

# Neurčitý integrál

## Základy vyšší matematiky

LDF MENDELU



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Podpořeno projektem Průřezová inovace studijních programů Lesnické a dřevařské fakulty MENDELU v Brně (LDF) s ohledem na disciplíny společného základu <http://akademie.ldf.mendelu.cz/cz> (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0021) za přispění finančních prostředků EU a státního rozpočtu České republiky.

## Definice (Primitivní funkce)

Nechť  $f$  a  $F$  jsou funkce definované na otevřeném intervalu  $I$ . Funkce  $F$  se nazývá **primitivní funkce** k funkci  $f$  na intervalu  $I$ , jestliže

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pro každé } x \in I.$$

Z definice přímo vyplývá, že je-li  $F$  primitivní funkce k funkci  $f$  na  $I$ , pak zřejmě i funkce  $F + c$ , kde  $c$  je libovolná reálná konstanta, je primitivní funkce k funkci  $f$  na  $I$ , neboť platí:

$$[F(x) + c]' = F'(x) + c' = f(x) + 0 = f(x)$$

Existuje-li tedy na daném intervalu primitivní funkce k funkci  $f$ , pak jich existuje nekonečně mnoho.

## Příklad

Primitivní funkce k funkci  $y = x^3$  jsou například funkce

$$y = \frac{x^4}{4}, \quad y = \frac{x^4}{4} + 3, \quad y = \frac{x^4}{4} - 7,$$

neboť

$$\left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3, \quad \left(\frac{x^4}{4} + 3\right)' = x^3, \quad \left(\frac{x^4}{4} - 7\right)' = x^3.$$

Zřejmě každá funkce tvaru  $y = \frac{x^4}{4} + c$ , kde  $c \in \mathbb{R}$ , je primitivní k funkci  $y = x^3$ .

## Věta (Jednoznačnost primitivní funkce)

*Nechť  $F$  a  $G$  je dvojice primitivních funkcí k funkci  $f$  na intervalu  $I$ . Pak existuje konstanta  $c \in \mathbb{R}$  taková, že  $G(x) = F(x) + c$  pro každé  $x \in I$ .*

Předchozí věta říká, že každé dvě primitivní funkce k funkci  $f$  se na daném intervalu liší jen o aditivní konstantu. Primitivní funkce je tedy až na aditivní konstantu určena jednoznačně. Známe-li tedy jednu primitivní funkci, pak známe všechny.

## Definice (Neurčitý integrál)

Množinu všech primitivních funkcí k funkci  $f$  značíme  $\int f(x) dx$  a nazýváme **neurčitý integrál**. Platí tedy

$$\int f(x) dx = F(x) + c,$$

kde  $F$  je libovolná primitivní funkce k funkci  $f$  a  $c$  je libovolná reálná konstanta.

Funkce  $f$  se nazývá **integrand**, konstanta  $c$  se nazývá **integrační konstanta**. Výraz  $dx$  je tzv. **diferenciál** proměnné  $x$  a říká jak je označena proměnná. Proces nalezení primitivní funkce k dané funkci nazýváme **integrování**. Integrační konstantu obvykle během výpočtu nepíšeme. Bývá zvykem ji psát až k výsledné primitivní funkci nebo se vynechává úplně.

Zřejmě platí:

$$\left( \int f(x) dx \right)' = f(x) \quad \text{a} \quad \int (F(x))' dx = F(x) + c$$

## Věta (Postačující podmínka pro existenci primitivní funkce)

*Je-li funkce  $f$  spojitá na intervalu  $I$ , pak k ní existuje primitivní funkce na tomto intervalu.*

- Existují funkce (nespojité), k nimž neexistuje na daném intervalu primitivní funkce.
- Existují funkce, které jsou spojité, tedy k nim existuje primitivní funkce, ale tyto primitivní funkce nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí. Takové primitivní funkce se nazývají **vyšší transcendentní**, například

$$\int e^{-x^2} dx, \quad \int \frac{e^x}{x} dx, \\ \int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \frac{\cos x}{x} dx, \quad \int \sin x^2 dx, \quad \int \cos x^2 dx.$$

# Základní vzorce a pravidla pro integrování

$$\int 0 \, dx = c$$

$$\int 1 \, dx = x + c$$

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int e^x \, dx = e^x + c$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + c$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\operatorname{cotg} x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + c$$

$$\int \frac{1}{x^2+1} \, dx = \operatorname{arctg} x + c$$

• Místo  $\int 1 \, dx$  bývá zvykem psát  $\int dx$ .

• Často také píšeme  $\int \frac{dx}{x}$  místo  $\int \frac{1}{x} \, dx$ ,  
obecněji:

$$\int \frac{dx}{f(x)} = \int \frac{1}{f(x)} \, dx.$$



## Věta (Základní pravidla pro integrování)

*Nechť  $f$  a  $g$  jsou funkce, k nimž existují primitivní funkce na intervalu  $I$  a necht'  $c \in \mathbb{R}$ . Pak na  $I$  platí:*

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$
$$\int c \cdot f(x) dx = c \int f(x) dx$$

**Nemáme k dispozici žádné obecné pravidlo pro integrování součinu, podílu ani složené funkce!!!**

## Příklad (Integrovaní mocninných funkcí a polynomů)

$$\textcircled{1} \int x^3 dx$$

## Příklad (Integrovaní mocninných funkcí a polynomů)

$$\textcircled{1} \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$$

## Příklad (Integrovaní mocninných funkcí a polynomů)

$$\textcircled{1} \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$$

$$\textcircled{2} \int \sqrt{x} dx$$

## Příklad (Integrovaní mocninných funkcí a polynomů)

$$\textcircled{1} \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$$

$$\textcircled{2} \int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx$$

## Příklad (Integrovaní mocninných funkcí a polynomů)

$$\textcircled{1} \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$$

$$\textcircled{2} \int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$$

## Příklad (Integrovaní mocninných funkcí a polynomů)

$$\textcircled{1} \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$$

$$\textcircled{2} \int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c$$

## Příklad (Integrovaní mocninných funkcí a polynomů)

$$\textcircled{1} \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$$

$$\textcircled{2} \int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c$$

$$\textcircled{3} \int \frac{1}{x^4} dx$$



## Příklad (Integrovaní mocninných funkcí a polynomů)

$$\textcircled{1} \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$$

$$\textcircled{2} \int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c$$

$$\textcircled{3} \int \frac{1}{x^4} dx = \int x^{-4} dx$$

## Příklad (Integrovaní mocninných funkcí a polynomů)

$$\textcircled{1} \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$$

$$\textcircled{2} \int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c$$

$$\textcircled{3} \int \frac{1}{x^4} dx = \int x^{-4} dx = \frac{x^{-3}}{-3}$$

## Příklad (Integrovaní mocninných funkcí a polynomů)

$$\textcircled{1} \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$$

$$\textcircled{2} \int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c$$

$$\textcircled{3} \int \frac{1}{x^4} dx = \int x^{-4} dx = \frac{x^{-3}}{-3} = -\frac{1}{3x^3} + c$$

## Příklad (Integrovaní mocninných funkcí a polynomů)

$$\textcircled{1} \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$$

$$\textcircled{2} \int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c$$

$$\textcircled{3} \int \frac{1}{x^4} dx = \int x^{-4} dx = \frac{x^{-3}}{-3} = -\frac{1}{3x^3} + c$$

$$\textcircled{4} \int (x^4 + 2x^3 + x - 2) dx$$

## Příklad (Integrovaní mocninných funkcí a polynomů)

$$\textcircled{1} \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$$

$$\textcircled{2} \int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c$$

$$\textcircled{3} \int \frac{1}{x^4} dx = \int x^{-4} dx = \frac{x^{-3}}{-3} = -\frac{1}{3x^3} + c$$

$$\textcircled{4} \int (x^4 + 2x^3 + x - 2) dx = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^2}{2} - 2x + c$$

## Příklad (Základní vzorce a jednoduché úpravy)

- 1 Vynásobení mocninných funkcí

$$\int x^2 \sqrt{x} \, dx$$

## Příklad (Základní vzorce a jednoduché úpravy)

- 1 Vynásobení mocninných funkcí

$$\int x^2 \sqrt{x} \, dx = \int x^{\frac{5}{2}} \, dx$$

## Příklad (Základní vzorce a jednoduché úpravy)

- 1 Vynásobení mocninných funkcí

$$\int x^2 \sqrt{x} \, dx = \int x^{\frac{5}{2}} \, dx = \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}$$



## Příklad (Základní vzorce a jednoduché úpravy)

- 1 Vynásobení mocninných funkcí

$$\int x^2 \sqrt{x} \, dx = \int x^{\frac{5}{2}} \, dx = \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} = \frac{2}{7} x^3 \sqrt{x} + c$$

