INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Určitý integrál

Základy vyšší matematiky

LDF MENDELU

Podpořeno projektem Průřezová inovace studijních programů Lesnické a dřevařské fakulty MENDELU v Brně (LDF) s ohledem na disciplíny společného základu `http://akademie.ldf.mendelu.cz/cz` (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0021) za přispění finančních prostředků EU a státního rozpočtu České republiky.

Simona Fišnarová

Brno 2012

Motivace – obsah plochy pod křivkou

Předpokládejme, že funkce f je **nezáporná a spojitá** na intervalu $\langle a, b\rangle$.

> **Jaký je obsah rovinné množiny ohraničené grafem funkce $y = f(x)$, osou x a přímkami $x = a$ a $x = b$?**

Obsah této množiny můžeme přibližně vypočítat pomocí součtu obsahů obdélníků takto:

1. Interval $\langle a, b\rangle$ rozdělíme na několik podintervalů $\to$ každý z těchto podintervalů tvoří základnu obdélníka.
2. Z každého podintervalu vybereme libovolný bod $\to$ hodnota funkce f v tomto bodě určuje výšku obdélníka.
3. Určíme obsahy všech takto získaných obdélníků a sečteme.

Výpočet bude tím přesnější, čím budou obdélníky užší (tj. základny menší) (a tedy čím větší bude počet obdélníků).

Hledaný obsah plochy je tedy roven limitě součtu obsahů těchto obdélníků, pokud se délky základen všech obdélníků blíží k nule (a počet obdélníků se blíží nekonečnu).

Takovou limitu lze definovat i pro obecnější funkce (nejen nezáporné a spojité) a nazývá se **určitý integrál**.

Konstrukce určitého integrálu

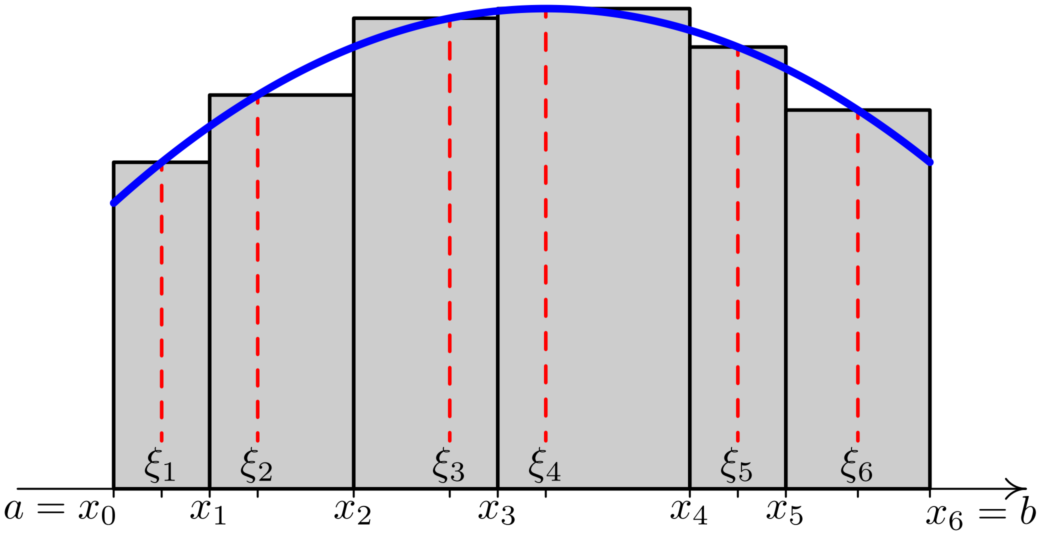
Nechť f je funkce, která je definovaná a **ohraničená** na intervalu $\langle a, b\rangle$.

