INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Neurčitý integrál

Základy vyšší matematiky

LDF MENDELU

Podpořeno projektem Průřezová inovace studijních programů Lesnické a dřevařské fakulty MENDELU v Brně (LDF) s ohledem na disciplíny společného základu `http://akademie.ldf.mendelu.cz/cz` (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0021) za přispění finančních prostředků EU a státního rozpočtu České republiky.

Simona Fišnarová Brno 2012

Primitivní funkce a její vlastnosti, neurčitý integrál

Definice (Primitivní funkce)

Nechť f a F jsou funkce definované na otevřeném intervalu I. Funkce F se nazývá **primitivní funkce** k funkci f na intervalu I, jestliže

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pro každé} \quad x \in I.$$

Z definice přímo vyplývá, že je-li F primitivní funkce k funkci f na I, pak zřejmě i funkce $F + c$, kde c je libovolná reálná konstanta, je primitivní funkce k funkci f na I, neboť platí:

$$[F(x) + c]' = F'(x) + c' = f(x) + 0 = f(x)$$

Existuje-li tedy na daném intervalu primitivní funkce k funkci f, pak jich existuje nekonečně mnoho.

Příklad

Primitivní funkce k funkci $y = x^3$ jsou například funkce

$$y = \frac{x^4}{4}, \quad y = \frac{x^4}{4} + 3, \quad y = \frac{x^4}{4} - 7,$$

neboť

$$\left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3, \quad \left(\frac{x^4}{4} + 3\right)' = x^3, \quad \left(\frac{x^4}{4} - 7\right)' = x^3.$$

Zřejmě každá funkce tvaru $y = \frac{x^4}{4} + c$, kde $c \in \mathbb{R}$, je primitivní k funkci $y = x^3$.

Věta (Jednoznačnost primitivní funkce)

Nechť F a G je dvojice primitivních funkcí k funkci f na intervalu I. Pak existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že $G(x) = F(x) + c$ pro každé $x \in I$.

Předchozí věta říká, že každé dvě primitivní funkce k funkci f se na daném intervalu liší jen o aditivní konstantu. Primitivní funkce je tedy až na aditivní konstantu určena jednoznačně. Známe-li tedy jednu primitivní funkci, pak známe všechny.

Definice (Neurčitý integrál)

Množinu všech primitivních funkcí k funkci f značíme $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ a nazýváme **neurčitý integrál**. Platí tedy

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c,$$

kde F je libovolná primitivní funkce k funkci f a c je libovolná reálná konstanta.

Funkce f se nazývá **integrand**, konstanta c se nazývá **integrační konstanta**. Výraz $\mathrm{d}x$ je tzv. **diferenciál** proměnné x a říká jak je označena proměnná. Proces nalezení primitivní funkce k dané funkci nazýváme **integrování**. Integrační konstantu obvykle během výpočtu nepíšeme. Bývá zvykem ji psát až k výsledné primitivní funkci nebo se vynechává úplně.
Zřejmě platí:

$$\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x) \quad \text{a} \quad \int (F(x))'\,\mathrm{d}x = F(x) + c$$

Věta (Postačující podmínka pro existenci primitivní funkce)

Je-li funkce f spojitá na intervalu I, pak k ní existuje primitivní funkce na tomto intervalu.

- Existují funkce (nespojité), k nimž neexistuje na daném intervalu primitivní funkce.
- Existují funkce, které jsou spojité, tedy k nim existuje primitivní funkce, ale tyto primitivní funkce nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí. Takové primitivní funkce se nazývají **vyšší transcendentní**, například

$$\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{e^x}{x}\,\mathrm{d}x,$$

$$\int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \int \sin x^2\,\mathrm{d}x, \quad \int \cos x^2\,\mathrm{d}x.$$

Základní vzorce a pravidla pro integrování

$$\int 0\,\mathrm{d}x = c$$

$$\int 1\,\mathrm{d}x = x + c$$

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + c$$

$$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c$$

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + c$$

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{tg}x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{cotg}x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + c$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \mathrm{arctg}x + c$$

