evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Průběh funkce

Základy vyšší matematiky

LDF MENDELU

Podpořeno projektem Průřezová inovace studijních programů Lesnické a dřevařské fakulty MENDELU v Brně (LDF) s ohledem na disciplíny společného základu `http://akademie.ldf.mendelu.cz/cz` (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0021) za přispění finančních prostředků EU a státního rozpočtu České republiky.

Simona Fišnarová

Brno 2012

Monotonie a lokální extrémy

Definice (Monotonie v bodě)

- Řekneme, že funkce f je **rostoucí v bodě** $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže existuje ryzí okolí $P(x_0)$ bodu x_0, takové, že $f(x) < f(x_0)$ pro $x \in P^-(x_0)$ a $f(x) > f(x_0)$ pro $x \in P^+(x_0)$.
- Řekneme, že funkce f je **klesající v bodě** $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže existuje ryzí okolí $P(x_0)$ bodu x_0, takové, že $f(x) > f(x_0)$ pro $x \in P^-(x_0)$ a $f(x) < f(x_0)$ pro $x \in P^+(x_0)$.
- Analogicky se definuje funkce neklesající a nerostoucí v bodě.

Věta

Funkce je rostoucí (klesající) na otevřeném intervalu právě tehdy, když je rostoucí (klesající) v každém jeho bodě.

Souvislost monotonie s derivací

Věta

- *Je-li $f'(x_0) > 0$, pak je funkce f rostoucí v bodě x_0.*
- *Je-li $f'(x_0) < 0$, pak je funkce f klesající v bodě x_0.*

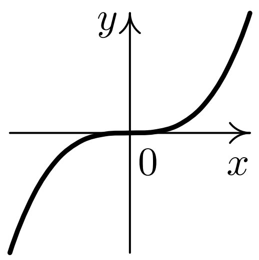
Věta

Nechť f má derivaci na otevřeném intervalu I.

- *Je-li $f'(x) > 0$ pro každé $x \in I$, pak je f na I rostoucí.*
- *Je-li $f'(x) < 0$ pro každé $x \in I$, pak je f na I klesající.*

Obrácení vět neplatí. Například funkce $y = x^3$ je v bodě $x_0 = 0$ rostoucí, ale má zde nulovou derivaci:

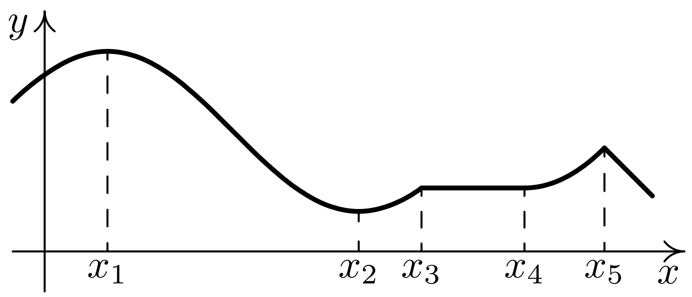
$$y' = 3x^2 \Rightarrow y'(0) = 0.$$



Definice (Lokální extrémy)

Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in D(f)$

- **lokální maximum (ostré lokální maximum)**, jestliže existuje ryzí okolí $P(x_0)$ bodu x_0 takové, že $f(x_0) \geq f(x)$ ($f(x_0) > f(x)$) pro každé $x \in P(x_0)$.
- **lokální minimum (ostré lokální minimum)**, jestliže existuje ryzí okolí $P(x_0)$ bodu x_0 takové, že $f(x_0) \leq f(x)$ ($f(x_0) < f(x)$) pro každé $x \in P(x_0)$.
- Pro lokální maximum a lokální minimum používáme společný název **lokální extrémy**, ostré lokální maximum a ostré lokální minimum nazýváme společným názvem **ostré lokální extrémy**.



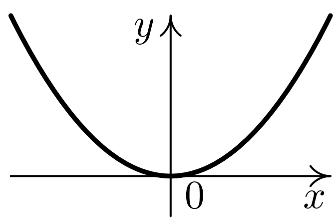
- v bodech x_1, x_3 a x_5 jsou lokální maxima (v bodech x_1 a x_5 ostrá)
- v bodech x_2 a x_4 jsou lokální minima (v bodě x_2 ostré)
- v bodech z intervalu (x_3, x_4) jsou lokální maxima a zároveň i minima (neostrá)

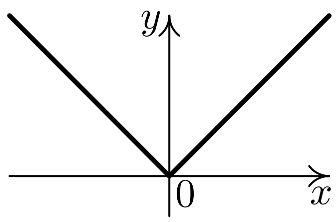
Souvislost lokálních extrémů s derivací

Věta

Nechť má funkce f v bodě x_0 lokální extrém a nechť existuje $f'(x_0)$. Pak $f'(x_0) = 0$.