- **Dělením intervalu** $\langle a, b\rangle$ (ozn. D) rozumíme množinu bodů $D = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$, pro něž platí $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. Intervaly $\langle x_0, x_1\rangle, \langle x_1, x_2\rangle, \dots, \langle x_{n-1}, x_n\rangle$ se nazývají **dělící intervaly** tohoto dělení.
- **Normou dělení** D (ozn. $\nu(D)$) rozumíme délku největšího z dělících intervalů, tj. $\nu(D) = \max\{x_i - x_{i-1}, i = 1, 2, \dots, n\}$.
- Z každého dělícího intervalu vyberme libovolné číslo: $\xi_1 \in \langle x_0, x_1\rangle, \xi_2 \in \langle x_1, x_2\rangle, \dots, \xi_n \in \langle x_{n-1}, x_n\rangle$. Množinu $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ těchto čísel nazýváme **výběr reprezentantů** dělení D a sumu (která v případě kladné funkce představuje součet obsahů n obdélníků)

$$\sigma(f, D, \Xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

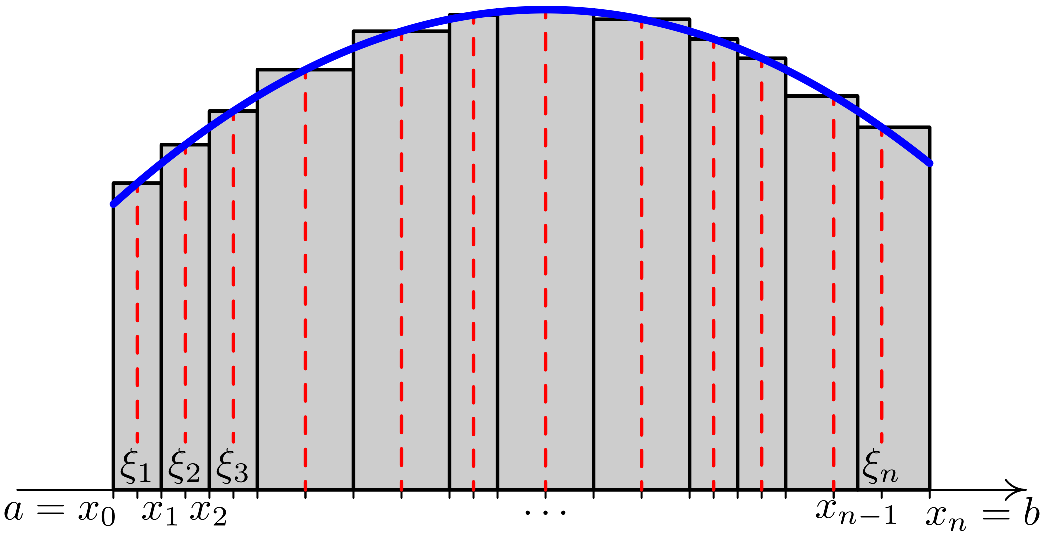
nazýváme **integrální součet** příslušný funkci f, dělení D a výběru reprezentantů Ξ.

Integrální součet:



$$
\begin{aligned}
\sigma(f, D, \Xi) &= f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + f(\xi_3)(x_3 - x_2) \\
&\quad + f(\xi_4)(x_4 - x_3) + f(\xi_5)(x_5 - x_4) + f(\xi_6)(x_6 - x_5) \\
&= \sum_{i=1}^{6} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})
\end{aligned}
$$

Jemnější dělení:



$$
\begin{aligned}
\sigma(f, D, \Xi) &= f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})
\end{aligned}
$$

Definice (Riemannův určitý integrál)

Nechť f je funkce definovaná a ohraničená na intervalu $\langle a, b\rangle$. Funkce f se nazývá **(Riemannovsky) integrovatelná na** $\langle a, b\rangle$, jestliže

- pro libovolou posloupnost dělení $D_1, D_2, D_3, \ldots, D_n, \ldots$, pro kterou platí $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$ (tj. norma dělení a tedy délky všech dělících intervalů se blíží k nule, pokud n se blíží k nekonečnu)
- a pro libovolnou posloupnost $\Xi_1, \Xi_2, \Xi_3, \ldots, \Xi_n, \ldots$ příslušných výběrů reprezentantů

existuje stejná limita

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(f, D_n, \Xi_n).$$

Hodnota této limity se nazývá **Riemannův určitý integrál** z funkce f na $\langle a, b\rangle$ a značí se

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Číslo a se nazývá **dolní mez** integrálu a číslo b se nazývá **horní mez** integrálu.