- Místo $\boxed{\int 1 \,\mathrm{d}x}$ bývá zvykem psát $\boxed{\int \,\mathrm{d}x}$.
- Často také píšeme $\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{x}}$ místo $\boxed{\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x}$,

  obecněji:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} = \int \frac{1}{f(x)} \,\mathrm{d}x.$$

Věta (Základní pravidla pro integrování)

Nechť f a g jsou funkce, k nimž existují primitivní funkce na intervalu I a nechť $c \in \mathbb{R}$. Pak na I platí:

$$\begin{aligned} \int [f(x) \pm g(x)] \,\mathrm{d}x &= \int f(x) \,\mathrm{d}x \pm \int g(x) \,\mathrm{d}x \\ \int c \cdot f(x) \,\mathrm{d}x &= c \int f(x) \,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Nemáme k dispozici žádné obecné pravidlo pro integrování součinu, podílu ani složené funkce!!!

Příklad (Integrování mocninných funkcí a polynomů)

1. $\int x^3 \, \mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + c$

2. $\int \sqrt{x} \, \mathrm{d}x = \int x^{\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$

3. $\int \frac{1}{x^4} \, \mathrm{d}x = \int x^{-4} \, \mathrm{d}x = \frac{x^{-3}}{-3} = -\frac{1}{3x^3} + c$

4. $\int (x^4 + 2x^3 + x - 2) \, \mathrm{d}x = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^2}{2} - 2x + c$

Příklad (Základní vzorce a jednoduché úpravy)

1. Vynásobení mocninných funkcí

$$\int x^2\sqrt{x} \, \mathrm{d}x = \int x^{\frac{5}{2}} \, \mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} = \frac{2}{7}x^3\sqrt{x} + c$$

2. Rozdělení na více jednodušších zlomků

$$\begin{aligned} \int \frac{x+3}{x^2} \, \mathrm{d}x &= \int \left(\frac{x}{x^2} + \frac{3}{x^2}\right) \mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x} + 3x^{-2}\right) \mathrm{d}x \\ &= \ln|x| + 3 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} = \ln|x| - \frac{3}{x} + c \end{aligned}$$

3. Neryze lomenou racionální funkci vždy upravíme na součet polynomu a ryzí racionální lomené funkce (čitatele vydělíme jmenovatelem)

$$\int \frac{x^4}{x^2+1} \, \mathrm{d}x = \int \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}\right) \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - x + \mathrm{arctg} x + c$$

Substituční metoda

Věta (1. substituční metoda, $t = \varphi(x)$)

Nechť funkce $f(t)$ je spojitá na otevřeném intervalu I a funkce $\varphi(x)$ má na otevřeném intervalu J spojitou derivaci, přičemž pro libovolné $x \in J$ je $\varphi(x) \in I$. Pak je funkce $f[\varphi(x)]\varphi'(x)$ spojitá na J a na tomto intervalu platí

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t,$$

dosadíme-li do výrazu vpravo $t = \varphi(x)$.

- Uvedenou substituci lze použít při integrování funkcí typu "**složená funkce** $f[\varphi(x)]$ krát **derivace vnitřní složky této funkce** $\varphi'(x)$"
- Prakticky provádíme substituci tak, že vnitřní složku nahradíme novou proměnnou (např. t). Tedy $\boxed{t = \varphi(x)}$ a dále platí $\boxed{\mathrm{d}t = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x}$.
- Je-li F primitivní funkce k funkci f, pak postup integrace vypadá takto:

$$\boxed{\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \varphi(x) \\ \mathrm{d}t = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + c = F[\varphi(x)] + c}$$

Příklad (1. substituční metoda)

