Soustavy lineárních rovnic

Základy vyšší matematiky

LDF MENDELU

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Podpořeno projektem Průřezová inovace studijních programů Lesnické a dřevařské fakulty MENDELU v Brně (LDF) s ohledem na disciplíny společného základu http://akademie.ldf.mendelu.cz/cz (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0021) za přispění finančních prostředků EU a státního rozpočtu České republiky.

Základní pojmy

Definice (Soustava lineárních rovnic)

Soustavou m lineárních rovnic o n neznámých nazýváme soustavu rovnic

$$
(*) \qquad
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

Proměnné x_1, x_2, ..., x_n nazýváme neznámé. Reálná čísla a_{ij} nazýváme koeficienty levých stran, reálná čísla b_j koeficienty pravých stran soustavy rovnic. Řešením soustavy rovnic rozumíme uspořádanou n-tici reálných čísel $t_1, t_2, \ldots, t_n$, po jejichž dosazení za neznámé (v tomto pořadí) do soustavy jsou všechny rovnice splněny.
Platí-li v soustavě $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, nazývá se soustava homogenní.

Definice (Matice soustavy a rozšířená matice soustavy)

- Matice
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$
se nazývá matice soustavy.
- Matice
$$A_r = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$
se nazývá rozšířená matice soustavy.

Maticový zápis soustavy ($*$)

Označme

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Vektor $\vec{b}$ se nazývá vektor pravých stran. Vektor $\vec{x}$ se nazývá vektor neznámých. Soustavu ($*$) lze psát ve tvaru

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

tj.

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

Věta (Frobeniova věta)

Soustava lineárních rovnic $(*)$ *má řešení právě tehdy, když její matice soustavy a rozšířená matice soustavy mají stejnou hodnost, tj.*

$$h(A) = h(A_r).$$

Poznámka

Mohou nastat tři možnosti:

- Pokud $h(A) < h(A_r)$, pak soustava nemá řešení,
- Pokud $h(A) = h(A_r) = n$, pak má soustava právě jedno řešení,
- Pokud $h(A) = h(A_r) < n$, pak má soustava nekonečně mnoho řešení. Tato řešení lze vyjádřit pomocí $n - h(A)$ parametrů (volných neznámých).

Homogenní soustava lineárních rovnic má vždy řešení. Po dosazení vidíme, že n-tice $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $\dots$, $x_n = 0$ je řešením. Toto řešení nazýváme triviální. U homogenních soustav lineárních rovnic tedy buď existuje pouze triviální řešení, nebo existuje nekonečně mnoho řešení.

Gaussova eliminační metoda

1. Rozšířenou matici soustavy A_r převedeme do schodovitého tvaru (pomocí ekvivalentních řádkových úprav). Určíme $h(A_r)$ a $h(A)$ a na základě Frobeniovy věty zjistíme, zda má soustava řešení.
2. Je-li $h(A) = h(A_r)$, přepíšeme schodovitý tvar matice A_r zpět do soustavy lineárních rovnic (s původními neznámými). Takto získaná soustava má stejné řešení jako původní soustava $(*)$.
3. Tuto novou soustavu řešíme odspodu:
   - Je-li $h(A) = h(A_r) = n$, pak je v každé rovnici právě jedna nová neznámá $\Rightarrow$ jediné řešení
   - Je-li $h(A) = h(A_r) < n$, pak existuje alespoň jedna rovnice se dvěmi nebo více novými neznámýni. Řekněme, že nových neznámých je $k > 1$. V tom případě zvolíme $k - 1$ z těchto neznámých za parametry (volné neznámé) a zbývající neznámou vyjadříme v závislosti na těchto parametrech. Výsledný zápis řešení se může lišit v závislosti na tom, které neznámé zvolíme jako parametry (existuje více způsobů zápisu řešení). Za parametry můžeme dosazovat libovolná reálná čísla (nekonečně mnoho možností)$\Rightarrow$ nekonečně mnoho řešení.

Příklad (Jedno řešení)

Řešte soustavu:
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 &= 8 \\ 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 &= 10 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 10 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-2) \quad \cdot(-3) \\ + \\ + \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & 8 \\ 0 & 2 & 4 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ + \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Hodnost matice soustavy (ozn. A) a rozšířené matice (ozn. A_r):

$$h(A) = h(A_r) = 3$$

počet neznámých: $n = 3$

$\Rightarrow$ 1 řešení

Řešíme odspodu, z výsledné matice:

$$\boxed{x_3 = 2}$$

$$2x_2 + 3 \cdot 2 = 8 \Rightarrow \boxed{x_2 = 1}$$

$$x_1 + 1 + 2 \cdot 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = -5}$$

Příklad (Nekonečně mnoho řešení, 1 parametr)

Řešte soustavu:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 &= -3 \\ x_1 + 3x_2 \qquad - 3x_4 &= 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 &= -3 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} -1 \\ \\ + \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{ll} -5 & 7 \\ + & \\ & + \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{array}\right) \Big| : 2 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \end{array}\right)$$

$h(A) = h(A_r) = 3$
počet neznámých: $n = 4$
$\Rightarrow \infty$ řešení, 1 parametr