Funkce f je tedy Riemannovsky integrovatelná na $\langle a, b\rangle$, pokud se **pro stále jemnější dělení** (norma dělení se blíží nule) ustalují hodnoty integrálních součtů (**při libovolném výběru reprezentantů**) kolem nějaké hodnoty (která se nazývá Riemannův určitý integrál).

Pojmy neurčitý a určitý integrál je potřeba rozlišovat, každý vyjadřuje něco jiného:

- **Neurčitý integrál je množina funkcí.**
- **Určitý integrál je limita (číslo).**

Přestože neurčitý a určitý integrál vyjadřují každý něco jiného, uvidíme, že mezi těmito pojmy existuje vzájemný vztah, který umožňuje počítat určitý integrál s využitím neurčitého integrálu.

Věta (Postačující podmínky pro integrovatelnost)

Nechť funkce f splňuje alespoň jednu z podmínek:

1. f *je spojitá na* $\langle a, b\rangle$,
2. f *je monotonní na* $\langle a, b\rangle$,
3. f *je na intervalu* $\langle a, b\rangle$ *ohraničená a má zde nějvýše konečný počet bodů nespojitosti.*

Pak je funkce f *na* $\langle a, b\rangle$ *integrovatelná, tj. existuje určitý integrál* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Vlastnosti určitého integrálu

Věta (Aditivita a homogenita vzhledem k integrandu)

Nechť f a g jsou funkce integrovatelné na $\langle a,b\rangle$, $c \in \mathbb{R}$. Pak funkce $f \pm g$ a cf jsou také integrovatelné na $\langle a,b\rangle$ a platí:

$$\begin{aligned}\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,\\ \int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x &= c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Věta (Aditivita vzhledem k integračnímu oboru)

Nechť f je funkce definovaná na $\langle a,b\rangle$ a nechť $c \in (a,b)$. Pak je funkce f integrovatelná na $\langle a,b\rangle$ právě tehdy, když je integrovatelná na každém z intervalů $\langle a,c\rangle$ a $\langle c,b\rangle$ a platí:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta

Nechť f a g jsou funkce integrovatelné na $\langle a,b\rangle$ a nechť $f(x) \leq g(x)$ pro $x \in \langle a,b\rangle$. Pak

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Z předchozí věty vyplývá, že

$$\text{pokud} \quad g(x) \geq 0, \quad \text{pak} \quad \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geq 0,$$

tedy integrál z nezáporné funkce je nezáporný.

Výpočet určitého integrálu

Věta (Newton - Leibnizova formule)

Nechť f je funkce integrovatelná na $\langle a, b\rangle$ a nechť F je primitivní funkce k funkci f a spojitá na $\langle a, b\rangle$. Pak

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Předchozí věta říká, že pro výpočet určitého integrálu z funkce f na $\langle a, b\rangle$ stačí

1. najít primitivní funkci F k funkci f,
2. spočítat rozdíl hodnot $F(b) - F(a)$.

