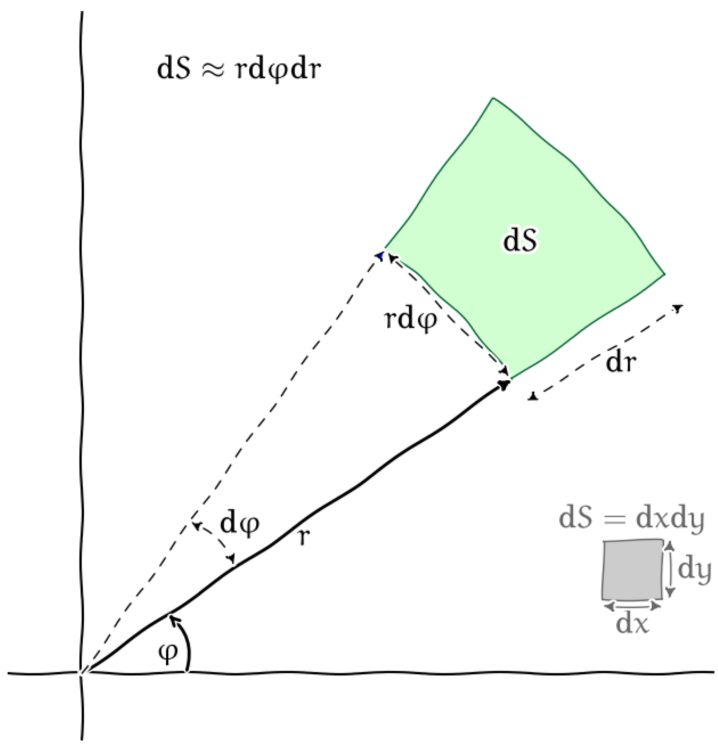
Inženýrská matematika
Ukázky a archiv závěrečných písemných prací

jaro 2015



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vytvořeno s podporou projektu Průřezová inovace studijních programů Lesnické a dřevařské fakulty MENDELU v Brně (LDF) s ohledem na disciplíny společného základu http://akademie.ldf.mendelu.cz/cz (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0021) za přispění finančních prostředků EU a státního rozpočtu České republiky.

1. [povinný] (Jerold T. Hanh [1984], Tree volume and biomass equations for the lake states.) Odhad pro objem stromu v okolí jezera Michigan je dán vztahem

$$V = b_0 + b_1 D^2 H,$$

kde V je brutto objem, D průměr v úrovni prsou, H užitková délka a b_0, b_1 empirické koeficienty. Vyjádřete D jako funkci ostatních parametrů.

---

2. [14 bodů] Uvažujme diferenciální operátor $L[y] = y' + a(x)y$.

a) Dokažte, že zadaný operátor je lineární.
b) Ukažte, jak se námi uvažovaný operátor chová vzhledem k součinu funkcí, tj. jsou-li u a v funkce, napište, čemu se rovná $L[uv]$
c) Ukažte, jak se námi uvažovaný operátor chová vzhledem k součinu kostanty a funkce, tj. jsou-li C konstanta a u funkce, napište, čemu se rovná $L[Cu]$

---

3. [6 bodů]

a) Napište, obecný tvar diferenciální rovnice se separovanými proměnnými.
b) Jak poznáme, zda rovnice $y' = f(x, y)$ je či není rovnice se separovatelnými proměnnými. Napište efektivní nutnou a postačující podmínku na funkci f, která zaručí, že uvažovaná rovnice je rovnicí se separovanými proměnnými.

---

4. [4 body] Napište definici

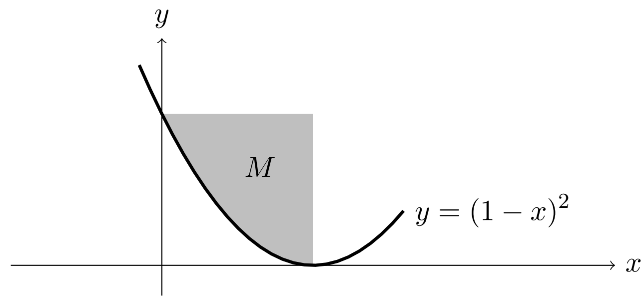
a) parciální derivace podle x,
b) parciální derivace podle y a
c) suprema množiny M.

---

5. [10 bodů] Vyřešte diferenciální rovnici $y'' + 2y' + y = x^2 - 1$.

---

6. [8 bodů] Vypočtěte dvojný integrál $\iint_M x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Množina M i funkce, která ji ohraničuje, jsou na obrázku. Případné body důležité pro výpočet integrálu si dopočítejte sami.



---

7. [4 body] Vypočtěte obě parciální derivace prvního řádu funkce $z = x\sqrt{x^2 + y^2}$

---

8. [4 body] Je dán autonomní systém

$$x' = x^2 - y$$
$$y' = x - y^2$$

a jeho stacionární bod $[1, 1]$. Určete vlastní hodnoty Jakobiho matice v tomto bodě a typ stacionárního bodu.

1. [povinný] (Vyhláška Ministerstva zemědělství č. 55/1999 Sb., o způsobu výpočtu výše újmy nebo škody způsobené na lesích 9) Škoda ze snížení přírůstu lesního porostu v důsledku okusu zvěří nebo hospodářskými zvířaty se vypočte podle vzorce

$$S = ZK\frac{N_p}{N}$$

kde S je roční škoda ze snížení přírůstu lesního porostu v důsledku okusu zvěří nebo hospodářskými zvířaty, Z je hodnota ročního přírůstu podle skupin dřevin uvedená v příloze vyhlášky, K je koeficient vyjadřující míru poškození podle stupňů poškození, jehož hodnota se určí podle přílohy, N_p je počet poškozených sazenic, maximálně však $1{,}3$ násobek minimálního počtu a N je skutečný počet jedinců, maximálně do výše $1{,}3$ násobku minimálního počtu. Pro správné stanovení a případnou opravu koeficientu K je nutno umět tento koeficient vyjádřit jako funkci ostatních proměnných. Vypočtěte ze vzorce K.

---

2. [14 bodů] Uvažujme diferenciální operátor prvního řádu $L[y] = y' + a(x)y$.

a) Dokažte, že zadaný operátor je lineární.
b) Popište, jak spolu souvisí řešení nehomogenní a asociované homogenní lineární diferenciální rovnice. Jak tuto souvislost využíváme při hledání obecného řešení LDR?
c) Ukažte, jak vlastnost popsaná v předchozím bodě vyplývá z linearity.

---

3. [6 bodů] Napište, jak poznáme zda funkce $f(x, y)$ dvou proměnných má ve svém stacionárním bodě (x_0, y_0) lokální extrém a jaký.

---

4. [4 body] Napište definici

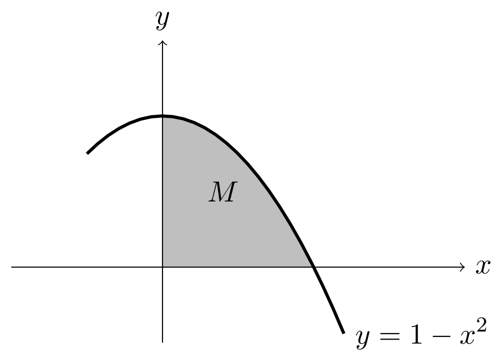
a) parciální derivace podle x,
b) parciální derivace podle y a
c) hraničního bodu množiny $M \subseteq \mathbb{R}^2$.

---

5. [8 bodů] Vyřešte diferenciální rovnici $y'' + y' + 2y = x$.

---

6. [8 bodů] Vypočtěte dvojný integrál $\iint_M x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Množina M i funkce, která ji ohraničuje, jsou na obrázku. Případné body důležité pro výpočet integrálu si dopočítejte sami.



---

7. [4 body] Vypočtěte obě parciální derivace prvního řádu funkce

$$z = x^2 \ln(x + y + 1).$$

---

8. [6 bodů] Je dán autonomní systém

$$x' = x + y^2 - 1$$
$$y' = y^2 + y - x$$

a jeho stacionární bod $S_1 = \left[\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right]$.

a) Určete vlastní hodnoty Jakobiho matice v tomto bodě a typ stacionárního bodu S_1.
b) Najděte všechny stacionární body systému (Jakobiho matici v těchto bodech již nezkoumejte).

1. [povinný] (`http://cs.wikipedia.org/wiki/Chézyho_rovnice`) Chézyho rovnice je vztahem pro výpočet rychlosti vody v otevřeném korytě

$$v = C\sqrt{Ri},$$

kde v označuje rychlost, R hydraulický poloměr, i sklon čáry energie a C je Chézyho rychlostní součinitel. Vyjádřete R jako funkci proměnných v, C a i.