## Příklad (Základní vzorce a jednoduché úpravy)

- 1 Vynásobení mocninných funkcí

$$\int x^2 \sqrt{x} \, dx = \int x^{\frac{5}{2}} \, dx = \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} = \frac{2}{7} x^3 \sqrt{x} + c$$

- 2 Rozdělení na více jednodušších zlomků

$$\int \frac{x+3}{x^2} \, dx$$

## Příklad (Základní vzorce a jednoduché úpravy)

- 1 Vynásobení mocninných funkcí

$$\int x^2 \sqrt{x} \, dx = \int x^{\frac{5}{2}} \, dx = \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} = \frac{2}{7} x^3 \sqrt{x} + c$$

- 2 Rozdělení na více jednodušších zlomků

$$\int \frac{x+3}{x^2} \, dx = \int \left( \frac{x}{x^2} + \frac{3}{x^2} \right) \, dx$$

## Příklad (Základní vzorce a jednoduché úpravy)

- 1 Vynásobení mocninných funkcí

$$\int x^2 \sqrt{x} \, dx = \int x^{\frac{5}{2}} \, dx = \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} = \frac{2}{7} x^3 \sqrt{x} + c$$

- 2 Rozdělení na více jednodušších zlomků

$$\int \frac{x+3}{x^2} \, dx = \int \left( \frac{x}{x^2} + \frac{3}{x^2} \right) \, dx = \int \left( \frac{1}{x} + 3x^{-2} \right) \, dx$$

## Příklad (Základní vzorce a jednoduché úpravy)

- 1 Vynásobení mocninných funkcí

$$\int x^2 \sqrt{x} \, dx = \int x^{\frac{5}{2}} \, dx = \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} = \frac{2}{7} x^3 \sqrt{x} + c$$

- 2 Rozdělení na více jednodušších zlomků

$$\begin{aligned} \int \frac{x+3}{x^2} \, dx &= \int \left( \frac{x}{x^2} + \frac{3}{x^2} \right) \, dx = \int \left( \frac{1}{x} + 3x^{-2} \right) \, dx \\ &= \ln|x| + 3 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} \end{aligned}$$

## Příklad (Základní vzorce a jednoduché úpravy)

- 1 Vynásobení mocninných funkcí

$$\int x^2 \sqrt{x} \, dx = \int x^{\frac{5}{2}} \, dx = \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} = \frac{2}{7} x^3 \sqrt{x} + c$$

- 2 Rozdělení na více jednodušších zlomků

$$\begin{aligned} \int \frac{x+3}{x^2} \, dx &= \int \left( \frac{x}{x^2} + \frac{3}{x^2} \right) \, dx = \int \left( \frac{1}{x} + 3x^{-2} \right) \, dx \\ &= \ln|x| + 3 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} = \ln|x| - \frac{3}{x} + c \end{aligned}$$

## Příklad (Základní vzorce a jednoduché úpravy)

- ❶ Vynásobení mocninných funkcí

$$\int x^2 \sqrt{x} \, dx = \int x^{\frac{5}{2}} \, dx = \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} = \frac{2}{7} x^3 \sqrt{x} + c$$

- ❷ Rozdělení na více jednodušších zlomků

$$\begin{aligned} \int \frac{x+3}{x^2} \, dx &= \int \left( \frac{x}{x^2} + \frac{3}{x^2} \right) \, dx = \int \left( \frac{1}{x} + 3x^{-2} \right) \, dx \\ &= \ln|x| + 3 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} = \ln|x| - \frac{3}{x} + c \end{aligned}$$

- ❸ Neryze lomenou racionální funkci vždy upravíme na součet polynomu a ryzí racionální lomené funkce (čitatele vydělíme jmenovatelem)

$$\int \frac{x^4}{x^2+1} \, dx$$

## Příklad (Základní vzorce a jednoduché úpravy)

- ❶ Vynásobení mocninných funkcí

$$\int x^2 \sqrt{x} \, dx = \int x^{\frac{5}{2}} \, dx = \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} = \frac{2}{7} x^3 \sqrt{x} + c$$

- ❷ Rozdělení na více jednodušších zlomků

$$\begin{aligned} \int \frac{x+3}{x^2} \, dx &= \int \left( \frac{x}{x^2} + \frac{3}{x^2} \right) \, dx = \int \left( \frac{1}{x} + 3x^{-2} \right) \, dx \\ &= \ln|x| + 3 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} = \ln|x| - \frac{3}{x} + c \end{aligned}$$

- ❸ Neryze lomenou racionální funkci vždy upravíme na součet polynomu a ryzí racionální lomené funkce (čitatele vydělíme jmenovatelem)

$$\int \frac{x^4}{x^2+1} \, dx = \int \left( x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1} \right) \, dx$$



## Příklad (Základní vzorce a jednoduché úpravy)

- 1 Vynásobení mocninných funkcí

$$\int x^2 \sqrt{x} \, dx = \int x^{\frac{5}{2}} \, dx = \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} = \frac{2}{7} x^3 \sqrt{x} + c$$

- 2 Rozdělení na více jednodušších zlomků

$$\begin{aligned} \int \frac{x+3}{x^2} \, dx &= \int \left( \frac{x}{x^2} + \frac{3}{x^2} \right) \, dx = \int \left( \frac{1}{x} + 3x^{-2} \right) \, dx \\ &= \ln|x| + 3 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} = \ln|x| - \frac{3}{x} + c \end{aligned}$$

- 3 Neryze lomenou racionální funkci vždy upravíme na součet polynomu a ryzi racionální lomené funkce (čitatele vydělíme jmenovatelem)

$$\int \frac{x^4}{x^2+1} \, dx = \int \left( x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1} \right) \, dx = \frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arctg}x + c$$

# Substituční metoda

## Věta (1. substituční metoda, $t = \varphi(x)$ )

Nechť funkce  $f(t)$  je spojitá na otevřeném intervalu  $I$  a funkce  $\varphi(x)$  má na otevřeném intervalu  $J$  spojitou derivaci, přičemž pro libovolné  $x \in J$  je  $\varphi(x) \in I$ . Pak je funkce  $f[\varphi(x)]\varphi'(x)$  spojitá na  $J$  a na tomto intervalu platí

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x) dx = \int f(t) dt,$$

dosadíme-li do výrazu vpravo  $t = \varphi(x)$ .

- Uvedenou substituci lze použít při integrování funkcí typu “složená funkce  $f[\varphi(x)]$  krát derivace vnitřní složky této funkce  $\varphi'(x)$ ”
- Prakticky provádíme substituci tak, že vnitřní složku nahradíme novou proměnnou (např.  $t$ ). Tedy  $t = \varphi(x)$  a dále platí  $dt = \varphi'(x) dx$ .
- Je-li  $F$  primitivní funkce k funkci  $f$ , pak postup integrace vypadá takto:

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x) dx = \left| \begin{array}{l} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x) dx \end{array} \right| = \int f(t) dt = F(t) + c = F[\varphi(x)] + c$$

## Příklad (1. substituční metoda)

$$\textcircled{1} \int \sin(3x + 2) dx$$

## Příklad (1. substituční metoda)

$$\textcircled{1} \int \sin(3x + 2) \, dx = \left| \begin{array}{l} t = 3x + 2 \\ dt = 3 \, dx \\ dx = \frac{1}{3} \, dt \end{array} \right|$$

## Příklad (1. substituční metoda)

$$\textcircled{1} \int \sin(3x + 2) dx = \left| \begin{array}{l} t = 3x + 2 \\ dt = 3 dx \\ dx = \frac{1}{3} dt \end{array} \right| = \frac{1}{3} \int \sin t dt$$

## Příklad (1. substituční metoda)

$$\textcircled{1} \int \sin(3x + 2) dx = \left| \begin{array}{l} t = 3x + 2 \\ dt = 3 dx \\ dx = \frac{1}{3} dt \end{array} \right| = \frac{1}{3} \int \sin t dt = -\frac{1}{3} \cos t + c$$

## Příklad (1. substituční metoda)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \sin(3x + 2) dx &= \left. \begin{array}{l} t = 3x + 2 \\ dt = 3 dx \\ dx = \frac{1}{3} dt \end{array} \right| = \frac{1}{3} \int \sin t dt = -\frac{1}{3} \cos t + c \\ &= -\frac{1}{3} \cos(3x + 2) + c \end{aligned}$$

## Příklad (1. substituční metoda)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \sin(3x + 2) dx &= \left| \begin{array}{l} t = 3x + 2 \\ dt = 3 dx \\ dx = \frac{1}{3} dt \end{array} \right| = \frac{1}{3} \int \sin t dt = -\frac{1}{3} \cos t + c \\ &= -\frac{1}{3} \cos(3x + 2) + c \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \int \sin^2 x \cos x dx = \int (\sin x)^2 \cdot \cos x dx$$