Příklad

1. $$\int_2^3 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{19}{3}.$$
2. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1.$$
3. $$\begin{aligned}\int_{-3}^1 |x|\,\mathrm{d}x = \int_{-3}^0 (-x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-3}^0 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \\ &= 0 + \frac{9}{2} + \frac{1}{2} - 0 = 5.\end{aligned}$$

Věta (Metoda per partes pro určitý integrál)

Nechť funkce u, v mají spojité derivace na $\langle a, b\rangle$. Pak platí:

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Příklad

$$\begin{aligned}\int_1^2 x\ln x\,\mathrm{d}x &= \left|\begin{array}{ll} u=\ln x & v'=x \\ u'=\frac{1}{x} & v=\frac{x^2}{2}\end{array}\right| = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{4}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 1 - \frac{1}{2}\int_1^2 x\,\mathrm{d}x = 2\ln 2 - 0 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 \\ &= 2\ln 2 - \frac{1}{2}\left[\frac{4}{2}-\frac{1}{2}\right] = 2\ln 2 - \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Věta (Substituční metoda pro určitý integrál)

Nechť f je funkce spojitá na $\langle a, b\rangle$ a nechť funkce φ má spojitou derivaci φ' na $\langle \alpha, \beta\rangle$. Dále předpokládejme, že $a \leq \varphi(x) \leq b$ pro $x \in \langle \alpha, \beta\rangle$. Pak

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(x)]\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

- Vzorec v předchozí větě lze použít zleva doprava (1. substituční metoda) nebo zprava doleva (2. substituční metoda).
- V některých konkrétních případech se může stát, že dolní mez vyjde po transformaci větší nebo rovna horní mezi. Z tohoto důvodu zavádíme následující rozšíření:

Rozšíření

Symbol $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ lze rozšířit i na případy, kdy $b \leq a$ takto:

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Při výpočtu určitého integrálu s použitím substituční metody máme dvě možnosti:

1. S použitím předchozí věty transformujeme nejenom funkci ale také meze integrálu a poté aplikujeme Newton-Leibnizovu formuli s těmito novými mezemi přímo na primitivní funkci k transformované funkci (tj. do primitivní funkce již původní proměnnou zpět nedosazujeme).

2. Předchozí větu nepoužijeme, najdeme neurčitý integrál (tedy po substituci se vrátíme zpět k původní proměnné) a poté aplikujeme Newton-Leibnizovu formuli s původními mezemi.

Příklad

Vypočtětě $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos x \, dx$.

1. S použitím transformace mezí:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos x \, dx = \left| \begin{array}{c} t = \sin x \\ dt = \cos x \, dx \\ t_1 = \sin 0 = 0 \\ t_2 = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \end{array} \right| = \int_0^1 t^2 \, dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

2. Bez transformace mezí:

$$\int \sin^2 x \cdot \cos x \, dx = \left| \begin{array}{c} t = \sin x \\ dt = \cos x \, dx \end{array} \right| = \int t^2 \, dt = \frac{t^3}{3} = \frac{\sin^3 x}{3} + c.$$

Tedy

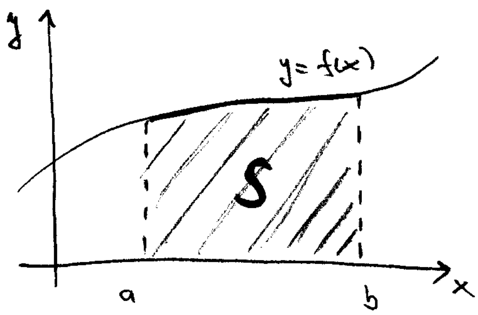
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos x \, dx = \left[\frac{\sin^3 x}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin^3 \frac{\pi}{2}}{3} - \frac{\sin^3 0}{3} = \frac{1}{3}.$$

Geometrické aplikace určitého integrálu

Obsah plochy pod křivkou a mezi dvěma křivkami

- Nechť f je nezáporná a spojitá funkce na $\langle a, b\rangle$. Obsah S rovinné množiny ohraničené grafem funkce $y = f(x)$, osou x a přímkami $x = a$ a $x = b$ je roven:

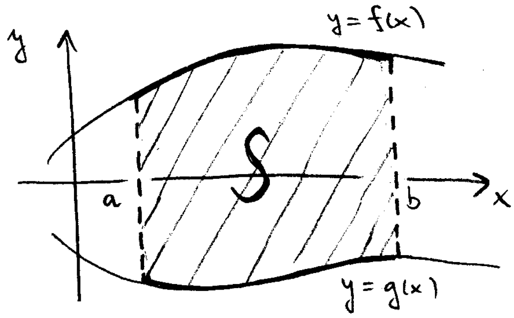
$$\boxed{S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$$