---

2. [12 bodů]

a) Napište definici parciálních derivací funkce dvou proměnných $f(x, z)$ podle x a podle y.
b) Napište vzorec pro tečnou rovinu ke grafu funkce dvou proměnných $z = f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0).
c) Napište vzorec pro lineární aproximaci funkce dvou proměnných $z = f(x, y)$ v okolí bodu (x_0, y_0).
d) Zformulujte Schwarzovu větu o smíšených parciálních derivacích druhého řádu.

---

3. [4 body] Napište, jak spolu souvisí lokální extrémy funkce dvou proměnných a parciální derivace (Fermatova věta).

---

4. [8 bodů] Napište obecný tvar lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty a rozepište všechny případy, jak volíme dvě lineárně nezávislá řešení a kdy jednotlivé případy nastávají.

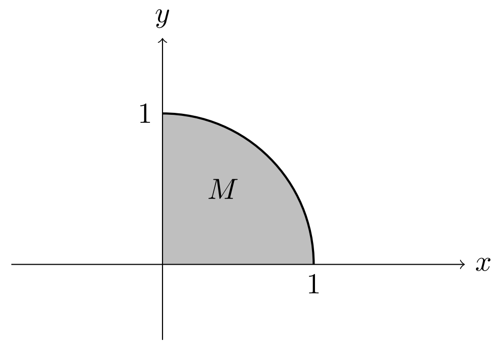
---

5. [8 bodů] Vyřešte diferenciální rovnici

$$y' + 2y = x^2 e^{-2x}.$$

---

6. [8 bodů] Vypočtěte dvojný integrál $\iint_M x \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Množina M je čtvrtina jednotkového kruhu v prvním kvadrantu (na obrázku).



---

7. [4 body] Vypočtěte obě parciální derivace prvního řádu funkce

$$z = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}.$$

---

8. [6 bodů] Je dán autonomní systém

$$\begin{aligned} x' &= x(x - y) \\ y' &= x^2 + y^2 - 8 \end{aligned}$$

a jeho stacionární bod $S_1 = [2, 2]$.

a) Určete vlastní hodnoty Jakobiho matice v tomto bodě a typ stacionárního bodu S_1.
b) Najděte všechny stacionární body systému (Jakobiho matici v těchto bodech již nezkoumejte).

1. [povinný] Objem válce o výšce 30cm je 1l. Při zachování poloměru je nutno objem válce zvětšit o 15%. Jaká musí být výška nového válce, aby měl požadovaný objem? Vzorce pro objem a povrch válce o poloměru podstavy r a výšce h jsou

$$V = \pi r^2 h \text{ a } S = 2\pi r(r + h).$$

---

2. [12 bodů]

a) Napište definici parciálních derivací funkce dvou proměnných $f(x, z)$ podle x a podle y.
b) Napište vzorec pro hesián a velmi stručně popište, při studiu jakých objektů jsme hesián používali a k čemu.
c) Napište vzorec pro Jacobiho matici a velmi stručně popište, při studiu jakých objektů jsme Jacobiho matici používali a k čemu.

---

3. [4 body] Buď A neprázdná zdola ohraničení množina reálných čísel. Definujte pojmy *dolní závora množiny* A a *infimum množiny* A.

---

4. [8 bodů] Dvojný integrál počítáme převodem na integrál dvojnásobný. Za určitých podmínek je možné jej vypočítat jednodušeji, jako součin dvou integrálů funkce jedné proměnné. Zformulujte tyto podmínky a zformulujte příslušnou větu o převodu dvojného integrálu na součin dvou integrálů funkce jedné proměnné. (Jedná se o jeden z důsledků Fubiniovy věty. Napište jenom tvrzení věty, odvození uváděné na přednášce nepište.)

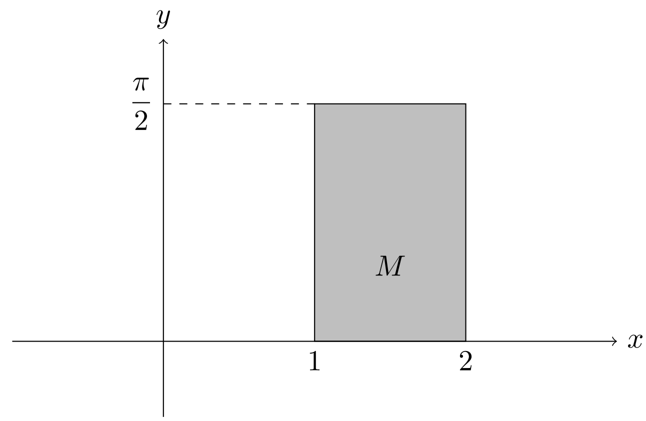
---

5. [8 bodů] Vyřešte diferenciální rovnici

$$y' + y^2 x e^x = 0.$$

---

6. [6 bodů] Vypočtěte dvojný integrál $\iint_M x \sin y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Množina M je zadána na obrázku.



---

7. [6 bodů] Najděte jeden libovolný stacionární bod funkce $z = x^2 + 2xy^2 - 2x$ a rozhodněte, zda v něm nastává lokální extréma jaký. *(Stacionární body jsou celkem tři. Stačí najít a vyšetřovat jeden libovolný z nich.)*

---

8. [6 bodů] Je dán autonomní systém

$$x' = x^2 + y^2 - 8$$
$$y' = -x^2 + y^2$$

a jeho stacionární bod $S_1 = [2, 2]$.

a) Určete typ stacionárního bodu S_1. Načrtněte tvar trajektorií typický pro okolí stacionárního bodu tohoto typu.
b) Najděte i všechny další stacionární body systému. Jejich typ nezkoumejte.

1. [povinný] Hmotnost tatranek se po zavedení nové sazby DPH zmenšila ze 40 gramů na 33 gramů. O kolik to je procent? (Numericky dopočítávat nemusíte.)

---

2. [5 bodů]

a) Napište rovnici pro tečnou rovinu ke grafu funkce $z = f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0).
b) Napište vzorec pro jeden krok velikosti h Eulerovou metodou pro počáteční úlohu $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$.

---

3. [6 bodů] Buď $L[y] = y' + a(x)y$ lineární diferenciální operátor prvního řádu. Zapište pomocí tohoto operátoru následující výroky

a) y_1 je řešením rovnice $y' + a(x)y = \sin(x)$.

b) y_2 je řešením rovnice $y' + a(x)y = 0$.

Jak musí vypadat pravá strana diferenciální rovnice, aby jedním z řešení byla

c) funkce $y_1 + 2y_2$

d) funkce $2y_1 + y_2$

---

4. [12 bodů] Vypište typy stacionárních bodů autonomních systémů a ke každému typu připojte obrázek zachycující typický tvar trajektorií a jak vypadají vlastní čísla v tomto bodě. *Pokud pro daný typ stacionárního bodu existuje stabilní a nestabilní varianta, uvažujte každou z těchto variant samostatně.*

---

5. [10 bodů] Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' + 2y' + y = 4xe^x.$$

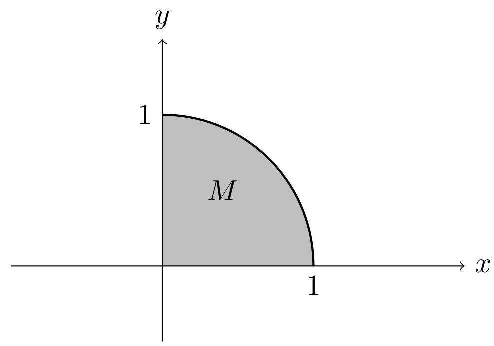
Návod: partikulární řešení hledejte ve tvaru $y_p = (ax+b)e^x$

---

6. [4 body] Vypočtěte dvojný integrál

$$\iint_M (x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Množina M je zadána na obrázku.



---

7. [8 bodů] Najděte všechny tři stacionární body funkce $z = x^2 - xy^2 + x$ a rozhodněte, zda v nich nastávají lokální extrémy a jaké.

---

8. [5 bodů] Je dán autonomní systém

$$x' = x - y$$
$$y' = -3x + y^2 + 2$$

a jeho stacionární bod $S_1 = [2, 2]$. Určete typ stacionárního bodu S_1.

1. [povinný] Maximální napětí τ ve smyku je při dimenzování nosníku dáno vzorcem

$$\tau = \frac{F_a}{\frac{\pi d^2}{4}},$$

kde F_a je síla a d jeden z rozměrů. Pro zadané F_a a τ je nutno určit d. Vyjádřete z rovnice d jako funkci proměnných F_a a τ.