1. $$\int \sin(3x+2)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} t = 3x+2 \\ \mathrm{d}t = 3\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{1}{3}\int \sin t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{3}\cos t + c$$
   $$= -\frac{1}{3}\cos(3x+2) + c$$
2. $$\int \sin^2 x \cos x\,\mathrm{d}x = \int (\sin x)^2 \cdot \cos x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \sin x \\ \mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int t^2\,\mathrm{d}t$$
   $$= \frac{t^3}{3} + c = \frac{\sin^3 x}{3} + c$$
3. $$\int x \cdot e^{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = 1-x^2 \\ \mathrm{d}t = -2x\,\mathrm{d}x \\ x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = -\frac{1}{2}\int e^t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}e^t + c = -\frac{1}{2}e^{1-x^2} + c$$
4. $$\int x^3 \cdot \sqrt{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = x^4+1 \\ \mathrm{d}t = 4x^3\,\mathrm{d}x \\ x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{1}{4}\int \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int t^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t$$
   $$= \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{6}\sqrt{t^3} + c = \frac{1}{6}\sqrt{(x^4+1)^3} + c$$

Integrace funkce s lineární vnitřní složkou

Nechť F je primitivní funkce k funkci f na intervalu I. Pak pro $ax+b \in I$ platí

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)+c.$$

Příklad

$$\int \sin(5x+1)\,\mathrm{d}x$$

- Substitucí: $\int \sin(5x+1)\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} t=5x+1 \\ \mathrm{d}t = 5\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{5}\,\mathrm{d}t \end{vmatrix} = \frac{1}{5}\int \sin t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{5}\cos t + c =$ $-\frac{1}{5}\cos(5x+1)+c$
- Pomocí vzorce z předchozí věty: $\color{red}{a}x + \color{blue}{b} = \color{red}{5}x + \color{blue}{1}$

$$f(x) = \sin(x) \Longrightarrow F(x) = -\cos x$$
$$f(ax+b) = \sin(5x+1) \Longrightarrow F(ax+b) = -\cos(5x+1)$$

$$\Longrightarrow \int \sin(5x+1)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{5}\cos(5x+1)+c$$

Příklad

1. $\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin 2x + c$
2. $\int (3-5x)^6\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{7}(3-5x)^7 = -\frac{1}{35}(3-5x)^7 + c$
3. $\int \frac{1}{2x-3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|2x-3| + c$
4. $\int e^{2-x}\,\mathrm{d}x = -e^{2-x} + c$
5. $\int \sin\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \int \sin\left(\frac{1}{2}x\right)\,\mathrm{d}x = -2\cos\frac{x}{2} + c$

Příklady lze řešit substitucemi:

$$t=2x,\ t=3-5x,\ t=2x-3,\ t=2-x,\ t=\frac{x}{2}.$$

Derivace jmenovatele v čitateli

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = f(x) \\ \mathrm{d}t = f'(x)\,\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln|t| + c = \ln|f(x)| + c$$

$$\Longrightarrow \boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c}$$

Příklad

1. $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2-3}\,\mathrm{d}x = \ln\left|x^2-3\right| + c$
2. $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2-3}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2-3}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ln\left|x^2-3\right| + c$
3. $\displaystyle\int \mathrm{tg}x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + c$
4. $\displaystyle\int \mathrm{cotg}x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + c$

Integrace goniometrických funkcí

Integrál typu $\displaystyle\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$, kde R je racionální lomená funkce, lze speciálními substitucemi převést na integrál z racionální lomené funkce. Zejména, je-li možné psát integrál ve tvaru:

1. $\displaystyle\int R(\sin x)\cos x\,\mathrm{d}x \Longrightarrow$ volíme substituci $t = \sin x$
2. $\displaystyle\int R(\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x \Longrightarrow$ volíme substituci $t = \cos x$

Poznámka

- Příklady funkcí typu $R(\sin x, \cos x)$: $\displaystyle\frac{\sin x\cos^2 x}{\sin^2 x + \cos x}, \frac{\cos^3 x + 1}{\sin^2 x}$
- Příklady funkcí typu $R(\sin x)$: $\displaystyle\frac{\sin x + 2}{\sin^2 x}, \frac{2\sin x}{\sin x - 1}$
- Příklady funkcí typu $R(\cos x)$: $\displaystyle\frac{\cos x}{\cos^2 x + 3}, \frac{\cos^2 x + \cos x}{\cos x + 1}$