## Příklad (1. substituční metoda)

$$\textcircled{1} \int \sin(3x + 2) dx = \left| \begin{array}{l} t = 3x + 2 \\ dt = 3 dx \\ dx = \frac{1}{3} dt \end{array} \right| = \frac{1}{3} \int \sin t dt = -\frac{1}{3} \cos t + c$$
$$= -\frac{1}{3} \cos(3x + 2) + c$$

$$\textcircled{2} \int \sin^2 x \cos x dx = \int (\sin x)^2 \cdot \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right|$$

## Příklad (1. substituční metoda)

$$\textcircled{1} \int \sin(3x + 2) dx = \left| \begin{array}{l} t = 3x + 2 \\ dt = 3 dx \\ dx = \frac{1}{3} dt \end{array} \right| = \frac{1}{3} \int \sin t dt = -\frac{1}{3} \cos t + c$$
$$= -\frac{1}{3} \cos(3x + 2) + c$$

$$\textcircled{2} \int \sin^2 x \cos x dx = \int (\sin x)^2 \cdot \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int t^2 dt$$

## Příklad (1. substituční metoda)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \sin(3x + 2) dx &= \left| \begin{array}{l} t = 3x + 2 \\ dt = 3 dx \\ dx = \frac{1}{3} dt \end{array} \right| = \frac{1}{3} \int \sin t dt = -\frac{1}{3} \cos t + c \\ &= -\frac{1}{3} \cos(3x + 2) + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \int \sin^2 x \cos x dx &= \int (\sin x)^2 \cdot \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int t^2 dt \\ &= \frac{t^3}{3} + c \end{aligned}$$

## Příklad (1. substituční metoda)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \sin(3x + 2) \, dx &= \left| \begin{array}{l} t = 3x + 2 \\ dt = 3 \, dx \\ dx = \frac{1}{3} \, dt \end{array} \right| = \frac{1}{3} \int \sin t \, dt = -\frac{1}{3} \cos t + c \\ &= -\frac{1}{3} \cos(3x + 2) + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \int \sin^2 x \cos x \, dx &= \int (\sin x)^2 \cdot \cos x \, dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x \, dx \end{array} \right| = \int t^2 \, dt \\ &= \frac{t^3}{3} + c = \frac{\sin^3 x}{3} + c \end{aligned}$$

## Příklad (1. substituční metoda)

$$\textcircled{1} \int \sin(3x + 2) dx = \left| \begin{array}{l} t = 3x + 2 \\ dt = 3 dx \\ dx = \frac{1}{3} dt \end{array} \right| = \frac{1}{3} \int \sin t dt = -\frac{1}{3} \cos t + c$$
$$= -\frac{1}{3} \cos(3x + 2) + c$$

$$\textcircled{2} \int \sin^2 x \cos x dx = \int (\sin x)^2 \cdot \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int t^2 dt$$
$$= \frac{t^3}{3} + c = \frac{\sin^3 x}{3} + c$$

$$\textcircled{3} \int x \cdot e^{1-x^2} dx$$

## Příklad (1. substituční metoda)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \sin(3x + 2) dx &= \left| \begin{array}{l} t = 3x + 2 \\ dt = 3 dx \\ dx = \frac{1}{3} dt \end{array} \right| = \frac{1}{3} \int \sin t dt = -\frac{1}{3} \cos t + c \\ &= -\frac{1}{3} \cos(3x + 2) + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \int \sin^2 x \cos x dx &= \int (\sin x)^2 \cdot \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int t^2 dt \\ &= \frac{t^3}{3} + c = \frac{\sin^3 x}{3} + c \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \int x \cdot e^{1-x^2} dx = \left| \begin{array}{l} t = 1 - x^2 \\ dt = -2x dx \\ x dx = -\frac{1}{2} dt \end{array} \right|$$

## Příklad (1. substituční metoda)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \sin(3x + 2) \, dx &= \left| \begin{array}{l} t = 3x + 2 \\ dt = 3 \, dx \\ dx = \frac{1}{3} \, dt \end{array} \right| = \frac{1}{3} \int \sin t \, dt = -\frac{1}{3} \cos t + c \\ &= -\frac{1}{3} \cos(3x + 2) + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \int \sin^2 x \cos x \, dx &= \int (\sin x)^2 \cdot \cos x \, dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x \, dx \end{array} \right| = \int t^2 \, dt \\ &= \frac{t^3}{3} + c = \frac{\sin^3 x}{3} + c \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \int x \cdot e^{1-x^2} \, dx = \left| \begin{array}{l} t = 1 - x^2 \\ dt = -2x \, dx \\ x \, dx = -\frac{1}{2} \, dt \end{array} \right| = -\frac{1}{2} \int e^t \, dt$$

## Příklad (1. substituční metoda)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \sin(3x + 2) \, dx &= \left| \begin{array}{l} t = 3x + 2 \\ dt = 3 \, dx \\ dx = \frac{1}{3} \, dt \end{array} \right| = \frac{1}{3} \int \sin t \, dt = -\frac{1}{3} \cos t + c \\ &= -\frac{1}{3} \cos(3x + 2) + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \int \sin^2 x \cos x \, dx &= \int (\sin x)^2 \cdot \cos x \, dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x \, dx \end{array} \right| = \int t^2 \, dt \\ &= \frac{t^3}{3} + c = \frac{\sin^3 x}{3} + c \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \int x \cdot e^{1-x^2} \, dx = \left| \begin{array}{l} t = 1 - x^2 \\ dt = -2x \, dx \\ x \, dx = -\frac{1}{2} \, dt \end{array} \right| = -\frac{1}{2} \int e^t \, dt = -\frac{1}{2} e^t + c$$



## Příklad (1. substituční metoda)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \sin(3x + 2) dx &= \left| \begin{array}{l} t = 3x + 2 \\ dt = 3 dx \\ dx = \frac{1}{3} dt \end{array} \right| = \frac{1}{3} \int \sin t dt = -\frac{1}{3} \cos t + c \\ &= -\frac{1}{3} \cos(3x + 2) + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \int \sin^2 x \cos x dx &= \int (\sin x)^2 \cdot \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int t^2 dt \\ &= \frac{t^3}{3} + c = \frac{\sin^3 x}{3} + c \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \int x \cdot e^{1-x^2} dx = \left| \begin{array}{l} t = 1 - x^2 \\ dt = -2x dx \\ x dx = -\frac{1}{2} dt \end{array} \right| = -\frac{1}{2} \int e^t dt = -\frac{1}{2} e^t + c = -\frac{1}{2} e^{1-x^2} + c$$

## Příklad (1. substituční metoda)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \sin(3x + 2) \, dx &= \left| \begin{array}{l} t = 3x + 2 \\ dt = 3 \, dx \\ dx = \frac{1}{3} \, dt \end{array} \right| = \frac{1}{3} \int \sin t \, dt = -\frac{1}{3} \cos t + c \\ &= -\frac{1}{3} \cos(3x + 2) + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \int \sin^2 x \cos x \, dx &= \int (\sin x)^2 \cdot \cos x \, dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x \, dx \end{array} \right| = \int t^2 \, dt \\ &= \frac{t^3}{3} + c = \frac{\sin^3 x}{3} + c \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \int x \cdot e^{1-x^2} \, dx = \left| \begin{array}{l} t = 1 - x^2 \\ dt = -2x \, dx \\ x \, dx = -\frac{1}{2} \, dt \end{array} \right| = -\frac{1}{2} \int e^t \, dt = -\frac{1}{2} e^t + c = -\frac{1}{2} e^{1-x^2} + c$$

$$\textcircled{4} \int x^3 \cdot \sqrt{x^4 + 1} \, dx$$

## Příklad (1. substituční metoda)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \sin(3x + 2) dx &= \left| \begin{array}{l} t = 3x + 2 \\ dt = 3 dx \\ dx = \frac{1}{3} dt \end{array} \right| = \frac{1}{3} \int \sin t dt = -\frac{1}{3} \cos t + c \\ &= -\frac{1}{3} \cos(3x + 2) + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \int \sin^2 x \cos x dx &= \int (\sin x)^2 \cdot \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int t^2 dt \\ &= \frac{t^3}{3} + c = \frac{\sin^3 x}{3} + c \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \int x \cdot e^{1-x^2} dx = \left| \begin{array}{l} t = 1 - x^2 \\ dt = -2x dx \\ x dx = -\frac{1}{2} dt \end{array} \right| = -\frac{1}{2} \int e^t dt = -\frac{1}{2} e^t + c = -\frac{1}{2} e^{1-x^2} + c$$

$$\textcircled{4} \int x^3 \cdot \sqrt{x^4 + 1} dx = \left| \begin{array}{l} t = x^4 + 1 \\ dt = 4x^3 dx \\ x^3 dx = \frac{1}{4} dt \end{array} \right|$$