---

2. [12 bodů] Buď $L[y] = y' + a(x)y$ lineární diferenciální operátor prvního řádu.

a) Dokažte, že je opravdu lineární. Tj buď dokažte, že zachovává linární kombinaci funkcí, nebo že zachovává součet funkcí a násobek konstantou.

b) Ukažte, jak z vlastností v předchozím bodě vyplývá, že násobek řešení homogenní lineární diferenciální rovnice prvního řádu ja také řešením této rovnice.

c) Ukažte, jak z vlastností v prvním bodě vyplývá, že součet řešení dané nehomogenní LDR prvního řádu a asociované homogenní rovnice je řešením uvažované nehomogenní rovnice.

---

3. [5 bodů] V některých specializovaných případech je možno zapsat dvojný integrál jako součin dvou jednoduchých integrálů. Charakterizujte tyto případy. Přesněji: napište, jak musí vypadat integrační oblast, jak musí vypadat integrovaná funkce a jak vypadá výsledný vzorec.

---

4. [10 bodů] Vyřešte diferenciální rovnici

$$y' + 2y = e^x.$$

---

5. [6 bodů] Napište

a) definici parciální derivace funkce $z = f(x, y)$ podle y,

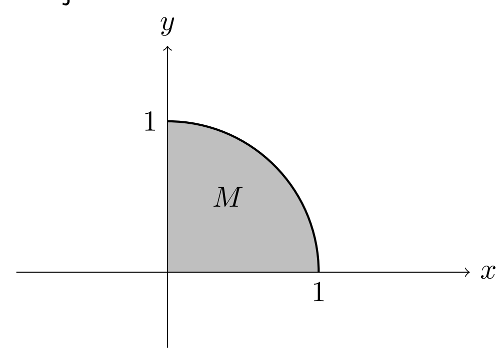
b) vzorec pro tečnou rovinu ke grafu funkce $z = f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0).

---

6. [5 bodů] Vypočtěte dvojný integrál

$$\iint_M (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Množina M je zadána na obrázku.



---

7. [7 bodů] Pro funkce $f(x, y) = 2xe^{x^2-y^2}$ a $g = \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x-1}}$ vypočtěte následující tři parciální derivace:

$$f'_x, \quad f'_y, \quad g'_y$$

---

8. [5 bodů] Je dán autonomní systém

$$x' = x^2 - y$$
$$y' = -x + 2y^2 - 1$$

a jeho stacionární bod $S_1 = [1, 1]$. Určete typ stacionárního bodu S_1.

1. [povinný] Při zkoumání proudění v otevřeném korytě se používá Froudeho číslo F, dané vzorcem

$$F = \frac{v}{\sqrt{gh}},$$

kde v, g a h jsou příslušné fyzikální veličiny nebo konstanty. Vyjádřete z této rovnice veličinu h.

---

2. [6 bodů] Buď $L[y] = y' + a(x)y$ lineární diferenciální operátor prvního řádu.
Dokažte, že je opravdu lineární. Tj buď dokažte, že zachovává linární kombinaci funkcí, nebo že zachovává součet funkcí a násobek konstantou.

---

3. [6 bodů] Napište, jak poznáme zda funkce $f(x, y)$ dvou proměnných má ve svém stacionárním bodě (x_0, y_0) lokální extrém a jaký.

---

4. [12 bodů] Napište

a) Definici parciální derivace funkce $z = f(x, y)$ podle y.
b) Vzorec pro tečnou rovinu ke grafu funkce $z = f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0).
c) Obecný tvar diferenciální rovnice se separovanými proměnnými.
d) Kritérium, které umožňuje určit, zda rovnice $y' = \varphi(x, y)$ je či není rovnicí se separovanými proměnnými.

---

5. [10 bodů] Vyřešte diferenciální rovnici

$$y' + 2xy = x.$$

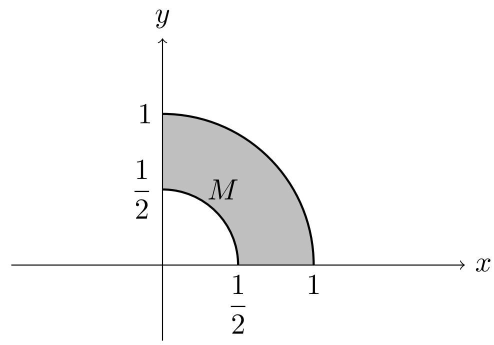
Návod: Při výpočtu využijte jeden z integrálů na dolní straně této stránky.

---

6. [5 bodů] Vypočtěte dvojný integrál

$$\iint_M x\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Množina M je zadána na obrázku.



---

7. [6 bodů] Pro funkci $f(x, y) = x^2 \ln(1 - x^2 - y^2)$ vypočtěte obě parciální derivace prvního řádu.

---

8. [5 bodů] Je dán autonomní systém

$$x' = x - y - 1$$
$$y' = x^2 - y^2 - 3$$

a jeho stacionární bod $S_1 = [2, 1]$. Určete typ stacionárního bodu S_1.

1. [povinný] (Vyhláška Ministerstva zemědělství č. 55/1999 Sb., o způsobu výpočtu výše újmy nebo škody způsobené na lesích 9) Škoda ze snížení přírůstu lesního porostu v důsledku okusu zvěří nebo hospodářskými zvířaty se vypočte podle vzorce

$$S = ZK\frac{N_p}{N}$$

kde S je roční škoda ze snížení přírůstu lesního porostu v důsledku okusu zvěří nebo hospodářskými zvířaty, Z je hodnota ročního přírůstu podle skupin dřevin uvedená v příloze vyhlášky, K je koeficient vyjadřující míru poškození podle stupňů poškození, jehož hodnota se určí podle přílohy, N_p je počet poškozených sazenic, maximálně však $1{,}3$ násobek minimálního počtu a N je skutečný počet jedinců, maximálně do výše $1{,}3$ násobku minimálního počtu. Pro správné stanovení a případnou opravu koeficientu K je nutno umět tento koeficient vyjádřit jako funkci ostatních proměnných. Vypočtěte ze vzorce K.

---

2. [14 bodů] Uvažujme diferenciální operátor prvního řádu $L[y] = y' + a(x)y$.

a) Dokažte, že zadaný operátor je lineární.
b) Popište, jak spolu souvisí řešení nehomogenní a asociované homogenní lineární diferenciální rovnice. Jak tuto souvislost využíváme při hledání obecného řešení LDR?
c) Ukažte, jak vlastnost popsaná v předchozím bodě vyplývá z linearity.

---

3. [6 bodů] Napište, jak poznáme zda funkce $f(x, y)$ dvou proměnných má ve svém stacionárním bodě (x_0, y_0) lokální extrém a jaký.

---

4. [4 body] Napište definici

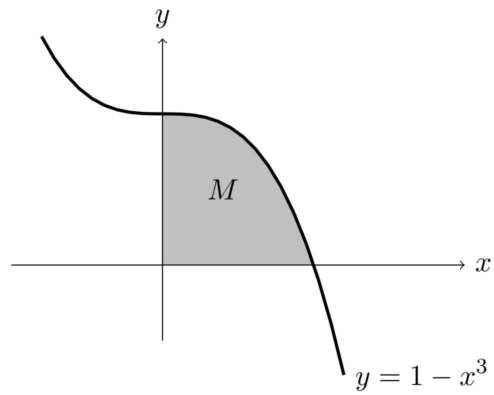
a) parciální derivace podle x,
b) parciální derivace podle y a
c) hraničního bodu množiny $M \subseteq \mathbb{R}^2$.

---

5. [8 bodů] Vyřešte diferenciální rovnici $y'' + y' + 2y = x$.

---

6. [8 bodů] Vypočtěte dvojný integrál $\iint_M x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Množina M i funkce, která ji ohraničuje, jsou na obrázku. Případné body důležité pro výpočet integrálu si dopočítejte sami.



---

7. [4 body] Vypočtěte obě parciální derivace prvního řádu funkce

$$z = x^2 \ln(x + y + 1).$$

---

8. [6 bodů] Je dán autonomní systém

$$x' = xy - 2$$
$$y' = 3x + y - 5$$

a jeho stacionární bod $S_1 = [1, 2]$.

a) Určete vlastní hodnoty Jakobiho matice v tomto bodě a typ stacionárního bodu S_1.
b) Najděte všechny stacionární body systému (Jakobiho matici v těchto bodech již nezkoumejte).