$x_3 - 2x_4 = 6$: $\boxed{x_4 = t,\ t \in \mathbb{R}} \Rightarrow \boxed{x_3 = 6 + 2t}$

$x_2 - (6 + 2t) + t = -3 \Rightarrow \boxed{x_2 = 3 + t}$

$x_1 - 2(3 + t) + 3(6 + 2t) - 4t = 4 \Rightarrow \boxed{x_1 = -8}$

Příklad (Nekonečně mnoho řešení, 2 parametry)

Řešte soustavu:
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 4 & -3 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -4 & 0 \\ 4 & 5 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 8 & 24 & -19 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} -3 \quad -4 \quad -3 \\ + \\ + \\ + \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -18 & 15 & 0 \\ 0 & 2 & 12 & -10 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$h(A) = h(A_r) = 2$
počet neznámých: $n = 4$
$\Rightarrow \infty$ řešení, 2 parametry

$$-x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0: \quad \boxed{x_4 = t, x_3 = s, \ t, s \in \mathbb{R}}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_2 = -6s + 5t}$$

$$x_1 + 2(-6s + 5t) + 4s - 3t = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = 8s - 7t}$$

Příklad (Žádné řešení)

Řešte soustavu:
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 8x_3 &= 2 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 8 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} -2 \quad -4 \\ + \\ + \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{-3} & -4 & -1 \\ 0 & -3 & -4 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -1 \\ + \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$h(A) = 2, \quad h(A_r) = 3$$

$h(A) \neq h(A_r) \Longrightarrow$ soustava nemá řešení.

Soustava s regulární čtvercovou maticí

Ukážeme si dva způsoby, jak vyřešit soustavu $A\vec{x} = \vec{b}$, když matice soustavy A je regulární.

Věta (Vlastnosti regulární matice)

Nechť A je čtvercová matice řádu n. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. *A je invertibilní, tj. A^{-1} existuje.*
2. $\det A \neq 0$
3. $h(A) = n$
4. *Řádky (sloupce) matice A jsou lineárně nezávislé.*
5. **Soustava lineárních rovnic $A\vec{x} = \vec{b}$ má jediné řešení pro libovolný vektor $\vec{b}$.**

Řešení pomocí inverzní matice

Věta

Nechť A *je čtvercová regulární matice řádu* n *(tj. inverzní matice existuje). Pak má soustava* $A\vec{x} = \vec{b}$ *jediné řešení*

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}.$$

Příklad

Řešte soustavu:
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Matice soustavy:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vektor pravých stran:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Inverzní matice k matici A:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Vektor řešení: $\vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \boxed{x_1 = 3,\ x_2 = 2,\ x_3 = -2}.$$

Cramerovo pravidlo

Věta (Cramerovo pravidlo)

Nechť A je regulární čtvercová matice řádu n. Pak má soustava lineárních rovnic $A\vec{x} = \vec{b}$ jediné řešení. Označíme-li D determinant z matice A a D_i determinant z matice, která vznikne z matice A nahrazením i-tého sloupce sloupcem pravých stran $\vec{b}$, pak pro i-tou neznámou platí

$$x_i = \frac{D_i}{D}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Poznámka

- Předpoklad regulární čtvercové matice zaručí, že $\det A \neq 0$ a soustava má jediné řešení.
- Cramerovo pravidlo není vhodné k řešení soustav s velkým počtem neznámých.
- Cramerovo pravidlo je užitečné zejména v případech, kdy potřebujeme vypočítat jen některé neznámé. Každou neznámou lze totiž najít bez počítání ostatních neznámých.

Příklad

Řešte Cramerovým pravidlem soustavu

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 5x_2 &= 1\\
7x_1 + 2x_2 &= 8
\end{aligned}
$$

Příklad

Řešte Cramerovým pravidlem soustavu

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 5x_2 &= 1 \\
7x_1 + 2x_2 &= 8
\end{aligned}
$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 35 = -29$$

Příklad

Řešte Cramerovým pravidlem soustavu

$$3x_1 + 5x_2 = 1$$
$$7x_1 + 2x_2 = 8$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 35 = -29$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 40 = -38 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{38}{29}$$

Příklad

Řešte Cramerovým pravidlem soustavu

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 5x_2 &= 1\\
7x_1 + 2x_2 &= 8
\end{aligned}
$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 35 = -29$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 40 = -38 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{38}{29}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 24 - 7 = 17 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = -\frac{17}{29}$$

Příklad

Řešte Cramerovým pravidlem soustavu

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 5x_2 &= 1 \\
7x_1 + 2x_2 &= 8
\end{aligned}
$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 35 = -29$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 40 = -38 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{38}{29}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 24 - 7 = 17 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = -\frac{17}{29}$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{x} = \left(\frac{38}{29}, -\frac{17}{29} \right)$$

Využití systémů počítačové algebry

Ukázka využití systémů Wolfram Alpha, Sage, Maxima, viz:

`http://user.mendelu.cz/marik/akademie/linearni-algebra.html`

Přímý odkaz na Wolfram Alpha:

`http://www.wolframalpha.com/`