## Příklad (1. substituční metoda)

$$\textcircled{1} \int \sin(3x + 2) dx = \left| \begin{array}{l} t = 3x + 2 \\ dt = 3 dx \\ dx = \frac{1}{3} dt \end{array} \right| = \frac{1}{3} \int \sin t dt = -\frac{1}{3} \cos t + c \\ = -\frac{1}{3} \cos(3x + 2) + c$$

$$\textcircled{2} \int \sin^2 x \cos x dx = \int (\sin x)^2 \cdot \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int t^2 dt \\ = \frac{t^3}{3} + c = \frac{\sin^3 x}{3} + c$$

$$\textcircled{3} \int x \cdot e^{1-x^2} dx = \left| \begin{array}{l} t = 1 - x^2 \\ dt = -2x dx \\ x dx = -\frac{1}{2} dt \end{array} \right| = -\frac{1}{2} \int e^t dt = -\frac{1}{2} e^t + c = -\frac{1}{2} e^{1-x^2} + c$$

$$\textcircled{4} \int x^3 \cdot \sqrt{x^4 + 1} dx = \left| \begin{array}{l} t = x^4 + 1 \\ dt = 4x^3 dx \\ x^3 dx = \frac{1}{4} dt \end{array} \right| = \frac{1}{4} \int \sqrt{t} dt$$

## Příklad (1. substituční metoda)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \sin(3x + 2) dx &= \left| \begin{array}{l} t = 3x + 2 \\ dt = 3 dx \\ dx = \frac{1}{3} dt \end{array} \right| = \frac{1}{3} \int \sin t dt = -\frac{1}{3} \cos t + c \\ &= -\frac{1}{3} \cos(3x + 2) + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \int \sin^2 x \cos x dx &= \int (\sin x)^2 \cdot \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int t^2 dt \\ &= \frac{t^3}{3} + c = \frac{\sin^3 x}{3} + c \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \int x \cdot e^{1-x^2} dx = \left| \begin{array}{l} t = 1 - x^2 \\ dt = -2x dx \\ x dx = -\frac{1}{2} dt \end{array} \right| = -\frac{1}{2} \int e^t dt = -\frac{1}{2} e^t + c = -\frac{1}{2} e^{1-x^2} + c$$

$$\textcircled{4} \int x^3 \cdot \sqrt{x^4 + 1} dx = \left| \begin{array}{l} t = x^4 + 1 \\ dt = 4x^3 dx \\ x^3 dx = \frac{1}{4} dt \end{array} \right| = \frac{1}{4} \int \sqrt{t} dt = \frac{1}{4} \int t^{\frac{1}{2}} dt$$

## Příklad (1. substituční metoda)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \sin(3x + 2) dx &= \left| \begin{array}{l} t = 3x + 2 \\ dt = 3 dx \\ dx = \frac{1}{3} dt \end{array} \right| = \frac{1}{3} \int \sin t dt = -\frac{1}{3} \cos t + c \\ &= -\frac{1}{3} \cos(3x + 2) + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \int \sin^2 x \cos x dx &= \int (\sin x)^2 \cdot \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int t^2 dt \\ &= \frac{t^3}{3} + c = \frac{\sin^3 x}{3} + c \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \int x \cdot e^{1-x^2} dx = \left| \begin{array}{l} t = 1 - x^2 \\ dt = -2x dx \\ x dx = -\frac{1}{2} dt \end{array} \right| = -\frac{1}{2} \int e^t dt = -\frac{1}{2} e^t + c = -\frac{1}{2} e^{1-x^2} + c$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \int x^3 \cdot \sqrt{x^4 + 1} dx &= \left| \begin{array}{l} t = x^4 + 1 \\ dt = 4x^3 dx \\ x^3 dx = \frac{1}{4} dt \end{array} \right| = \frac{1}{4} \int \sqrt{t} dt = \frac{1}{4} \int t^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + c \end{aligned}$$

## Příklad (1. substituční metoda)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \sin(3x + 2) dx &= \left| \begin{array}{l} t = 3x + 2 \\ dt = 3 dx \\ dx = \frac{1}{3} dt \end{array} \right| = \frac{1}{3} \int \sin t dt = -\frac{1}{3} \cos t + c \\ &= -\frac{1}{3} \cos(3x + 2) + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \int \sin^2 x \cos x dx &= \int (\sin x)^2 \cdot \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int t^2 dt \\ &= \frac{t^3}{3} + c = \frac{\sin^3 x}{3} + c \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \int x \cdot e^{1-x^2} dx = \left| \begin{array}{l} t = 1 - x^2 \\ dt = -2x dx \\ x dx = -\frac{1}{2} dt \end{array} \right| = -\frac{1}{2} \int e^t dt = -\frac{1}{2} e^t + c = -\frac{1}{2} e^{1-x^2} + c$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \int x^3 \cdot \sqrt{x^4 + 1} dx &= \left| \begin{array}{l} t = x^4 + 1 \\ dt = 4x^3 dx \\ x^3 dx = \frac{1}{4} dt \end{array} \right| = \frac{1}{4} \int \sqrt{t} dt = \frac{1}{4} \int t^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{6} \sqrt{t^3} + c \end{aligned}$$

## Příklad (1. substituční metoda)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \sin(3x + 2) dx &= \left| \begin{array}{l} t = 3x + 2 \\ dt = 3 dx \\ dx = \frac{1}{3} dt \end{array} \right| = \frac{1}{3} \int \sin t dt = -\frac{1}{3} \cos t + c \\ &= -\frac{1}{3} \cos(3x + 2) + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \int \sin^2 x \cos x dx &= \int (\sin x)^2 \cdot \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int t^2 dt \\ &= \frac{t^3}{3} + c = \frac{\sin^3 x}{3} + c \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \int x \cdot e^{1-x^2} dx = \left| \begin{array}{l} t = 1 - x^2 \\ dt = -2x dx \\ x dx = -\frac{1}{2} dt \end{array} \right| = -\frac{1}{2} \int e^t dt = -\frac{1}{2} e^t + c = -\frac{1}{2} e^{1-x^2} + c$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \int x^3 \cdot \sqrt{x^4 + 1} dx &= \left| \begin{array}{l} t = x^4 + 1 \\ dt = 4x^3 dx \\ x^3 dx = \frac{1}{4} dt \end{array} \right| = \frac{1}{4} \int \sqrt{t} dt = \frac{1}{4} \int t^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{6} \sqrt{t^3} + c = \frac{1}{6} \sqrt{(x^4 + 1)^3} + c \end{aligned}$$



## Integrace funkce s lineární vnitřní složkou

Nechť  $F$  je primitivní funkce k funkci  $f$  na intervalu  $I$ . Pak pro  $ax + b \in I$  platí

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + c.$$

## Integrace funkce s lineární vnitřní složkou

Nechť  $F$  je primitivní funkce k funkci  $f$  na intervalu  $I$ . Pak pro  $ax + b \in I$  platí

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + c.$$

### Příklad

$$\int \sin(5x + 1) dx$$

- Substitucí:  $\int \sin(5x + 1) dx = \left| \begin{array}{l} t = 5x + 1 \\ dt = 5 dx \\ dx = \frac{1}{5} dt \end{array} \right| = \frac{1}{5} \int \sin t dt = -\frac{1}{5} \cos t + c = -\frac{1}{5} \cos(5x + 1) + c$

- Pomocí vzorce z předchozí věty:  $ax + b = 5x + 1$

$$f(x) = \sin(x) \implies F(x) = -\cos x$$

$$f(ax + b) = \sin(5x + 1) \implies F(ax + b) = -\cos(5x + 1)$$

$$\implies \int \sin(5x + 1) dx = -\frac{1}{5} \cos(5x + 1) + c$$

## Příklad

$$① \int \cos 2x \, dx$$

## Příklad

$$\textcircled{1} \int \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + c$$

## Příklad

$$① \int \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + c$$

$$② \int (3 - 5x)^6 \, dx$$

## Příklad

$$\textcircled{1} \int \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + c$$

$$\textcircled{2} \int (3 - 5x)^6 \, dx = -\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7} (3 - 5x)^7$$

## Příklad

$$\textcircled{1} \int \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + c$$

$$\textcircled{2} \int (3 - 5x)^6 \, dx = -\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7} (3 - 5x)^7 = -\frac{1}{35} (3 - 5x)^7 + c$$