Příklad

1. $$\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + 2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x + 2}\cos x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \sin x \\ \mathrm{d}t = \cos x\,\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int \frac{t}{t^2+2}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln(t^2+2) + c = \frac{1}{2}\ln(\sin^2 x + 2) + c$$

2. $$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^3 x}\sin x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \cos x \\ \mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x \\ \sin x\,\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = -\int \frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t$$
$$= -\int t^{-3}\,\mathrm{d}t = -\frac{t^{-2}}{-2} + c = \frac{1}{2t^2} + c = \frac{1}{2\cos^2 x} + c$$

3. $$(*)\ \int \frac{\sin^3 x}{\cos x + 3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos x + 3}\sin x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos x + 3}\sin x\,\mathrm{d}x$$
$$= \left| \begin{array}{c} t = \cos x \\ \mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x \\ \sin x\,\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{t^2-1}{t+3}\,\mathrm{d}t = \int \left(t - 3 + \frac{8}{t+3}\right)\mathrm{d}t$$
$$= \frac{t^2}{2} - 3t + 8\ln|t+3| + c = \frac{\cos^2 x}{2} - 3\cos x + 8\ln|\cos x + 3| + c$$

Věta (2. substituční metoda, $x = \varphi(t)$)

Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na otevřeném intervalu I a funkce $\varphi(t)$ má na otevřeném intervalu J spojitou nenulovou derivaci, přičemž $\varphi(J) = I$ (tj. φ zobrazuje interval J na interval I). Potom na intervalu I platí

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t,$$

dosadíme-li do výrazu vpravo $t = \varphi^{-1}(x)$, kde φ^{-1} je inverzní funkce k funkci φ.

- Prakticky provádíme substituci tak, že do funkce f vložíme vnitřní složku $\varphi(t)$. Přestože se nově získaná složená funkce zdá být složitější, může být integrování takové funkce v některých konkrétních případech jednodušší.
- Postup integrace vypadá takto:

$$\boxed{\int f(x)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x = \varphi(t) \\ \mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + c = F[\varphi^{-1}(x)] + c},$$

kde $F(t)$ je primitivní funkce k funkci $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$.

Integrace iracionálních funkcí

Integrál typu

$$\int R(x,\ \sqrt[n_1]{ax+b},\ \sqrt[n_2]{ax+b},\dots)\,\mathrm{d}x,$$

kde R je racionální lomená funkce, lze substitucí

$$t=\sqrt[s]{ax+b},\quad \text{kde } s \text{ je nejmenší společný násobek čísel } n_1,n_2,\dots$$

převést na integrál z racionální lomené funkce.

Substituci provádíme následovně:

$$\begin{aligned} t=\sqrt[s]{ax+b} \Longrightarrow ax+b&=t^s\\ x&=\frac{1}{a}t^s-\frac{b}{a}\\ \mathrm{d}x&=\frac{1}{a}st^{s-1}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Příklad

1. $$\int\frac{x}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x=\left|\begin{array}{c} t=\sqrt{x+1}\Rightarrow x=t^2-1\\ \mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t\end{array}\right|=\int\frac{t^2-1}{t}2t\,\mathrm{d}t$$
$$=2\int(t^2-1)\,\mathrm{d}t=2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)+c=\frac{2}{3}(\sqrt{x+1})^3-2\sqrt{x+1}+c$$

2. $$\int\frac{2}{\sqrt{x}(x+1)}\,\mathrm{d}x=\left|\begin{array}{c} t=\sqrt{x}\Rightarrow x=t^2\\ \mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t\end{array}\right|=\int\frac{2}{t(t^2+1)}2t\,\mathrm{d}t$$
$$=4\int\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t=4\,\mathrm{arctg}t+c=4\,\mathrm{arctg}\sqrt{x}+c$$

3. $$\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}\,\mathrm{d}x=\left|\begin{array}{c} t=\sqrt[6]{x}\Rightarrow x=t^6\\ \mathrm{d}x=6t^5\,\mathrm{d}t\end{array}\right|=\int\frac{t^3}{t^2+1}6t^5\,\mathrm{d}t=6\int\frac{t^8}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$
$$=6\int\left(t^6-t^4+t^2-1+\frac{1}{t^2+1}\right)\,\mathrm{d}t=6\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}-t+\mathrm{arctg}t\right)+c$$
$$=\frac{6\sqrt[6]{x^7}}{7}-\frac{6\sqrt[6]{x^5}}{5}+2\sqrt{x}-6\sqrt[6]{x}+6\cdot\mathrm{arctg}\sqrt[6]{x}+c$$