- Věta neplatí opačně. Například funkce $y = x^3$ má v bodě $x_0 = 0$ nulovou derivace, ale nemá zde lokální extrém (je zde rostoucí).
- Podle předchozí věty může mít funkce f lokální extrémy v bodech, kde $f'(x) = 0$ nebo v bodech, kde nemá derivaci.





- Bod x_0, pro který platí, že $f'(x_0) = 0$, se nazývá **stacionární bod**.

Věta

Nechť f je spojitá v bodě x_0 a nechť existuje ryzí okolí $P(x_0)$ bodu x_0, v němž má f derivaci.

- *Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in P^-(x_0)$ a $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in P^+(x_0)$, pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum.*
- *Je-li $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in P^-(x_0)$ a $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in P^+(x_0)$, pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum.*

Předchozí věta říká, že je-li x_0 stacionární bod a derivace f' mění v bodě x_0 znaménko, pak je v bodě x_0 lokální extrém.

O tom, zda ve stacionárním bodě je nebo není extrém, můžeme rozhodnout také podle následující věty.

Věta

Nechť $f'(x_0) = 0$.

- *Je-li $f''(x_0) < 0$, pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum.*
- *Je-li $f''(x_0) > 0$, pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum.*

Definice (Konvexnost, konkávnost)

- Řekneme, že funkce f je **konvexní v bodě** $x_0 \in D(f)$, jestliže f má derivaci v x_0 a existuje ryzí okolí bodu x_0 takové, že pro všechna x z tohoto okolí leží graf funkce f nad tečnou sestrojenou ke grafu funkce f v bodě x_0, tj.

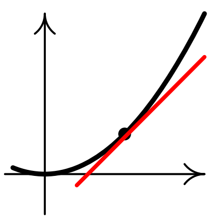
$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

- Řekneme, že funkce f je **konkávní v bodě** $x_0 \in D(f)$, jestliže f má derivaci v x_0 a existuje ryzí okolí bodu x_0 takové, že pro všechna x z tohoto okolí leží graf funkce f pod tečnou sestrojenou ke grafu funkce f v bodě x_0, tj.

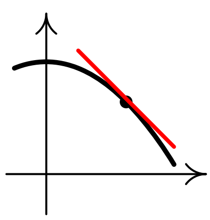
$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

- Řekneme, že funkce f je **konvexní (konkávní) na otevřeném intervalu**, jestliže je konvexní (konkávní) v každém jeho bodě.

Konvexní
(nad tečnou)



Konkávní
(pod tečnou)



Souvislost konvexnosti/konkávnosti s druhou derivací

Věta

Nechť f má druhou derivaci v bodě x_0.

- *Je-li $f''(x_0) > 0$, pak je funkce f konvexní v bodě x_0.*
- *Je-li $f''(x_0) < 0$, pak je funkce f konkávní v bodě x_0.*

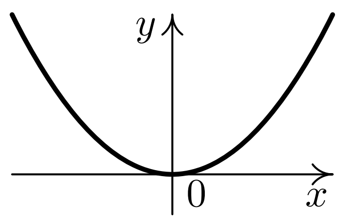
Věta

Nechť f má druhou derivaci na otevřeném intervalu I.

- *Je-li $f''(x) > 0$ pro každé $x \in I$, pak je f na I konvexní.*
- *Je-li $f''(x) < 0$ pro každé $x \in I$, pak je f na I konkávní.*

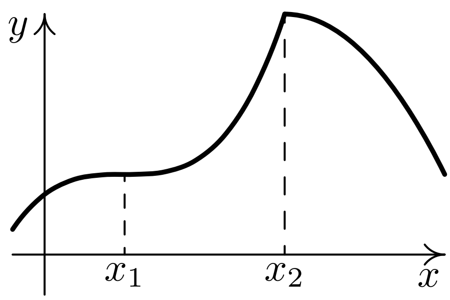
Obrácení vět neplatí. Například funkce $y = x^4$ je v bodě $x_0 = 0$ konvexní, ale má zde nulovou druhou derivaci:

$$y' = 4x^3,\ y'' = 12x^2 \Rightarrow y''(0) = 0.$$



Definice (Inflexní bod)

Bod $x_0 \in \mathbb{R}$ se nazývá **inflexní bod** funkce f, jestliže existuje $f'(x_0)$ a ryzí okolí bodu x_0 takové, že v levém ryzím okolí je funkce konvexní a v pravém ryzím okolí je funkce konkávní nebo naopak.