- Nechť f a g jsou spojité funkce a nechť $f(x) \geq g(x)$ pro $x \in \langle a, b\rangle$. Obsah S rovinné množiny ograničené grafy funkcí $y = f(x)$, $y = g(x)$ a přímkami $x = a$ a $x = b$ je roven:

$$\boxed{S = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x}$$

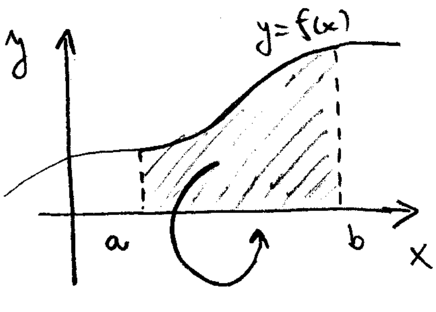
(Znaménka funkcí f a g jsou libovolná.)



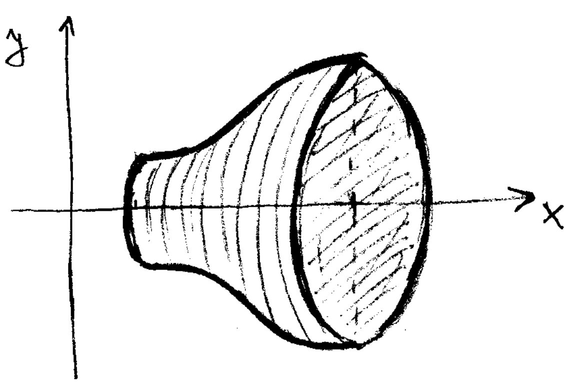
Objem rotačního tělesa I

Nechť f je nezáporná a spojitá funkce na $\langle a, b\rangle$.
Objem V tělesa, které vznikne rotací rovinné množiny ohraničené grafem funkce $y = f(x)$, osou x a přímkamu $x = a$ a $x = b$ kolem osy x je roven:

$$\boxed{V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x}$$



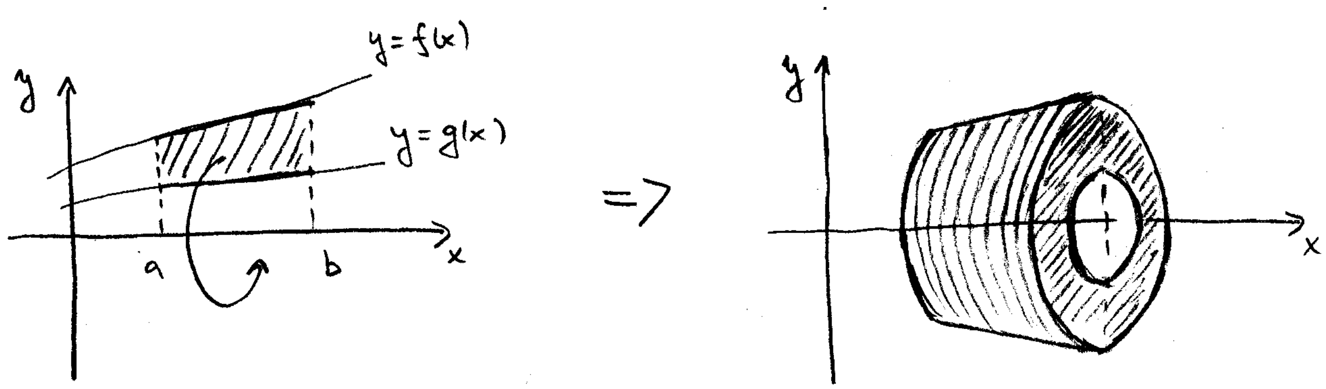
$\Longrightarrow$



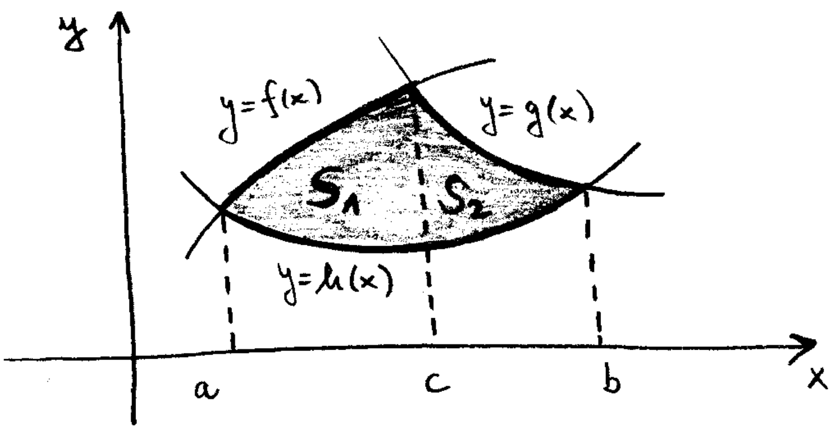
Objem rotačního tělesa II

Nechť f a g jsou nezáporné a spojité funkce a nechť $f(x) \geq g(x)$ pro $x \in \langle a, b \rangle$. Objem V tělesa, které vznikne rotací rovinné množiny ohraničené grafy funkcí $y = f(x)$, $y = g(x)$ a přímkami $x = a$ a $x = b$ kolem osy x je roven:

$$\boxed{V = \pi \int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x) \right] \, \mathrm{d}x}$$



Uvedených vzorců lze využít i k výpočtu ploch nebo objemů rotačních těles jiných tvarů, a to tak, že danou rovinnou plochu rozdělíme na několik ploch, které již budou tvaru požadovaného ve výše uvedených vzorcích. Všechny tyto dílčí plochy (objemy) spočteme a pak sečteme.

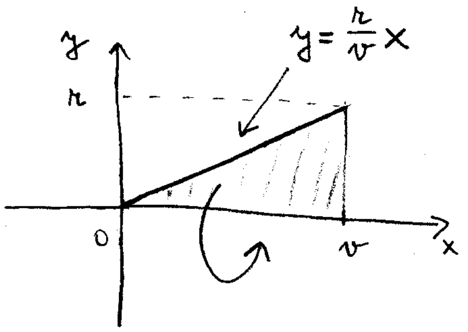


$$S = S_1 + S_2 = \int_a^c [f(x) - h(x)] \, \mathrm{d}x + \int_c^b [g(x) - h(x)] \, \mathrm{d}x$$

Příklad (Objem kužele)

Odvoďte vzorec pro výpočet objemu kužele s poloměrem podstavy r a výškou v.

Řešení:
Kužel získáme, pokud necháme kolem osy x rotovat trojúhelník – viz obrázek:



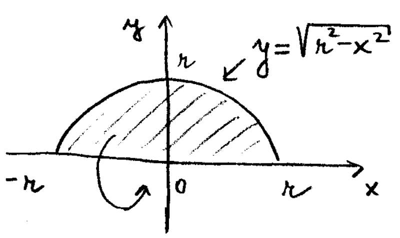
$$V = \pi \int_0^v \left(\frac{r}{v}x\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{\pi r^2}{v^2} \int_0^v x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{\pi r^2}{v^2} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^v = \frac{\pi r^2}{v^2}\frac{v^3}{3} = \frac{\pi r^2 v}{3}$$

Příklad (Objem koule)

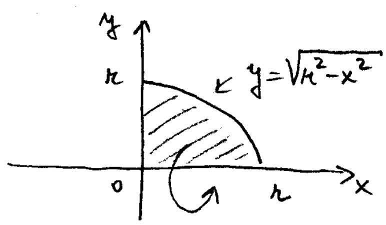
Odvoďte vzorec pro výpočet objemu koule o poloměru r.