Metoda per partes

Věta (Integrování metodou per partes (po částech))

Nechť funkce u a v mají spojité derivace na intervalu I. Pak na intervalu I platí

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Metoda per partes je vlastně přepsané pravidlo pro derivaci součinu dvou funkcí.
2. Abychom mohli použít vzorec pro integraci per partes, musíme
   - zderivovat funkci u,
   - zintegrovat funkci v'. To může být však problém!!!

   Navíc, aby použití metody mělo smysl, by měl být součin $u'v$ (v integrálu na pravé straně) “snadněji zintegrovatelný” než původní uv'.

Typy integrálů vhodné pro použití metody per partes

Nechť P je polynom.

1. $$\int P(x)e^{ax+b}\,\mathrm{d}x, \quad \int P(x)\sin(ax+b)\,\mathrm{d}x, \int P(x)\cos(ax+b)\,\mathrm{d}x$$

   V těchto případech derivujeme polynom, druhou funkci integrujeme. Přitom metodu aplikujeme tolikrát, kolik je stupeň polynomu.

2. $$\int P(x)\ln^m(ax+b)\,\mathrm{d}x$$
   $$\int P(x)\mathrm{arctg}(ax+b)\,\mathrm{d}x, \quad \int P(x)\mathrm{arccotg}(ax+b)\,\mathrm{d}x$$
   $$\int P(x)\arcsin(ax+b)\,\mathrm{d}x, \quad \int P(x)\arccos(ax+b)\,\mathrm{d}x$$

   V těchto případech naopak integrujeme polynom, druhou funkci derivujeme. Toto zahrnuje zejména i případy, kdy $P(x) = 1$.

Příklad (Per partes – derivace polynomu)

1. $$\int x\cos x\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{ll} u = x & v' = \cos x \\ u' = 1 & v = \sin x \end{array}\right| = x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x$$
$$= x\sin x + \cos x + c$$

2. $$\int (x^2+1)e^{-x}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{ll} u = x^2+1 & v' = e^{-x} \\ u' = 2x & v = -e^{-x} \end{array}\right|$$
$$= (x^2+1)(-e^{-x}) - \int 2x(-e^{-x})\,\mathrm{d}x$$
$$= -e^{-x}(x^2+1) + 2\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{ll} u = x & v' = e^{-x} \\ u' = 1 & v = -e^{-x} \end{array}\right|$$
$$= -e^{-x}(x^2+1) + 2\left[x(-e^{-x}) - \int 1\cdot(-e^{-x})\,\mathrm{d}x\right]$$
$$= -e^{-x}(x^2+1) - 2xe^{-x} + 2\int e^{-x}\,\mathrm{d}x$$
$$= -e^{-x}(x^2+1) - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + c = -e^{-x}(x^2-2x+3) + c$$

Příklad (Per partes – integrace polynomu)

1. $$\int \ln x\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{ll} u = \ln x & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x} & v = x \end{array}\right| = x\ln x - \int \frac{1}{x}\cdot x\,\mathrm{d}x$$
$$= x\ln x - \int \mathrm{d}x = x\ln x - x + c$$

2. $$\int x\,\mathrm{arctg}x\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{ll} u = \mathrm{arctg}x & v' = x \\ u' = \frac{1}{x^2+1} & v = \frac{x^2}{2} \end{array}\right| = \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}x - \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}x - \frac{1}{2}(x - \mathrm{arctg}x) + c$$

Využití systémů počítačové algebry

Využití systémů Sage, Maxima, Wolfram Alpha:

http://user.mendelu.cz/marik/akademie/integralni-pocet.html

Matematické výpočty online (MAW):

http://um.mendelu.cz/maw-html/index.php?lang=cs&form=integral