kmitů volně zavěšené nitě vyřešil tzv. Besselovu

diferenciální rovnici nultého řádu – jednu z prvních diferenciálních rovnic, která nemá řešení v množině elementárních funkcí (řešení se hledá například ve tvaru součtu nekonečné řady funkcí).

Norbert Wiener

(26. listopadu 1894 – 18. března 1964)

Christian Goldbach

(18.3.1690 – 20.11.1764)

Évariste Galois (25. 10. 1811 – 31. 5. 1832)