1. [povinný] Objem válce je nutno zvětšit o 20% při zachování výšky. O kolik procent (nebo kolikrát) je nutno zvětšit poloměr podstavy, abychom dosáhli potřebného objemu. Vzorce pro objem a povrch válce o poloměru podstavy r a výšce h jsou

$$V = \pi r^2 h \text{ a } S = 2\pi r(r+h).$$

---

2. [6 bodů]

a) Napište definici parciálních derivací funkce dvou proměnných $f(x, y)$ podle x a podle y.
b) Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $z = f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0).

---

3. [10 bodů] Diferenciální rovnice.

a) Definujte pojem wronskián lineární diferenciální rovnice druhého řádu a popište, k čemu se používá.
b) Trénováním znalostních testů je možné test napsat nejvýše na $y_{\max} = 200$ bodů. Karel dnes napsal test na $y(0) = 120$ bodů a začne testy trénovat. V den t napíše test na $y(t)$ bodů. Rychlost učení (tj. rychlost s jakou roste jeho bodový zisk z testů $y(t)$) je přímo úměrná hodnotě, která Karlovi chybí do maximálního možného bodového zisku a nepřímo úměrná času t (zapomínání apod.). Sestavte diferenciální rovnici modelující Karlovo učení, tj. sestavte diferenciální rovnici pro $y(t)$.

---

4. [8 bodů] Dvojný integrál počítáme převodem na integrál dvojnásobný. Za určitých podmínek je možné jej vypočítat jednodušeji, jako součin dvou integrálů funkce jedné proměnné. Zformulujte tyto podmínky a zformulujte příslušnou větu o převodu dvojného integrálu na součin dvou integrálů funkce jedné proměnné.

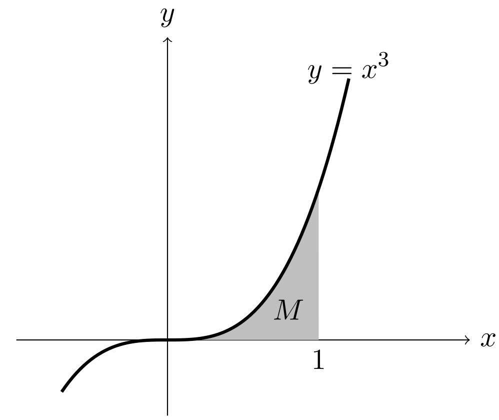
---

5. [8 bodů] Vyřešte diferenciální rovnici

$$y' + y^2 x e^{-x^2} = 0.$$

---

6. [6 bodů] Vypočtěte dvojný integrál $\iint_M xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Množina M je zadána na obrázku.



---

7. [6 bodů] Najděte všechny stracionární body funkce $z = x^3 + 6xy + y^2$ a rozhodněte, zda v nich jsou nebo nejsou lokální extrémy.

---

8. [6 bodů] Je dán autonomní systém

$$x' = -x^2 - y^2 + 8$$
$$y' = 2x - y^2$$

a jeho stacionární bod $S_1 = [2, 2]$.

a) Určete typ stacionárního bodu S_1. Načrtněte tvar trajektorií typický pro okolí stacionárního bodu tohoto typu.
b) Najděte i všechny další stacionární body systému. Jejich typ nezkoumejte.

1. [povinný] Je jedno jestli cenu výrobku zvýšíme nejprve o 10 procent původní ceny a poté o 5 procent nové ceny, nebo jestli budeme postupovat naopak, nejprve zdražíme o 5 procent původní ceny a poté o 10 procent ceny nové? Jaká bude v jednotlivých případech výsledná cena? (O kolik procent nebo kolikrát bude vyšší než původní cena?)
Návod: „O 15 procent vyšší cena." NENÍ správná odpověď. Je správná pouze přibližně. Zajímá mne přesný výsledek a jak se k němu dojde.

---

2. [12 bodů]

a) Napište definici parciálních derivací funkce dvou proměnných $f(x, z)$ podle x a podle y.
b) Napište vzorec pro tečnou rovinu ke grafu funkce dvou proměnných $z = f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0).
c) Napište vzorec pro lineární aproximaci funkce dvou proměnných $z = f(x, y)$ v okolí bodu (x_0, y_0).
d) Napište podmínku, která zaručí, že rovnicí $f(x, y) = 0$ je v okolí bodu $[x_0, y_0]$ vyhovujícího této rovnici definována *právě jedna spojitá funkce* $y = g(x)$. Napište, jak bude vypadat derivace $g'(x_0)$.

---

3. [8 bodů] Napište obecný tvar homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty a rozepište všechny případy, jak volíme dvě lineárně nezávislá řešení a kdy jednotlivé případy nastávají.

---

4. [5 bodů] Jaké podmínky musí splňovat funkce f aby počáteční úloha

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

měla

a) řešení, (Peanova věta)

b) právě jedno řešení.

---

5. [5 bodů] Určete parciální derivace podle x následujících funkcí (derivace už nemusíte upravovat)

a) $z = x^2 + y^2 \sin(x^2 + y^2)$

b) $z = \dfrac{x}{y} e^{2x}$

c) $z = \dfrac{x^4}{\sqrt{y}}$

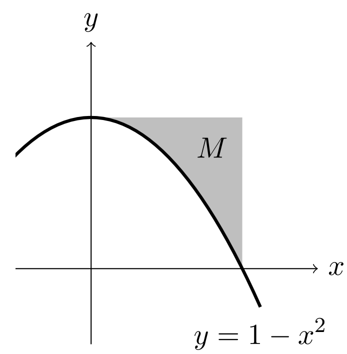
---

6. [10 bodů] Najděte obecné řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu

$$y'' - 2y' + y = x^2$$

---

7. [5 bodů] Dvojný integrál funkce $f(x, y)$ přes množinu M zapište jako dvojnásobný pro obě možná pořadí integrace.



(Průsečíky na osách si dopočítejte sami.)

---

8. [5 bodů] Je dán autonomní systém

$$x' = x - 2y + 2$$
$$y' = x^2 - y^2$$

a jeho stacionární bod $S_1 = [2, 2]$. Určete typ stacionárního bodu S_1. Načrtněte tvar trajektorií typický pro okolí stacionárního bodu tohoto typu.

1. [povinný] Ohybový moment prostého nosníku je dán vzorcem

$$M = \frac{1}{8} q L^2.$$

Vyjádřete z tohoto vzorce veličinu L (délka nosníku).

---

2. [10 bodů] Pro lineární diferenciální operátor prvního řádu $L[y] = y' + a(x)y$

a) dokažte, že je lineární,

b) jsou-li u a v diferencovatelné funkce, odvoďte vztah pro $L[u \cdot v]$.

---

3. [10 bodů]

a) Napište definici parciální derivace funkce $f(x, y)$ podle x a podle y.

b) Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $z = f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0).

c) Napište nutnou a postačující podmínku pro to, aby bylo možno diferenciální rovnici

$$y' = \varphi(x, y)$$

řešit pomocí separace proměnných, tj. aby bylo možno funkci $\varphi(x, y)$ zapsat ve tvaru $\varphi(x, y) = f(x)g(y)$.

---

4. [8 bodů] Ropná skvrna ve tvaru kruhu se na hladině šíří tak, že poloměr r roste rychlostí, která je nepřímo úměrná obsahu S. Sestavte diferenciální popisující závislost poloměru r na čase t a najděte její obecné řešení.

---

5. [5 bodů] Je dána funkce $z = x^3 + 2xy + y^2$ a její stacionární bod $\left[\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right]$. Má funkce v tomto bodě lokální extrém? Jaký?

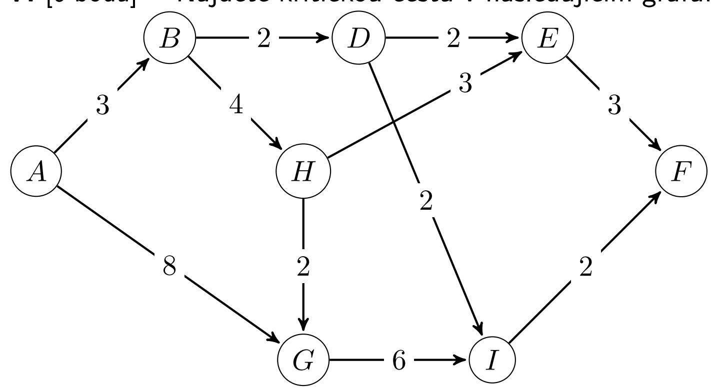
---

6. [6 bodů] Najděte obecné řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu

$$y'' + y = e^{2x}$$

---

7. [6 bodů] Najděte kritickou cestu v následujícím grafu.



---

8. [5 bodů] Je dán autonomní systém

$$\begin{aligned} x' &= x^2 + x + y - 1 \\ y' &= y^3 - x + 2 \end{aligned}$$

a jeho stacionární bod $S_1 = [1, -1]$. Určete typ stacionárního bodu S_1. Načrtněte tvar trajektorií typický pro okolí stacionárního bodu tohoto typu.