## Příklad

$$\textcircled{1} \int \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + c$$

$$\textcircled{2} \int (3 - 5x)^6 \, dx = -\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7} (3 - 5x)^7 = -\frac{1}{35} (3 - 5x)^7 + c$$

$$\textcircled{3} \int \frac{1}{2x - 3} \, dx$$



## Příklad

$$\textcircled{1} \int \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + c$$

$$\textcircled{2} \int (3 - 5x)^6 \, dx = -\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7} (3 - 5x)^7 = -\frac{1}{35} (3 - 5x)^7 + c$$

$$\textcircled{3} \int \frac{1}{2x - 3} \, dx = \frac{1}{2} \ln |2x - 3| + c$$

## Příklad

$$\textcircled{1} \int \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + c$$

$$\textcircled{2} \int (3 - 5x)^6 \, dx = -\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7} (3 - 5x)^7 = -\frac{1}{35} (3 - 5x)^7 + c$$

$$\textcircled{3} \int \frac{1}{2x - 3} \, dx = \frac{1}{2} \ln |2x - 3| + c$$

$$\textcircled{4} \int e^{2-x} \, dx$$

## Příklad

$$\textcircled{1} \int \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + c$$

$$\textcircled{2} \int (3 - 5x)^6 \, dx = -\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7} (3 - 5x)^7 = -\frac{1}{35} (3 - 5x)^7 + c$$

$$\textcircled{3} \int \frac{1}{2x - 3} \, dx = \frac{1}{2} \ln |2x - 3| + c$$

$$\textcircled{4} \int e^{2-x} \, dx = -e^{2-x} + c$$

## Příklad

$$\textcircled{1} \int \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + c$$

$$\textcircled{2} \int (3 - 5x)^6 \, dx = -\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7} (3 - 5x)^7 = -\frac{1}{35} (3 - 5x)^7 + c$$

$$\textcircled{3} \int \frac{1}{2x - 3} \, dx = \frac{1}{2} \ln |2x - 3| + c$$

$$\textcircled{4} \int e^{2-x} \, dx = -e^{2-x} + c$$

$$\textcircled{5} \int \sin \frac{x}{2} \, dx$$

## Příklad

$$\textcircled{1} \int \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + c$$

$$\textcircled{2} \int (3 - 5x)^6 \, dx = -\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7} (3 - 5x)^7 = -\frac{1}{35} (3 - 5x)^7 + c$$

$$\textcircled{3} \int \frac{1}{2x - 3} \, dx = \frac{1}{2} \ln |2x - 3| + c$$

$$\textcircled{4} \int e^{2-x} \, dx = -e^{2-x} + c$$

$$\textcircled{5} \int \sin \frac{x}{2} \, dx = \int \sin \left( \frac{1}{2}x \right) \, dx = -2 \cos \frac{x}{2} + c$$

## Příklad

$$\textcircled{1} \int \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + c$$

$$\textcircled{2} \int (3 - 5x)^6 \, dx = -\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7} (3 - 5x)^7 = -\frac{1}{35} (3 - 5x)^7 + c$$

$$\textcircled{3} \int \frac{1}{2x - 3} \, dx = \frac{1}{2} \ln |2x - 3| + c$$

$$\textcircled{4} \int e^{2-x} \, dx = -e^{2-x} + c$$

$$\textcircled{5} \int \sin \frac{x}{2} \, dx = \int \sin \left( \frac{1}{2}x \right) \, dx = -2 \cos \frac{x}{2} + c$$

Příklady lze řešit substitucemi:

$$t = 2x, \quad t = 3 - 5x, \quad t = 2x - 3, \quad t = 2 - x, \quad t = \frac{x}{2}.$$

## Derivace jmenovatele v čitateli

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \left| \begin{array}{l} t = f(x) \\ dt = f'(x) dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + c = \ln |f(x)| + c$$

$$\Rightarrow \boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c}$$

## Derivace jmenovatele v čitateli

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \left| \begin{array}{l} t = f(x) \\ dt = f'(x) dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + c = \ln |f(x)| + c$$

$$\Rightarrow \boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c}$$

## Příklad

$$① \int \frac{2x}{x^2 - 3} dx$$



## Derivace jmenovatele v čitateli

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \left| \begin{array}{l} t = f(x) \\ dt = f'(x) dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + c = \ln |f(x)| + c$$

$$\Rightarrow \boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c}$$

## Příklad

$$\textcircled{1} \int \frac{2x}{x^2 - 3} dx = \ln |x^2 - 3| + c$$

## Derivace jmenovatele v čitateli

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \left| \begin{array}{l} t = f(x) \\ dt = f'(x) dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + c = \ln |f(x)| + c$$

$$\Rightarrow \boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c}$$

### Příklad

$$① \int \frac{2x}{x^2 - 3} dx = \ln |x^2 - 3| + c$$

$$② \int \frac{3x}{x^2 - 3} dx$$

## Derivace jmenovatele v čitateli

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \left| \begin{array}{l} t = f(x) \\ dt = f'(x) dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + c = \ln |f(x)| + c$$

$$\Rightarrow \boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c}$$

### Příklad

$$\textcircled{1} \int \frac{2x}{x^2 - 3} dx = \ln |x^2 - 3| + c$$

$$\textcircled{2} \int \frac{3x}{x^2 - 3} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x}{x^2 - 3} dx$$

## Derivace jmenovatele v čitateli

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \left| \begin{array}{l} t = f(x) \\ dt = f'(x) dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + c = \ln |f(x)| + c$$

$$\Rightarrow \boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c}$$

## Příklad

$$\textcircled{1} \int \frac{2x}{x^2 - 3} dx = \ln |x^2 - 3| + c$$

$$\textcircled{2} \int \frac{3x}{x^2 - 3} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x}{x^2 - 3} dx = \frac{3}{2} \ln |x^2 - 3| + c$$

## Derivace jmenovatele v čitateli

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \left| \begin{array}{l} t = f(x) \\ dt = f'(x) dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + c = \ln |f(x)| + c$$

$$\Rightarrow \boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c}$$

### Příklad

$$① \int \frac{2x}{x^2 - 3} dx = \ln |x^2 - 3| + c$$

$$② \int \frac{3x}{x^2 - 3} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x}{x^2 - 3} dx = \frac{3}{2} \ln |x^2 - 3| + c$$

$$③ \int \operatorname{tg} x dx$$

## Derivace jmenovatele v čitateli

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \left| \begin{array}{l} t = f(x) \\ dt = f'(x) dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + c = \ln |f(x)| + c$$

$$\Rightarrow \boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c}$$

## Příklad

$$\textcircled{1} \int \frac{2x}{x^2 - 3} dx = \ln |x^2 - 3| + c$$

$$\textcircled{2} \int \frac{3x}{x^2 - 3} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x}{x^2 - 3} dx = \frac{3}{2} \ln |x^2 - 3| + c$$

$$\textcircled{3} \int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

## Derivace jmenovatele v čitateli

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \left| \begin{array}{l} t = f(x) \\ dt = f'(x) dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + c = \ln |f(x)| + c$$

$$\Rightarrow \boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c}$$

## Příklad

$$\textcircled{1} \int \frac{2x}{x^2 - 3} dx = \ln |x^2 - 3| + c$$

$$\textcircled{2} \int \frac{3x}{x^2 - 3} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x}{x^2 - 3} dx = \frac{3}{2} \ln |x^2 - 3| + c$$

$$\textcircled{3} \int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx$$

## Derivace jmenovatele v čitateli

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \left| \begin{array}{l} t = f(x) \\ dt = f'(x) dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + c = \ln |f(x)| + c$$

$$\Rightarrow \boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c}$$

### Příklad

$$\textcircled{1} \int \frac{2x}{x^2 - 3} dx = \ln |x^2 - 3| + c$$

$$\textcircled{2} \int \frac{3x}{x^2 - 3} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x}{x^2 - 3} dx = \frac{3}{2} \ln |x^2 - 3| + c$$

$$\textcircled{3} \int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = - \ln |\cos x| + c$$



## Derivace jmenovatele v čitateli

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \left| \begin{array}{l} t = f(x) \\ dt = f'(x) dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + c = \ln |f(x)| + c$$

$$\Rightarrow \boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c}$$

### Příklad

$$① \int \frac{2x}{x^2 - 3} dx = \ln |x^2 - 3| + c$$

$$② \int \frac{3x}{x^2 - 3} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x}{x^2 - 3} dx = \frac{3}{2} \ln |x^2 - 3| + c$$

$$③ \int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = - \ln |\cos x| + c$$

$$④ \int \operatorname{cot} x dx$$

## Derivace jmenovatele v čitateli

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \left| \begin{array}{l} t = f(x) \\ dt = f'(x) dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + c = \ln |f(x)| + c$$

$$\Rightarrow \boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c}$$

### Příklad

$$\textcircled{1} \int \frac{2x}{x^2 - 3} dx = \ln |x^2 - 3| + c$$

$$\textcircled{2} \int \frac{3x}{x^2 - 3} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x}{x^2 - 3} dx = \frac{3}{2} \ln |x^2 - 3| + c$$

$$\textcircled{3} \int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = - \ln |\cos x| + c$$

$$\textcircled{4} \int \operatorname{cot} g x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