- x_1 je inflexní bod
- x_2 není inflexní bod, neboť funkce nemá v tomto bodě derivaci.

Věta

Nechť má funkce f v bodě x_0 inflexní bod a nechť existuje $f''(x_0)$. Pak $f''(x_0) = 0$.

- Věta neplatí opačně. Například funkce $y = x^4$ má v bodě $x_0 = 0$ nulovou druhou derivaci, ale nemá zde inflexní bod (je zde konvexní).

Věta

Nechť f má v bodě x_0 spojitou první derivaci a nechť existuje ryzí okolí $P(x_0)$ bodu x_0, v němž má f druhou derivaci. Je-li $f''(x) > 0$ pro všechna $x \in P^-(x_0)$ a $f''(x) < 0$ pro všechna $x \in P^+(x_0)$ nebo naopak, pak má funkce f v bodě x_0 inflexní bod.

Předchozí věta říká, že je-li $f''(x_0) = 0$ a druhá derivace f'' mění v bodě x_0 znaménko, pak je x_0 inflexní bod.

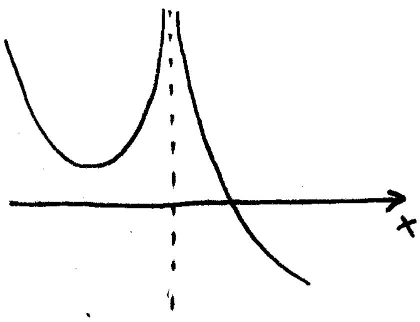
Asymptoty funkce

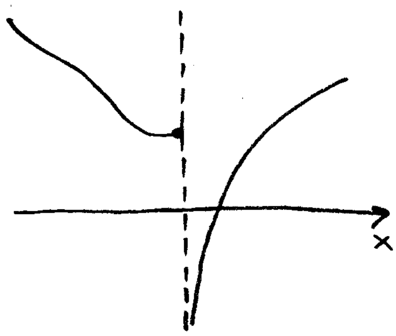
- Asymptoty bez směrnice (svislé asymptoty) – viz přednáška "Limita a spojitost"
- Asymptoty se směrnicí

Definice (Asymptota se směrnicí)

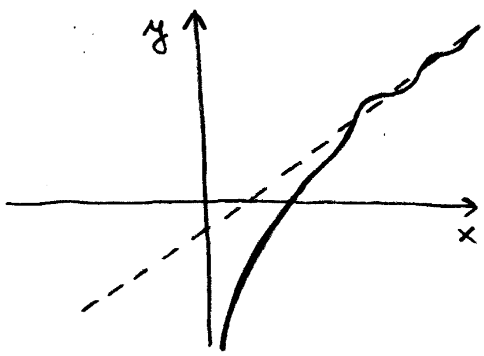
- Přímka o rovnici $y = kx + q$, kde $k, q \in \mathbb{R}$, se nazývá **asymptotou se směrnicí** funkce f pro $x \to \infty$, jestliže
$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0.$$
- Přímka o rovnici $y = kx + q$, kde $k, q \in \mathbb{R}$, se nazývá **asymptotou se směrnicí** funkce f pro $x \to -\infty$, jestliže
$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0.$$

Příklad asymptot bez směrnice:

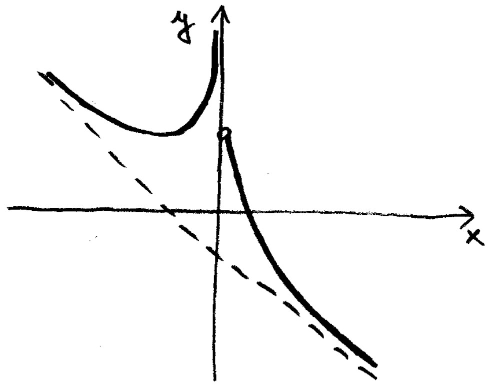




Příklad asymptot se směrnicí:



pro $x \to \infty$



pro $x \to \pm\infty$

Věta

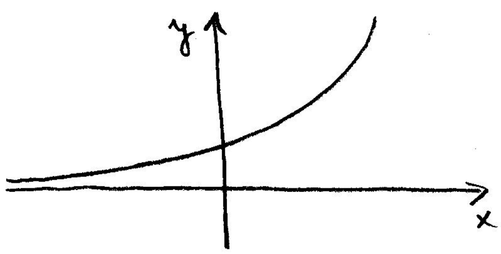
Přímka o rovnici $y = kx + q$ je asymptotou funkce f pro $x \to \infty$ právě tehdy, když

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \quad a \quad q = \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx].$$

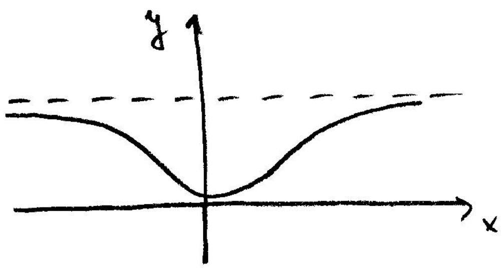
Analogicky pro $x \to -\infty$.

Poznámka

Pokud $k = 0$, $q \in \mathbb{R}$, pak se jedná o vodorovnou asymptotu – viz přednáška "Limita a spojitost".



pro $x \to -\infty$



pro $x \to \pm\infty$

Postup při vyšetřování průběhu funkce

1. Definiční obor, průsečíky grafu se souřadnými osami, znaménko funkce (intervaly, kde je kladná a záporná).
2. První derivace, intervaly růstu a klesání, lokální extrémy.
3. Druhá derivace, intervaly konvexnosti a konkávnosti, inflexní body.
4. Asymptoty (polynom stupně dva a většího asymptoty nemá).
5. Graf.

Příklad

Vyšetřete průběh funkce $y = 4x^3 - 3x^4$.

1) $D(f) = \mathbb{R}$, $y = x^3(4-3x)$

y: $-$ | 0 | $+$ | $\frac{4}{3}$ | $-$

2) $y' = 12x^2 - 12x^3 = 12x^2(1-x)$

y': $+$ $\nearrow$ | 0 | $+$ $\nearrow$ | 1 | $-$ $\searrow$

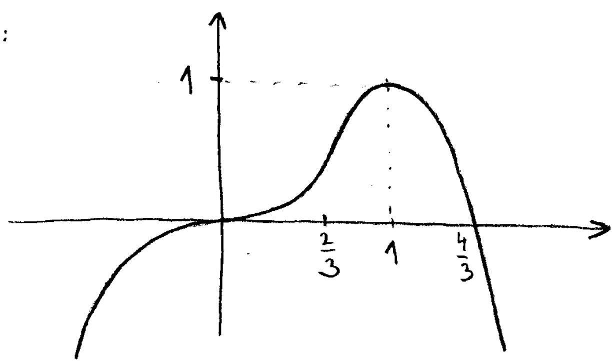
$[1,1]$ lok. max.

3) $y'' = 24x - 36x^2 = 12x(2-3x)$

y'': $-$ $\cap$ | 0 | $+$ $\cup$ | $\frac{2}{3}$ | $-$ $\cap$

$\left[\frac{2}{3}, \frac{16}{27}\right]$ infl. bod

Graf:



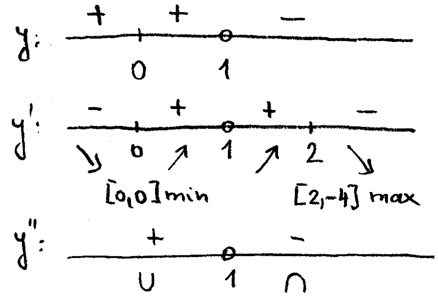
Příklad

Vyšetřete průběh funkce $y = \frac{x^2}{1-x}$.

1) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

2) $y' = \dfrac{2x(1-x) - x^2\cdot(-1)}{(1-x)^2} = \dfrac{2x - x^2}{(1-x)^2} = \dfrac{x(2-x)}{(1-x)^2}$

3) $y'' = \dfrac{(2-2x)(1-x)^2 - (2x-x^2)\cdot 2(1-x)\cdot(-1)}{(1-x)^4} = \dfrac{2}{(1-x)^3}$



4) Asymptoty bez směrnice:

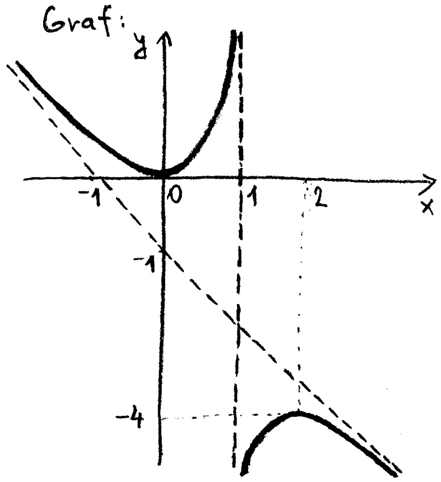
$\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2}{1-x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2}{1-x} = \infty \Rightarrow \underline{\underline{x=1}}$

Asymptoty se směrnicí:

$k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{1-x} = -1$

$q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\dfrac{x^2}{1-x} + x\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{1-x} = -1$

$\Rightarrow \underline{\underline{y = -x-1 \text{ pro } x \to \pm\infty}}$



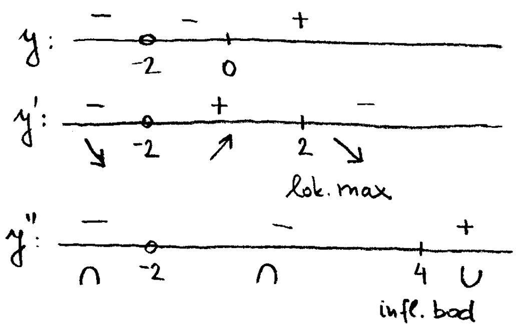
Příklad

Vyšetřete průběh funkce $y = \frac{x}{(x+2)^2}$.

1) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

2) $y' = \dfrac{(x+2)^2 - x\cdot 2(x+2)}{(x+2)^4} = \dfrac{2-x}{(x+2)^3}$

3) $y'' = \dfrac{-(x+2)^3 - (2-x)\cdot 3(x+2)^2}{(x+2)^6} = \dfrac{2x-8}{(x+2)^4} = \dfrac{2(x-4)}{(x+2)^4}$



4) Asymptoty bez směrnice:

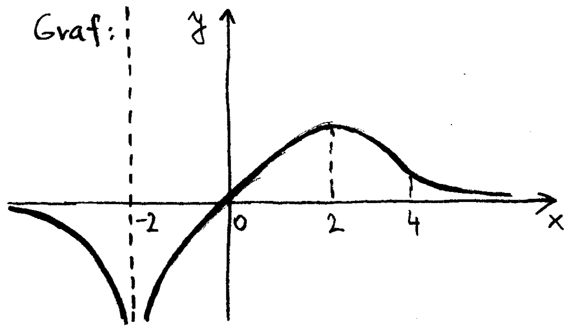
$\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x}{(x+2)^2} = -\infty \Rightarrow \underline{\underline{x=-2}}$

Asymptoty se směrnicí:

$k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{(x+2)^2} = 0$

$q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{(x+2)^2} = 0$

$\Rightarrow \underline{\underline{y = 0 \text{ pro } x \to \pm\infty}}$



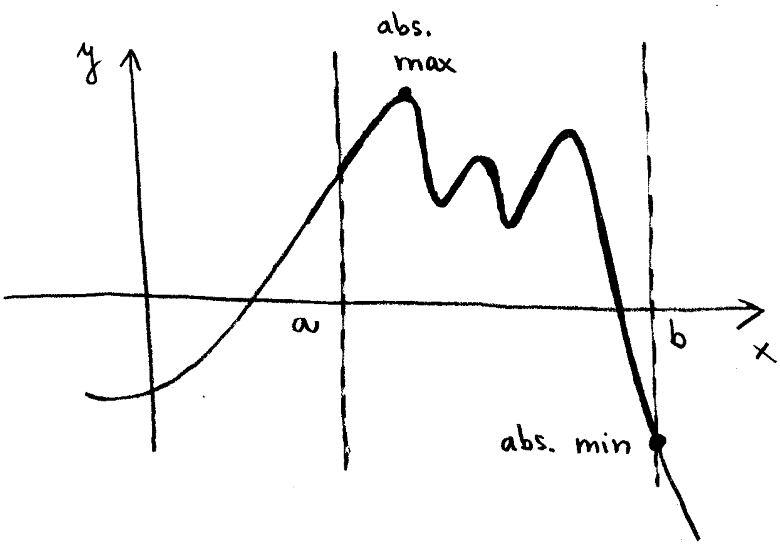
Absolutní extrémy

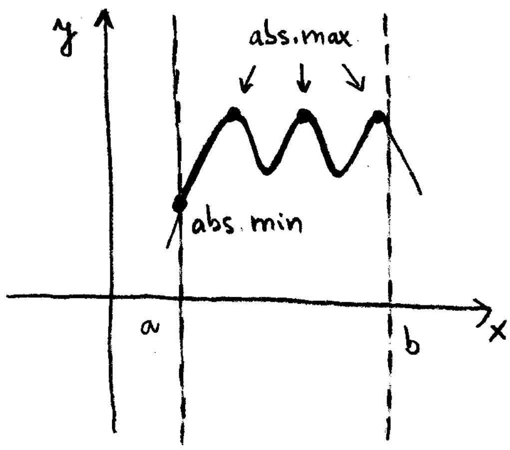
Definice (Absolutní extrémy)

Nechť f je funkce a $M \subseteq D(f)$ množina.

- Jestliže existuje bod $x_0 \in M$ takový, že $f(x_0) \geq f(x)$ pro všechna $x \in M$, pak říkáme, že funkce f nabývá na množině M **absolutního maxima** v bodě x_0.
- Jestliže existuje bod $x_0 \in M$ takový, že $f(x_0) \leq f(x)$ pro všechna $x \in M$, pak říkáme, že funkce f nabývá na množině M **absolutního minima** v bodě x_0.

- Funkce může na množině M nabývat absolutních extrémů ve více bodech.
- Je-li funkce f spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, pak podle Weierstrassovy věty nabývá funkce f na $\langle a, b\rangle$ své největší a nejmenší hodnoty (absolutních extrémů). Těchto extrémů může funkce f nabývat buď v bodech lokálních extrémů uvnitř intervalu nebo v krajních bodech intervalu.

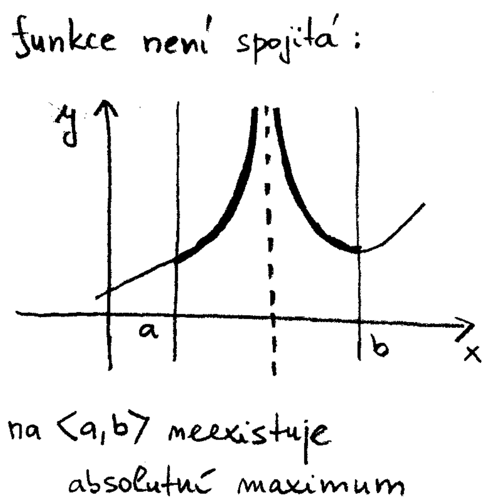


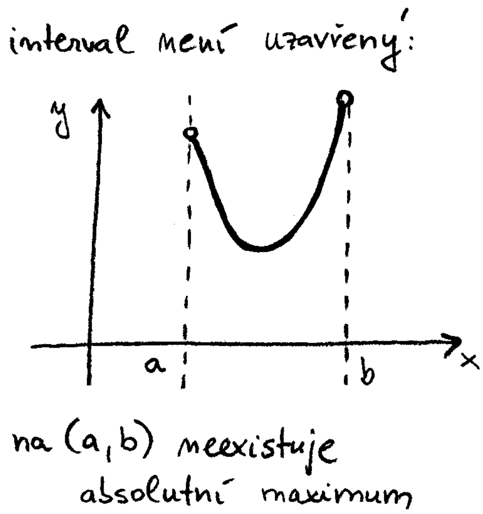


Pokud jsou porušeny předpoklady Weierstassovy věty, tj.

- intevral $\langle a, b\rangle$ uzavřený,
- funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ spojitá,

pak nemusí na daném intervalu absolutní extrémy funkce f existovat.





Využití systémů počítačové algebry

Využití systémů Sage, Maxima, Wolfram Alpha:

`http://user.mendelu.cz/marik/akademie/diferencialni-pocet.html`

Matematické výpočty online (MAW):

`http://um.mendelu.cz/maw-html/index.php?lang=cs&form=prubeh`