1. [povinný] Kvadratický střední průměr (QMD, quadratic mean diameter) je veličina používaná v lesnictví k charakterizaci skupiny stromů. Je dán vzorcem

$$Q = \sqrt{\frac{B}{kn}}$$

kde Q je kvadratický střední průměr, B je bazální plocha, n počet stromů a k konstanta. Vyjádřete z tohoto vzorce veličinu n.

---

2. [12 bodů]

a) Napište definici parciální derivace funkce $f(x, y)$ podle x a podle y.

b) Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $z = f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0).

c) Napište definici gradientu funkce $z = f(x, y)$ a jeho geometrický význam. (Jak souvisí s vrstevnicemi?).

d) Jaké je tvrzení Schwarzovy věty (o derivacích druhého řádu)? Předpoklady věty vypisovat nemusíte.

---

3. [8 bodů]

a) Napište obecný tvar diferenciální rovnice se *separovatelnými proměnnými*.

b) Napište obecně, jak hledáme *konstantní* řešení této rovnice.

c) Napište obecně, jak hledáme *nekonstatní* řešení této rovnice.

---

4. [5 bodů] Zformulujte Fermatovu větu (udává souvislost mezi prvními derivacemi a lokálními extrémy) pro funkci dvou proměnných.

---

5. [5 bodů] Pro funkci $z = x \ln(x^2 + y^2 + 1)$ vypočtěte parciální derivace

$$\frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{a} \quad \frac{\partial z}{\partial y}$$

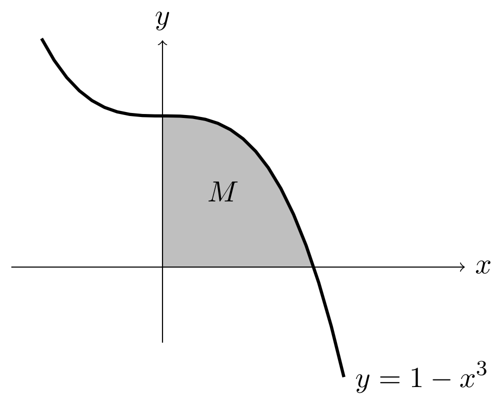
---

6. [6 bodů] Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' + 2y' - 4y = 6x$$

---

7. [9 bodů] Vypočtěte dvojný integrál $\iint_M 2y \mathrm{d}x \mathrm{d}y$. Množina M i funkce, která ji ohraničuje, jsou na obrázku. Případné body důležité pro výpočet integrálu si dopočítejte sami.



---

8. [5 bodů] Je dán autonomní systém

$$\begin{aligned} x' &= x^2 + x + y - 1 \\ y' &= y^3 - x + 2 \end{aligned}$$

a jeho stacionární bod $S_1 = [1, -1]$. Určete typ stacionárního bodu S_1. Načrtněte tvar trajektorií typický pro okolí stacionárního bodu tohoto typu.

1. [povinný] (Jerold T. Hanh [1984], Tree volume and biomass equations for the lake states.) Odhad pro objem stromu v okolí jezera Michigan je dán vztahem

$$V = b_0 + b_1 D^2 H,$$

kde V je brutto objem, D průměr v úrovni prsou, H užitková délka a b_0, b_1 empirické koeficienty. Vyjádřete D jako funkci ostatních parametrů.

---

2. [12 bodů]

a) Napište definici parciální derivace funkce $f(x, y)$ podle x.

b) Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $z = f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0).

c) Napište definici gradientu funkce $z = f(x, y)$ a jeho geometrický význam. (Jak souvisí s vrstevnicemi?).

d) Napište podmínku, která zaručí, že rovnicí $f(x, y) = 0$ je v okolí bodu $[x_0, y_0]$ vyhovujícího této rovnici implicitně definována *právě jedna spojitá funkce* $y = g(x)$.

---

3. [8 bodů] Uvažujme diferenciální operátor prvního řádu $L[y] = y' + a(x)y$.

a) Napište, co rozumíme tím když tvrdíme, že zadaný operátor je lineární. (Linearitu dokazovat nemusíte.)
b) Popište, jak spolu souvisí řešení nehomogenní a asociované homogenní lineární diferenciální rovnice.
c) Ukažte, jak vlastnost popsaná v předchozím bodě vyplývá z linearity.

---

4. [5 bodů] Zformulujte Fermatovu větu (udává souvislost mezi prvními derivacemi a lokálními extrémy) pro funkci dvou proměnných.

---

5. [6 bodů] Pro funkci $z = x^4 + y^4 - 4xy + 30$ a bod $[1, 1]$ zjistěte, zda se jedná o stacionární bod této funkce a určete, zda v tomto bodě funkce má lokální extrém a jaký.

---

6. [5 bodů] Vyřešte diferenciální rovnici

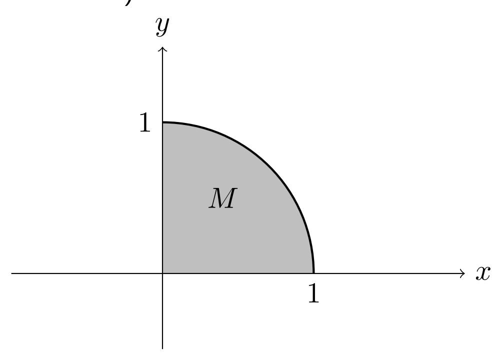
$$y'' + 2y' - 6y = 5$$

---

7. [9 bodů] Vypočtěte dvojný integrál

$$\iint_M x(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Množina M je čtvrtina jednotkového kruhu v prvním kvadrantu (na obrázku).



---

8. [5 bodů] Je dán autonomní systém

$$x' = x^2 + x + y - 1$$
$$y' = y^2 - x - y$$

a jeho stacionární bod $S_1 = [0, 1]$. Určete typ stacionárního bodu S_1. Načrtněte tvar trajektorií typický pro okolí stacionárního bodu tohoto typu.

1. [povinný] Ohybový moment prostého nosníku je dán vzorcem

$$M = \frac{1}{8}qL^2.$$

Veličina L (délka nosníku)se zmenší o 10%. O kolik procent se zmenší M.

---

2. [10 bodů] Pro lineární diferenciální operátor prvního řádu $L[y] = y' + a(x)y$

a) dokažte, že je lineární,
b) popište, jak spolu souvisí řešení rovnic

$$L[y] = 0 \quad \text{a} \quad L[u] = b(x).$$

---

3. [10 bodů]

a) Napište definici parciální derivace funkce $f(x, y)$ podle x a podle y.
b) Napište definici gradientu a divergence. U funkcí

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^3, \quad \vec{F}(x, y) = (x^2 + y, 2x + y^3)$$

vypočtěte gradient a divergenci ve všech případech, kdy je tato operace definována.
c) Napište nutnou a postačující podmínku pro to, aby bylo možno diferenciální rovnici

$$y' = \varphi(x, y)$$

řešit pomocí separace proměnných, tj. aby bylo možno funkci $\varphi(x, y)$ zapsat ve tvaru $\varphi(x, y) = f(x)g(y)$.

---

4. [5 bodů] Je dána funkce $z = x^3 + 2xy + y^2$ a její stacionární bod $\left[\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right]$. Má funkce v tomto bodě lokální extrém? Jaký?

---

5. [8 bodů] Dvojný integrál počítáme převodem na integrál dvojnásobný. Za určitých podmínek je možné jej vypočítat jednodušeji, jako součin dvou integrálů funkce jedné proměnné. Zformulujte tyto podmínky a zformulujte příslušnou větu o převodu dvojného integrálu na součin dvou integrálů funkce jedné proměnné.

---

6. [6 bodů] Najděte obecné řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice

$$y' + \frac{2}{x}y = \sqrt{x}$$

---

7. [6 bodů] Na druhé straně papíru je nareslen graf a začátek řešení, kdy pomocí Dijkstrova algoritmu hledáme v grafu délku nejkratší cesty z A do Z.

- Vysvětlete stručně a heslovitě, ale dostatečně podrobně, jak budou vypadat další dva kroky tohoto algoritmu (jak budou vynikat další dva řádky tabulky)
- Napište délku nejkratší cesty. (Nemusíte pracovat Dijkstrovým algoritmem až do konce. V případě jednoduchého grafu v zadání je možno najít výsledek prostým okem.)