## Derivace jmenovatele v čitateli

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \left| \begin{array}{l} t = f(x) \\ dt = f'(x) dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + c = \ln |f(x)| + c$$

$$\Rightarrow \boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c}$$

### Příklad

$$① \int \frac{2x}{x^2 - 3} dx = \ln |x^2 - 3| + c$$

$$② \int \frac{3x}{x^2 - 3} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x}{x^2 - 3} dx = \frac{3}{2} \ln |x^2 - 3| + c$$

$$③ \int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = - \ln |\cos x| + c$$

$$④ \int \operatorname{cot} g x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln |\sin x| + c$$

## Integrace goniometrických funkcí

Integrál typu  $\int R(\sin x, \cos x) dx$ , kde  $R$  je racionální lomená funkce, lze speciálními substitucemi převést na integrál z racionální lomené funkce. Zejména, je-li možné psát integrál ve tvaru:

1  $\int R(\sin x) \cos x dx \implies$  volíme substituci  $t = \sin x$

2  $\int R(\cos x) \sin x dx \implies$  volíme substituci  $t = \cos x$

## Poznámka

• Příklady funkcí typu  $R(\sin x, \cos x)$  :  $\frac{\sin x \cos^2 x}{\sin^2 x + \cos x}$ ,  $\frac{\cos^3 x + 1}{\sin^2 x}$

• Příklady funkcí typu  $R(\sin x)$  :  $\frac{\sin x + 2}{\sin^2 x}$ ,  $\frac{2 \sin x}{\sin x - 1}$

• Příklady funkcí typu  $R(\cos x)$  :  $\frac{\cos x}{\cos^2 x + 3}$ ,  $\frac{\cos^2 x + \cos x}{\cos x + 1}$

## Příklad

$$\textcircled{1} \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + 2} dx$$

## Příklad

$$\textcircled{1} \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + 2} dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x + 2} \cos x dx$$

## Příklad

$$\textcircled{1} \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + 2} dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x + 2} \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right|$$

## Příklad

$$\textcircled{1} \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + 2} dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x + 2} \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int \frac{t}{t^2 + 2} dt$$



## Příklad

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + 2} dx &= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x + 2} \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int \frac{t}{t^2 + 2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2 + 2} dt \end{aligned}$$

## Příklad

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + 2} dx &= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x + 2} \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int \frac{t}{t^2 + 2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2 + 2} dt = \frac{1}{2} \ln(t^2 + 2) + c \end{aligned}$$

## Příklad

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + 2} dx &= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x + 2} \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int \frac{t}{t^2 + 2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2 + 2} dt = \frac{1}{2} \ln(t^2 + 2) + c = \frac{1}{2} \ln(\sin^2 x + 2) + c \end{aligned}$$

## Příklad

$$\begin{aligned} 1 \quad \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + 2} dx &= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x + 2} \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int \frac{t}{t^2 + 2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2 + 2} dt = \frac{1}{2} \ln(t^2 + 2) + c = \frac{1}{2} \ln(\sin^2 x + 2) + c \end{aligned}$$

$$2 \quad \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$$

## Příklad

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + 2} dx &= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x + 2} \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int \frac{t}{t^2 + 2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2 + 2} dt = \frac{1}{2} \ln(t^2 + 2) + c = \frac{1}{2} \ln(\sin^2 x + 2) + c \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{1}{\cos^3 x} \sin x dx$$

## Příklad

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + 2} dx &= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x + 2} \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int \frac{t}{t^2 + 2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2 + 2} dt = \frac{1}{2} \ln(t^2 + 2) + c = \frac{1}{2} \ln(\sin^2 x + 2) + c \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{1}{\cos^3 x} \sin x dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right|$$

## Příklad

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + 2} dx &= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x + 2} \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int \frac{t}{t^2 + 2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2 + 2} dt = \frac{1}{2} \ln(t^2 + 2) + c = \frac{1}{2} \ln(\sin^2 x + 2) + c \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{1}{\cos^3 x} \sin x dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| = - \int \frac{1}{t^3} dt$$

## Příklad

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + 2} dx &= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x + 2} \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int \frac{t}{t^2 + 2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2 + 2} dt = \frac{1}{2} \ln(t^2 + 2) + c = \frac{1}{2} \ln(\sin^2 x + 2) + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx &= \int \frac{1}{\cos^3 x} \sin x dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| = - \int \frac{1}{t^3} dt \\ &= - \int t^{-3} dt \end{aligned}$$



## Příklad

$$\begin{aligned} 1 \quad \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + 2} dx &= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x + 2} \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int \frac{t}{t^2 + 2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2 + 2} dt = \frac{1}{2} \ln(t^2 + 2) + c = \frac{1}{2} \ln(\sin^2 x + 2) + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \quad \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx &= \int \frac{1}{\cos^3 x} \sin x dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| = - \int \frac{1}{t^3} dt \\ &= - \int t^{-3} dt = -\frac{t^{-2}}{-2} + c \end{aligned}$$

## Příklad

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + 2} dx &= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x + 2} \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int \frac{t}{t^2 + 2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2 + 2} dt = \frac{1}{2} \ln(t^2 + 2) + c = \frac{1}{2} \ln(\sin^2 x + 2) + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx &= \int \frac{1}{\cos^3 x} \sin x dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| = - \int \frac{1}{t^3} dt \\ &= - \int t^{-3} dt = -\frac{t^{-2}}{-2} + c = \frac{1}{2t^2} + c \end{aligned}$$

## Příklad

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + 2} dx &= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x + 2} \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int \frac{t}{t^2 + 2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2 + 2} dt = \frac{1}{2} \ln(t^2 + 2) + c = \frac{1}{2} \ln(\sin^2 x + 2) + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx &= \int \frac{1}{\cos^3 x} \sin x dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| = - \int \frac{1}{t^3} dt \\ &= - \int t^{-3} dt = -\frac{t^{-2}}{-2} + c = \frac{1}{2t^2} + c = \frac{1}{2\cos^2 x} + c \end{aligned}$$

## Příklad

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + 2} dx &= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x + 2} \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int \frac{t}{t^2 + 2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2 + 2} dt = \frac{1}{2} \ln(t^2 + 2) + c = \frac{1}{2} \ln(\sin^2 x + 2) + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx &= \int \frac{1}{\cos^3 x} \sin x dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| = - \int \frac{1}{t^3} dt \\ &= - \int t^{-3} dt = -\frac{t^{-2}}{-2} + c = \frac{1}{2t^2} + c = \frac{1}{2\cos^2 x} + c \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} (*) \int \frac{\sin^3 x}{\cos x + 3} dx$$

## Příklad

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + 2} dx &= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x + 2} \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int \frac{t}{t^2 + 2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2 + 2} dt = \frac{1}{2} \ln(t^2 + 2) + c = \frac{1}{2} \ln(\sin^2 x + 2) + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx &= \int \frac{1}{\cos^3 x} \sin x dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| = - \int \frac{1}{t^3} dt \\ &= - \int t^{-3} dt = -\frac{t^{-2}}{-2} + c = \frac{1}{2t^2} + c = \frac{1}{2 \cos^2 x} + c \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} (*) \int \frac{\sin^3 x}{\cos x + 3} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos x + 3} \sin x dx$$

## Příklad

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + 2} dx &= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x + 2} \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int \frac{t}{t^2 + 2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2 + 2} dt = \frac{1}{2} \ln(t^2 + 2) + c = \frac{1}{2} \ln(\sin^2 x + 2) + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx &= \int \frac{1}{\cos^3 x} \sin x dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| = - \int \frac{1}{t^3} dt \\ &= - \int t^{-3} dt = -\frac{t^{-2}}{-2} + c = \frac{1}{2t^2} + c = \frac{1}{2\cos^2 x} + c \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} (*) \int \frac{\sin^3 x}{\cos x + 3} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos x + 3} \sin x dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x + 3} \sin x dx$$

## Příklad

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + 2} dx &= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x + 2} \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int \frac{t}{t^2 + 2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2 + 2} dt = \frac{1}{2} \ln(t^2 + 2) + c = \frac{1}{2} \ln(\sin^2 x + 2) + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx &= \int \frac{1}{\cos^3 x} \sin x dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| = - \int \frac{1}{t^3} dt \\ &= - \int t^{-3} dt = -\frac{t^{-2}}{-2} + c = \frac{1}{2t^2} + c = \frac{1}{2 \cos^2 x} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} (*) \int \frac{\sin^3 x}{\cos x + 3} dx &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos x + 3} \sin x dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x + 3} \sin x dx \\ &= \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| \end{aligned}$$