Řešení: Rovnice kružnice o poloměru r a středem v počátku je $x^2 + y^2 = r^2$. Horní půlkružnice je grafem funkce $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, dolní půlkružnice je grafem funkce $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$.

Kouli získáme, pokud necháme rotovat půlkruh kolem osy x. Pro výpočet je pohodlnější nechat rotovat pouze čtvrtkruh kolem osy x. Tím získáme objem poloviny koule a výsledek vynásobíme dvěma.



NEBO

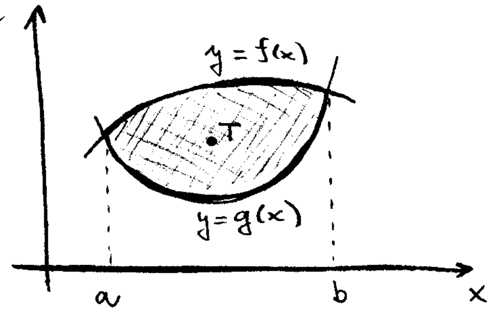


$$V = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2) \,\mathrm{d}x = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) \,\mathrm{d}x$$

$$= 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r = 2\pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Fyzikální aplikace určitého integrálu

Nechť hmotná rovinná oblast je ohraničena grafy funkcí $y = f(x), y = g(x)$ a přímkami $x = a$, $x = b$, přičemž $g(x) \leq f(x)$ na $\langle a, b\rangle$.



Předpokládejme, že oblast má kostantní plošnou hustotu ρ. Pak pro následující veličiny platí:

- Hmotnost oblasti:

$$m = \rho \int_a^b [f(x) - g(x)]\ \mathrm{d}x$$

- Statické momenty k osám x, y:

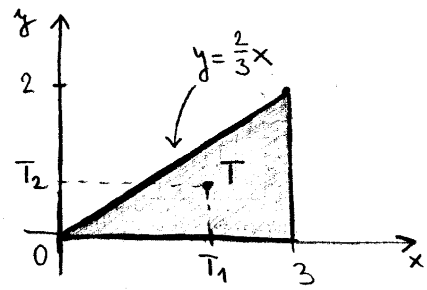
$$S_x = \frac{1}{2}\rho \int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x)\right]\ \mathrm{d}x, \quad S_y = \rho \int_a^b x\,[f(x) - g(x)]\ \mathrm{d}x$$

- Těžiště:

$$T = \left[\frac{S_y}{m}, \frac{S_x}{m}\right]$$

Příklad (Těžiště)

Vypočtěte souřadnice těžište trojúhelníka s vrcholy $[0,0], [3,0], [3,2]$. Předpokádáme, že plošná hustota ρ je konstantní.



- Hmotnost trojúhelníka:

$$m = \rho \int_0^3 \frac{2}{3}x\,\mathrm{d}x = \rho\frac{2}{3}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \rho\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{2} = 3\rho$$

- Statické momenty:

$$S_x = \frac{1}{2}\rho \int_0^3 \frac{4}{9}x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{9}\rho\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{2}{9}\rho\cdot 9 = 2\rho$$

$$S_y = \rho \int_0^3 x\cdot\frac{2}{3}x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\rho\int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\rho\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{2}{3}\rho\cdot 9 = 6\rho$$

- Těžiště:

$$T_1 = \frac{S_y}{m} = 2, \quad T_2 = \frac{S_x}{m} = \frac{2}{3} \Longrightarrow T = \left[2, \frac{2}{3}\right]$$

Využití systémů počítačové algebry

Využití systémů Sage, Maxima, Wolfram Alpha:

http://user.mendelu.cz/marik/akademie/integralni-pocet.html

Geometrické aplikace – Matematické výpočty online (MAW):

http://um.mendelu.cz/maw-html/index.php?lang=cs&form=geom