---

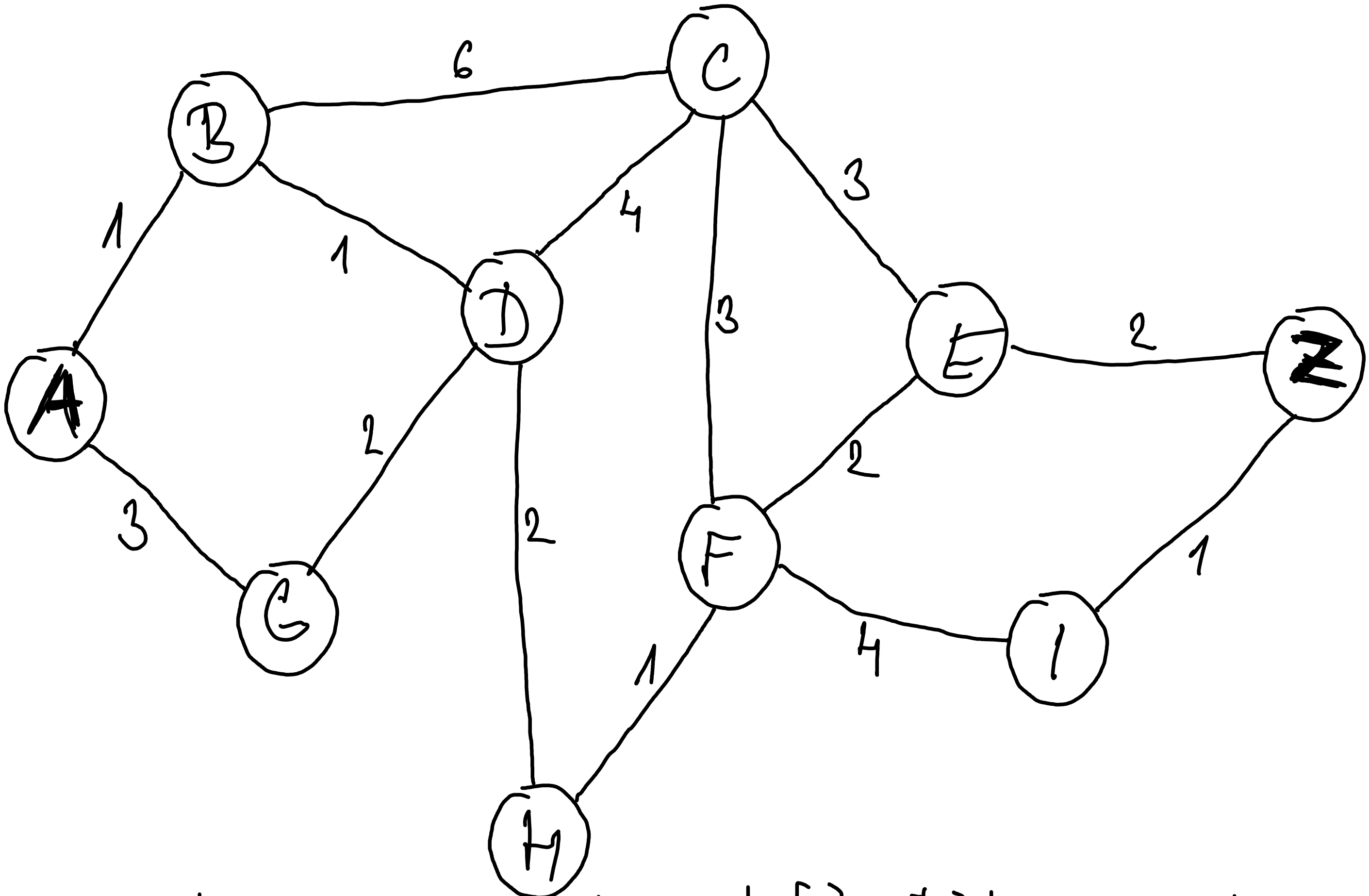
8. [5 bodů] Je dán autonomní systém

$$x' = x + y^3 - 1$$
$$y' = x(y + 1)$$

a jeho stacionární bod $S_1 = [2, -1]$.

a) Určete typ stacionárního bodu S_1.
b) Načrtněte tvar trajektorií typický pro okolí stacionárního bodu tohoto typu.
c) Najděte další stacionární body, jejich typ už neurčujte.

Délka nejkratší cesty z bodu A do bodu Z - popište stručně ale výstižně další 2 kroky Dijkstrova algoritmu (jak dostaneme další dva řádky). Jak dlouhá je nejkratší cesta z bodu A do bodu Z?



zpracované	d[A]	d[B]	d[C]	d[D]	d[E]	d[F]	d[G]	d[H]	d[I]	d[Z]
$\emptyset$	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
{A}		1	∞	∞	∞	∞	3	∞	∞	∞
{A,B}			7	2	∞	∞	3	∞	∞	∞

1. [povinný] Průhyb police lze vypočítat ze vzorce

$$x = k\frac{ql^4}{EJ},$$

kde jenotlivé proměnné označují geoemtrické nebo fyzikální charakteristiky. Vypočtěte odsud l jako funkci zbylých proměnných a parametrů.

---

2. [10 bodů] Stacionární bod. Pojem stacionární bod jsme používali ve dvou různých kontextech.

a) Definujte pojem *stacionární bod* funkce $f(x,y)$ a napište, jak souvisí s lokálními extrémy (zformulujte Fermatovu větu).

b) Definujte pojem *stacionární bod* autonomního systému

$$\begin{aligned} x' &= f(x,y) \\ y' &= g(x,y) \end{aligned}$$

a napište, jak souvisí s trajektoriemi autonomního systému.

---

3. [10 bodů] Parciální derivace.

a) Napište definici parciální derivace funkce $f(x,y)$ podle x a podle y.

b) Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $z = f(x,y)$ v bodě (x_0, y_0).

c) Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $z = x^2 + \dfrac{x}{y}$ v bodě $(1,2)$.

d) Napište nutnou a postačující podmínku pro to, aby bylo možno diferenciální rovnici

$$y' = \varphi(x,y)$$

řešit pomocí separace proměnných, tj. aby bylo možno funkci $\varphi(x,y)$ zapsat ve tvaru $\varphi(x,y) = f(x)g(y)$.

---

4. [5 bodů] Vyřešte rovnici

$$y'' - 4y = x^2 + 1$$

---

5. [8 bodů] Popište stručně alespoň jednu z numerických metod sloužících pro řešení počáteční úlohy

$$y' = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0$$

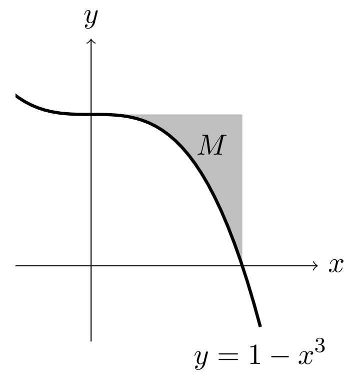
s krokem h.

---

6. [6 bodů] Dvojný integrál

$$\iint_M x \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

zapište jako dvojnásobný pro obě možná pořadí integrace. Vyberte si jednu z možností a dopočítejte integrál do konce.



(Průsečíky na osách si dopočítejte sami.)

---

7. [6 bodů] Na druhé straně papíru je nareslen graf pro hledání kritické cesty. Nalezněte tuto cestu.