## Příklad

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + 2} dx &= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x + 2} \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int \frac{t}{t^2 + 2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2 + 2} dt = \frac{1}{2} \ln(t^2 + 2) + c = \frac{1}{2} \ln(\sin^2 x + 2) + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx &= \int \frac{1}{\cos^3 x} \sin x dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| = - \int \frac{1}{t^3} dt \\ &= - \int t^{-3} dt = -\frac{t^{-2}}{-2} + c = \frac{1}{2t^2} + c = \frac{1}{2 \cos^2 x} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} (*) \int \frac{\sin^3 x}{\cos x + 3} dx &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos x + 3} \sin x dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x + 3} \sin x dx \\ &= \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| = \int \frac{t^2 - 1}{t + 3} dt \end{aligned}$$



## Příklad

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + 2} dx &= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x + 2} \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int \frac{t}{t^2 + 2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2 + 2} dt = \frac{1}{2} \ln(t^2 + 2) + c = \frac{1}{2} \ln(\sin^2 x + 2) + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx &= \int \frac{1}{\cos^3 x} \sin x dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| = - \int \frac{1}{t^3} dt \\ &= - \int t^{-3} dt = -\frac{t^{-2}}{-2} + c = \frac{1}{2t^2} + c = \frac{1}{2 \cos^2 x} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} (*) \int \frac{\sin^3 x}{\cos x + 3} dx &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos x + 3} \sin x dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x + 3} \sin x dx \\ &= \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| = \int \frac{t^2 - 1}{t + 3} dt = \int \left( t - 3 + \frac{8}{t + 3} \right) dt \end{aligned}$$

## Příklad

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + 2} dx &= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x + 2} \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int \frac{t}{t^2 + 2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2 + 2} dt = \frac{1}{2} \ln(t^2 + 2) + c = \frac{1}{2} \ln(\sin^2 x + 2) + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx &= \int \frac{1}{\cos^3 x} \sin x dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| = - \int \frac{1}{t^3} dt \\ &= - \int t^{-3} dt = -\frac{t^{-2}}{-2} + c = \frac{1}{2t^2} + c = \frac{1}{2 \cos^2 x} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} (*) \int \frac{\sin^3 x}{\cos x + 3} dx &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos x + 3} \sin x dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x + 3} \sin x dx \\ &= \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| = \int \frac{t^2 - 1}{t + 3} dt = \int \left( t - 3 + \frac{8}{t + 3} \right) dt \\ &= \frac{t^2}{2} - 3t + 8 \ln |t + 3| + c \end{aligned}$$

## Příklad

$$\begin{aligned} 1 \quad \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + 2} dx &= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x + 2} \cos x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int \frac{t}{t^2 + 2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2 + 2} dt = \frac{1}{2} \ln(t^2 + 2) + c = \frac{1}{2} \ln(\sin^2 x + 2) + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \quad \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx &= \int \frac{1}{\cos^3 x} \sin x dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| = - \int \frac{1}{t^3} dt \\ &= - \int t^{-3} dt = -\frac{t^{-2}}{-2} + c = \frac{1}{2t^2} + c = \frac{1}{2 \cos^2 x} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 \quad (*) \int \frac{\sin^3 x}{\cos x + 3} dx &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos x + 3} \sin x dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x + 3} \sin x dx \\ &= \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| = \int \frac{t^2 - 1}{t + 3} dt = \int \left( t - 3 + \frac{8}{t + 3} \right) dt \\ &= \frac{t^2}{2} - 3t + 8 \ln |t + 3| + c = \frac{\cos^2 x}{2} - 3 \cos x + 8 \ln |\cos x + 3| + c \end{aligned}$$

## Věta (2. substituční metoda, $x = \varphi(t)$ )

Nechť funkce  $f(x)$  je spojitá na otevřeném intervalu  $I$  a funkce  $\varphi(t)$  má na otevřeném intervalu  $J$  spojitou nenulovou derivaci, přičemž  $\varphi(J) = I$  (tj.  $\varphi$  zobrazuje interval  $J$  na interval  $I$ ). Potom na intervalu  $I$  platí

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t) dt,$$

dosadíme-li do výrazu vpravo  $t = \varphi^{-1}(x)$ , kde  $\varphi^{-1}$  je inverzní funkce k funkci  $\varphi$ .

- Prakticky provádíme substituci tak, že do funkce  $f$  vložíme vnitřní složku  $\varphi(t)$ . Přestože se nově získaná složená funkce zdá být složitější, může být integrování takové funkce v některých konkrétních případech jednodušší.
- Postup integrace vypadá takto:

$$\int f(x) dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) dt \end{array} \right| = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t) dt = F(t) + c = F[\varphi^{-1}(x)] + c,$$

kde  $F(t)$  je primitivní funkce k funkci  $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ .

## Integrace iracionálních funkcí

Integrál typu

$$\int R(x, \sqrt[n_1]{ax+b}, \sqrt[n_2]{ax+b}, \dots) dx,$$

kde  $R$  je racionální lomená funkce, lze substitucí

$$t = \sqrt[s]{ax+b}, \quad \text{kde } s \text{ je nejmenší společný násobek čísel } n_1, n_2, \dots$$

převést na integrál z racionální lomené funkce.

Substituci provádíme následovně:

$$t = \sqrt[s]{ax+b} \implies ax+b = t^s$$

$$x = \frac{1}{a}t^s - \frac{b}{a}$$

$$dx = \frac{1}{a}st^{s-1} dt$$

## Příklad

$$① \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$$

## Příklad

$$\textcircled{1} \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x+1} \Rightarrow x = t^2 - 1 \\ dx = 2t dt \end{array} \right|$$

## Příklad

$$\textcircled{1} \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x+1} \Rightarrow x = t^2 - 1 \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = \int \frac{t^2 - 1}{t} 2t dt$$



## Příklad

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx &= \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x+1} \Rightarrow x = t^2 - 1 \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = \int \frac{t^2 - 1}{t} 2t dt \\ &= 2 \int (t^2 - 1) dt \end{aligned}$$

## Příklad

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx &= \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x+1} \Rightarrow x = t^2 - 1 \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = \int \frac{t^2 - 1}{t} 2t dt \\ &= 2 \int (t^2 - 1) dt = 2 \left( \frac{t^3}{3} - t \right) + c \end{aligned}$$

## Příklad

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx &= \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x+1} \Rightarrow x = t^2 - 1 \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = \int \frac{t^2 - 1}{t} 2t dt \\ &= 2 \int (t^2 - 1) dt = 2 \left( \frac{t^3}{3} - t \right) + c = \frac{2}{3} (\sqrt{x+1})^3 - 2\sqrt{x+1} + c \end{aligned}$$

## Příklad

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx &= \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x+1} \Rightarrow x = t^2 - 1 \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = \int \frac{t^2 - 1}{t} 2t dt \\ &= 2 \int (t^2 - 1) dt = 2 \left( \frac{t^3}{3} - t \right) + c = \frac{2}{3} (\sqrt{x+1})^3 - 2\sqrt{x+1} + c \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \int \frac{2}{\sqrt{x}(x+1)} dx$$

## Příklad

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx &= \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x+1} \Rightarrow x = t^2 - 1 \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = \int \frac{t^2 - 1}{t} 2t dt \\ &= 2 \int (t^2 - 1) dt = 2 \left( \frac{t^3}{3} - t \right) + c = \frac{2}{3} (\sqrt{x+1})^3 - 2\sqrt{x+1} + c \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \int \frac{2}{\sqrt{x}(x+1)} dx = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right|$$

## Příklad

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx &= \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x+1} \Rightarrow x = t^2 - 1 \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = \int \frac{t^2 - 1}{t} 2t dt \\ &= 2 \int (t^2 - 1) dt = 2 \left( \frac{t^3}{3} - t \right) + c = \frac{2}{3} (\sqrt{x+1})^3 - 2\sqrt{x+1} + c \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \int \frac{2}{\sqrt{x}(x+1)} dx = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = \int \frac{2}{t(t^2+1)} 2t dt$$

## Příklad

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx &= \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x+1} \Rightarrow x = t^2 - 1 \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = \int \frac{t^2 - 1}{t} 2t dt \\ &= 2 \int (t^2 - 1) dt = 2 \left( \frac{t^3}{3} - t \right) + c = \frac{2}{3} (\sqrt{x+1})^3 - 2\sqrt{x+1} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \int \frac{2}{\sqrt{x}(x+1)} dx &= \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = \int \frac{2}{t(t^2+1)} 2t dt \\ &= 4 \int \frac{1}{t^2+1} dt \end{aligned}$$

## Příklad

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx &= \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x+1} \Rightarrow x = t^2 - 1 \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = \int \frac{t^2 - 1}{t} 2t dt \\ &= 2 \int (t^2 - 1) dt = 2 \left( \frac{t^3}{3} - t \right) + c = \frac{2}{3} (\sqrt{x+1})^3 - 2\sqrt{x+1} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \int \frac{2}{\sqrt{x}(x+1)} dx &= \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = \int \frac{2}{t(t^2+1)} 2t dt \\ &= 4 \int \frac{1}{t^2+1} dt = 4 \operatorname{arctgt} + c \end{aligned}$$