---

8. [5 bodů] Je dán autonomní systém

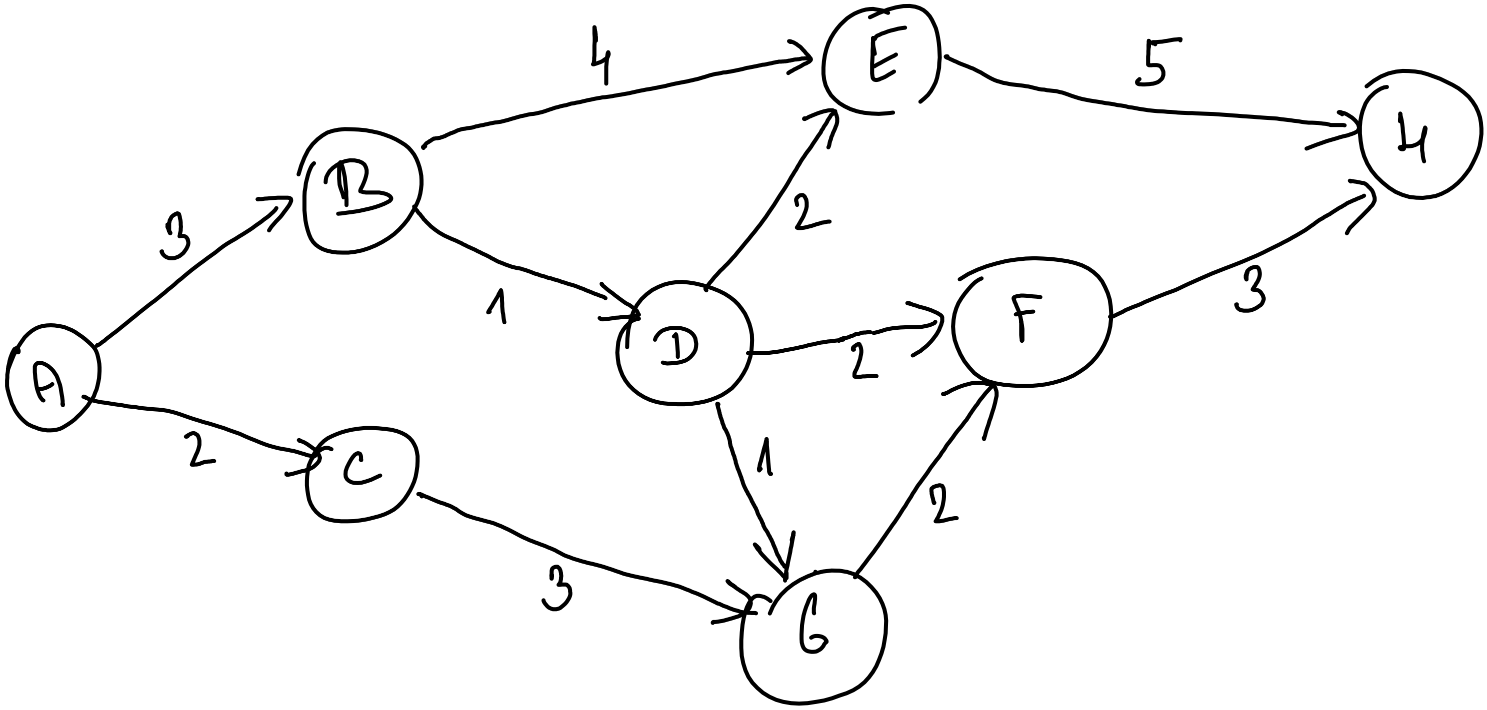
$$\begin{aligned} x' &= 5 - x - y^2 \\ y' &= 3 + x - y^2 \end{aligned}$$

a jeho stacionární bod $S_1 = [1,2]$.

a) Určete typ stacionárního bodu S_1.

b) Načrtněte tvar trajektorií typický pro okolí stacionárního bodu tohoto typu.

c) Najděte další stacionární body, jejich typ už neurčujte.


A
B
C
D
E
F
G
H
3
2
4
1
3
2
2
1
5
3
2

1. [povinný] Maximální napětí τ ve smyku je při dimenzování nosníku dáno vzorcem

$$\tau = \frac{4F_a}{\pi d^2},$$

kde F_a je síla a d jeden z rozměrů. Pro zadané F_a a τ je nutno určit d. Vyjádřete z rovnice d jako funkci proměnných F_a a τ.

---

2. [12 bodů] Buď $L[y] = y' + a(x)y$ lineární diferenciální operátor prvního řádu.

a) Dokažte, že je opravdu lineární. Tj buď dokažte, že zachovává linární kombinaci funkcí, nebo že zachovává součet funkcí a násobek konstantou.

b) Ukažte, jak z vlastností v předchozím bodě vyplývá, že násobek řešení homogenní lineární diferenciální rovnice prvního řádu ja také řešením této rovnice.

c) Ukažte, jak z vlastností v prvním bodě vyplývá, že součet řešení dané nehomogenní LDR prvního řádu a asociované homogenní rovnice je řešením uvažované nehomogenní rovnice.

---

3. [5 bodů] V některých specializovaných případech je možno zapsat dvojný integrál jako součin dvou jednoduchých integrálů. Charakterizujte tyto případy. Přesněji: napište, jak musí vypadat integrační oblast, jak musí vypadat integrovaná funkce a jak vypadá výsledný vzorec.

---

4. [10 bodů] Vyřešte diferenciální rovnici

$$y' - \frac{1}{x}y = 1.$$

---

5. [6 bodů] Napište

a) definici parciální derivace funkce $z = f(x, y)$ podle y,

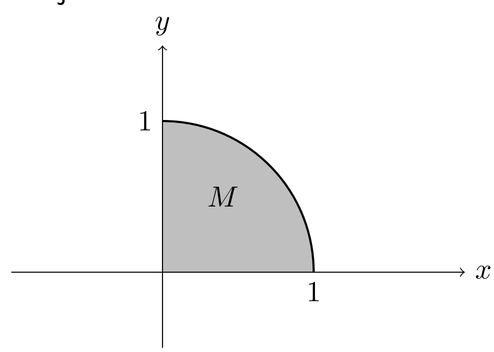
b) vzorec pro tečnou rovinu ke grafu funkce $z = f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0).

---

6. [5 bodů] Vypočtěte dvojný integrál

$$\iint_M (x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Množina M je zadána na obrázku.



---

7. [7 bodů] Pro funkce $f(x, y) = 2xe^{x^2-y^2}$ a $g(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x-1}}$ vypočtěte následující tři parciální derivace:

$$f'_x, \quad f'_y, \quad g'_y$$

---

8. [5 bodů] Je dán autonomní systém

$$x' = 1 - \frac{y}{x}$$
$$y' = 1 - \frac{y^2}{x}$$

a jeho stacionární bod $S_1 = [1, 1]$. Určete typ stacionárního bodu S_1 a nakreslete jak typicky vypadají trajektotie v okolí bodu takového typu.

1. [povinný] Hmotnost tatranek se po zavedení nové sazby DPH zmenšila ze 40 gramů na 33 gramů. O kolik to je procent? (Numericky dopočítávat nemusíte.)

---

2. [7 bodů]

a) Napište rovnici pro tečnou rovinu ke grafu funkce $z = f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0).

b) Napište (použitím parciálních derivací prvního a druhého řádu) postačující podmínku pro to, aby funkce $f(x, y)$ měla v bodě (x_0, y_0) lokální minimum.

---

3. [7 bodů] Buď $L[y] = y' + a(x)y$ lineární diferenciální operátor prvního řádu a $y_{1,2}$ diferencovatelné funkce. Zapište pomocí tohoto operátoru následující výroky

a) y_1 je řešením rovnice $y' + a(x)y = \sin(x)$.

b) y_2 je řešením rovnice $y' + a(x)y = 0$.

Jak musí vypadat pravá strana diferenciální rovnice uvažované v krocích a) a b), aby jedním z řešení byla

c) funkce $y_1 + 3y_2$

d) funkce $2y_1 - y_2$

Obě odpovědi stručně zdůvodněte.

---

4. [9 bodů] Vypište typy stacionárních bodů autonomních systémů a ke každému typu připojte informaci jak vypadají vlastní čísla v tomto bodě a obrázek zachycující typický tvar trajektorií v okolí takového bodu. *Pokud pro daný typ stacionárního bodu existuje stabilní a nestabilní varianta, uvažujte každou z těchto variant samostatně. Uvažujte jenom případy, kdy vlastní čísla mají nenulovou reálnou část.*

---

5. [9 bodů] Vyřešte diferenciální rovnici

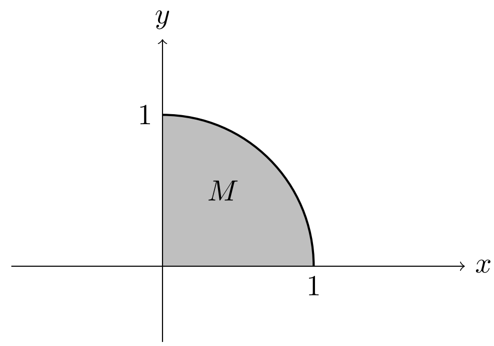
$$y'' + y' - y = x^2 + x - 1.$$

---

6. [5 bodů] Vypočtěte dvojný integrál

$$\iint_M (x^2 + y^2)x \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Množina M je zadána na obrázku.



---

7. [8 bodů] Na zadní straně je čtyřikrát namalovaný stejný graf. Znázorněte řešení každé z následujících úloh.

a) Nakreslete minimální kostru.

b) Nakreslete *jinou* minimální kostru než v bodě a)

c) Nakreslete minimální kostru s *jiným součtem hranových ohodnocení*, než v bodě a)

d) Nakreslete minimální kostru s *jiným počtem hran*, než v bodě a)

---

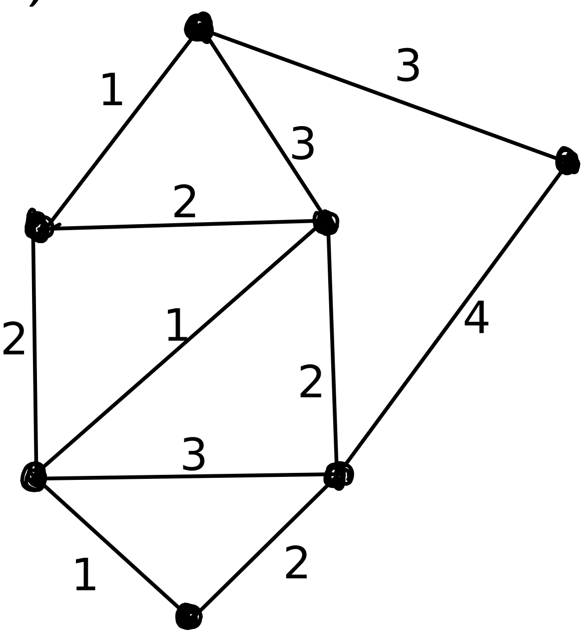
8. [5 bodů] Je dán autonomní systém

$$x' = x - y$$
$$y' = -\frac{3}{2}x^2 + y^2 + 2$$

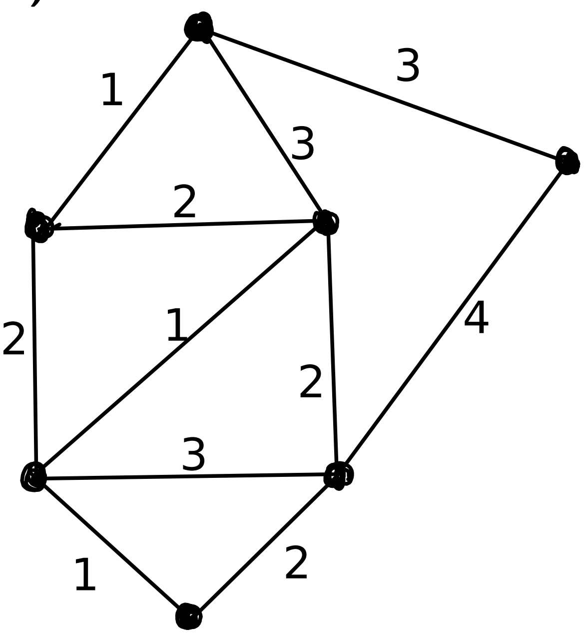
a jeho stacionární bod $S_1 = [2, 2]$. Určete typ stacionárního bodu S_1.

Vytvořeno s podporou projektu Průřezová inovace studijních programů Lesnické a dřevařské fakulty MENDELU v Brně (LDF) s ohledem na disciplíny společného základu http://akademie.ldf.mendelu.cz/cz (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0021) za přispění finančích prostředků EU a státního rozpočtu Ceské republiky.

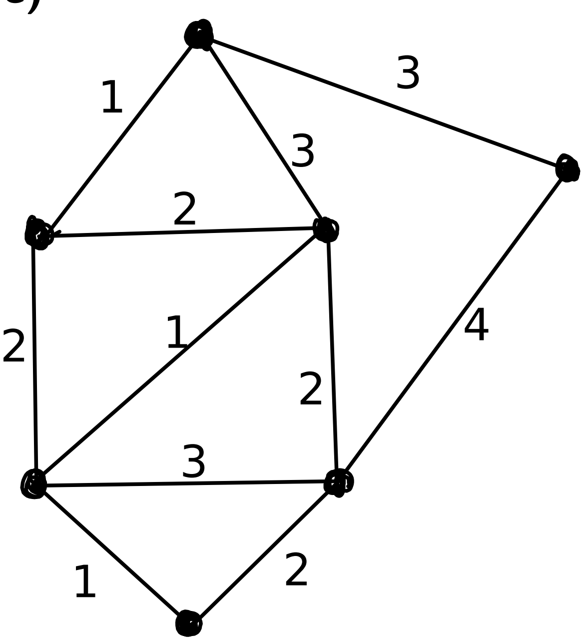
a)



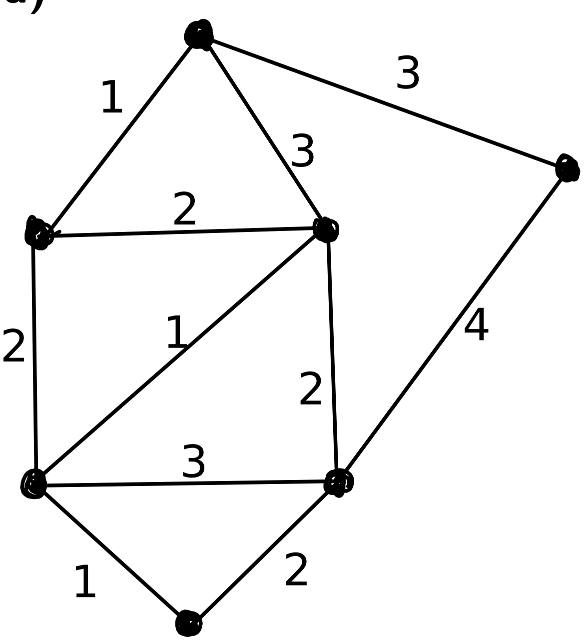
b)



c)



d)



1. [povinný] Kvadratický střední průměr (QMD, quadratic mean diameter) je veličina používaná v lesnictví k charakterizaci skupiny stromů. Je dán vzorcem

$$Q = \sqrt{\frac{B}{kn}}$$

kde Q je kvadratický střední průměr, B je bazální plocha, n počet stromů a k konstanta. Vyjádřete z tohoto vzorce veličinu B.

---

2. [12 bodů] Buď $L[y] = y' + a(x)y$ lineární diferenciální operátor prvního řádu a u, v, y_1, y_2 diferencovatelné funkce.

a) Odvoďte vztah používaný při variaci konstant, tj. ukažte že platí

$$L[uv] = vL[u] + uv'.$$

Zapište pomocí operátoru L výroky

b) y_1 je řešením rovnice $y' + a(x)y = \sin(x)$,
c) y_2 je řešením rovnice $y' + a(x)y = \cos(x)$.

Sestavte na základě těchto informací a s použitím funkcí $a(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$ diferenciální rovnici, jejímž řešením je

d) funkce $2y_1$
e) funkce $y_1 - y_2$
f) funkce $y_1.y_2$

Odpovědi stručně zdůvodněte nebo podpořte stručným výpočtem.

---

3. [8 bodů]

a) Napište obecný tvar diferenciální rovnice se *separovatelnými proměnnými*.
b) Napište obecně, jak hledáme *konstantní* řešení této rovnice.
c) Napište obecně, jak hledáme *nekonstatní* řešení této rovnice.

---

4. [5 bodů] Napište

a) definici parciální derivace funkce $f(x, y)$ podle x,
b) rovnici pro lineární aproximaci funkce $z = f(x, y)$ v okolí bodu (x_0, y_0).

---

5. [6 bodů] Pro funkci $z = x^3 + y^3 + 6xy$ a bod $[-2, -2]$ ukažte, že se jedná o stacionární bod funkce a rozhodněte, zda v tomto bodě má funkce lokální extrém a jaký.

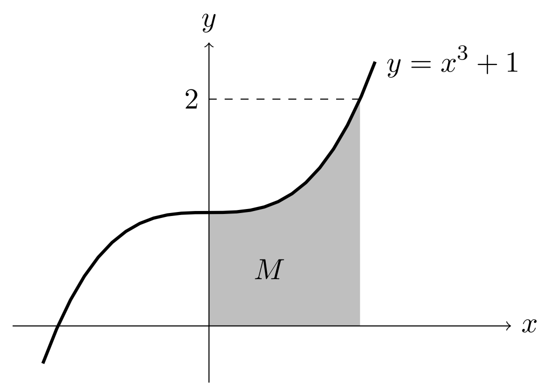
---

6. [6 bodů] Najděte obecné řešení diferenciální

$$xy' + 2y = 6x.$$

---

7. [8 bodů] Vypočtěte dvojný integrál $\iint_M 4y \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y$. Množina M i funkce, která ji ohraničuje, jsou na obrázku. Případné body důležité pro výpočet integrálu si dopočítejte sami.



---

8. [5 bodů] Je dán autonomní systém

$$x' = x^2 - \frac{1}{y} - 3$$
$$y' = x - 2y^2$$

a jeho stacionární bod $S = [2, 1]$. Dokažte, že se skutečně jedná o stacionární bod a určete typ tohoto stacionárního bodu S. Načrtněte tvar trajektorií typický pro okolí stacionárního bodu tohoto typu.