## Příklad

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx &= \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x+1} \Rightarrow x = t^2 - 1 \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = \int \frac{t^2 - 1}{t} 2t dt \\ &= 2 \int (t^2 - 1) dt = 2 \left( \frac{t^3}{3} - t \right) + c = \frac{2}{3} (\sqrt{x+1})^3 - 2\sqrt{x+1} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \int \frac{2}{\sqrt{x}(x+1)} dx &= \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = \int \frac{2}{t(t^2+1)} 2t dt \\ &= 4 \int \frac{1}{t^2+1} dt = 4 \operatorname{arctgt} + c = 4 \operatorname{arctg}\sqrt{x} + c \end{aligned}$$

## Příklad

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx &= \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x+1} \Rightarrow x = t^2 - 1 \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = \int \frac{t^2 - 1}{t} 2t dt \\ &= 2 \int (t^2 - 1) dt = 2 \left( \frac{t^3}{3} - t \right) + c = \frac{2}{3} (\sqrt{x+1})^3 - 2\sqrt{x+1} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \int \frac{2}{\sqrt{x}(x+1)} dx &= \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = \int \frac{2}{t(t^2+1)} 2t dt \\ &= 4 \int \frac{1}{t^2+1} dt = 4 \operatorname{arctgt} + c = 4 \operatorname{arctg}\sqrt{x} + c \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1} dx$$

## Příklad

$$\begin{aligned} 1 \quad \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx &= \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x+1} \Rightarrow x = t^2 - 1 \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = \int \frac{t^2 - 1}{t} 2t dt \\ &= 2 \int (t^2 - 1) dt = 2 \left( \frac{t^3}{3} - t \right) + c = \frac{2}{3} (\sqrt{x+1})^3 - 2\sqrt{x+1} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \quad \int \frac{2}{\sqrt{x}(x+1)} dx &= \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = \int \frac{2}{t(t^2+1)} 2t dt \\ &= 4 \int \frac{1}{t^2+1} dt = 4 \operatorname{arctgt} + c = 4 \operatorname{arctg}\sqrt{x} + c \end{aligned}$$

$$3 \quad \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1} dx = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt[6]{x} \Rightarrow x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right|$$

## Příklad

$$\begin{aligned} 1 \quad \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx &= \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x+1} \Rightarrow x = t^2 - 1 \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = \int \frac{t^2 - 1}{t} 2t dt \\ &= 2 \int (t^2 - 1) dt = 2 \left( \frac{t^3}{3} - t \right) + c = \frac{2}{3} (\sqrt{x+1})^3 - 2\sqrt{x+1} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \quad \int \frac{2}{\sqrt{x}(x+1)} dx &= \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = \int \frac{2}{t(t^2+1)} 2t dt \\ &= 4 \int \frac{1}{t^2+1} dt = 4 \operatorname{arctgt} + c = 4 \operatorname{arctg}\sqrt{x} + c \end{aligned}$$

$$3 \quad \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1} dx = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt[6]{x} \Rightarrow x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right| = \int \frac{t^3}{t^2+1} 6t^5 dt$$

## Příklad

$$\begin{aligned} 1 \quad \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx &= \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x+1} \Rightarrow x = t^2 - 1 \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = \int \frac{t^2 - 1}{t} 2t dt \\ &= 2 \int (t^2 - 1) dt = 2 \left( \frac{t^3}{3} - t \right) + c = \frac{2}{3} (\sqrt{x+1})^3 - 2\sqrt{x+1} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \quad \int \frac{2}{\sqrt{x}(x+1)} dx &= \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = \int \frac{2}{t(t^2+1)} 2t dt \\ &= 4 \int \frac{1}{t^2+1} dt = 4 \operatorname{arctgt} + c = 4 \operatorname{arctg}\sqrt{x} + c \end{aligned}$$

$$3 \quad \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x+1}} dx = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt[6]{x} \Rightarrow x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right| = \int \frac{t^3}{t^2+1} 6t^5 dt = 6 \int \frac{t^8}{t^2+1} dt$$

## Příklad

$$\begin{aligned} 1 \quad \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx &= \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x+1} \Rightarrow x = t^2 - 1 \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = \int \frac{t^2 - 1}{t} 2t dt \\ &= 2 \int (t^2 - 1) dt = 2 \left( \frac{t^3}{3} - t \right) + c = \frac{2}{3} (\sqrt{x+1})^3 - 2\sqrt{x+1} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \quad \int \frac{2}{\sqrt{x}(x+1)} dx &= \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = \int \frac{2}{t(t^2+1)} 2t dt \\ &= 4 \int \frac{1}{t^2+1} dt = 4 \operatorname{arctgt} + c = 4 \operatorname{arctg}\sqrt{x} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 \quad \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x+1}} dx &= \left| \begin{array}{l} t = \sqrt[6]{x} \Rightarrow x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right| = \int \frac{t^3}{t^2+1} 6t^5 dt = 6 \int \frac{t^8}{t^2+1} dt \\ &= 6 \int \left( t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1} \right) dt \end{aligned}$$

## Příklad

$$\begin{aligned} 1 \quad \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx &= \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x+1} \Rightarrow x = t^2 - 1 \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = \int \frac{t^2 - 1}{t} 2t dt \\ &= 2 \int (t^2 - 1) dt = 2 \left( \frac{t^3}{3} - t \right) + c = \frac{2}{3} (\sqrt{x+1})^3 - 2\sqrt{x+1} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \quad \int \frac{2}{\sqrt{x}(x+1)} dx &= \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = \int \frac{2}{t(t^2+1)} 2t dt \\ &= 4 \int \frac{1}{t^2+1} dt = 4 \operatorname{arctgt} + c = 4 \operatorname{arctg}\sqrt{x} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 \quad \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1} dx &= \left| \begin{array}{l} t = \sqrt[6]{x} \Rightarrow x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right| = \int \frac{t^3}{t^2+1} 6t^5 dt = 6 \int \frac{t^8}{t^2+1} dt \\ &= 6 \int \left( t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1} \right) dt = 6 \left( \frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t + \operatorname{arctgt} \right) + c \end{aligned}$$

## Příklad

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx &= \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x+1} \Rightarrow x = t^2 - 1 \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = \int \frac{t^2 - 1}{t} 2t dt \\ &= 2 \int (t^2 - 1) dt = 2 \left( \frac{t^3}{3} - t \right) + c = \frac{2}{3} (\sqrt{x+1})^3 - 2\sqrt{x+1} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \int \frac{2}{\sqrt{x}(x+1)} dx &= \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right| = \int \frac{2}{t(t^2+1)} 2t dt \\ &= 4 \int \frac{1}{t^2+1} dt = 4 \operatorname{arctgt} + c = 4 \operatorname{arctg} \sqrt{x} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1} dx &= \left| \begin{array}{l} t = \sqrt[6]{x} \Rightarrow x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right| = \int \frac{t^3}{t^2+1} 6t^5 dt = 6 \int \frac{t^8}{t^2+1} dt \\ &= 6 \int \left( t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1} \right) dt = 6 \left( \frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t + \operatorname{arctgt} \right) + c \\ &= \frac{6\sqrt[6]{x^7}}{7} - \frac{6\sqrt[6]{x^5}}{5} + 2\sqrt{x} - 6\sqrt[6]{x} + 6 \cdot \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} + c \end{aligned}$$



## Věta (Integrovaní metodou per partes (po částech))

*Nechť funkce  $u$  a  $v$  mají spojité derivace na intervalu  $I$ . Pak na intervalu  $I$  platí*

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx.$$

- 1 Metoda per partes je vlastně přepsané pravidlo pro derivaci součinu dvou funkcí.
- 2 Abychom mohli použít vzorec pro integraci per partes, musíme
  - zderivovat funkci  $u$ ,
  - zintegrovat funkci  $v'$ . To může být však problém!!!

Navíc, aby použití metody mělo smysl, by měl být součin  $u'v$  (v integrálu na pravé straně) “snadněji zintegrovatelný” než původní  $uv'$ .

## Typy integrálů vhodné pro použití metody per partes

Nechť  $P$  je polynom.

1

$$\int P(x)e^{ax+b} dx, \quad \int P(x) \sin(ax + b) dx, \quad \int P(x) \cos(ax + b) dx$$

V těchto případech derivujeme polynom, druhou funkci integrujeme. Přitom metodu aplikujeme tolikrát, kolik je stupeň polynomu.

2

$$\int P(x) \ln^m(ax + b) dx$$
$$\int P(x) \operatorname{arctg}(ax + b) dx, \quad \int P(x) \operatorname{arccotg}(ax + b) dx$$
$$\int P(x) \operatorname{arcsin}(ax + b) dx, \quad \int P(x) \operatorname{arccos}(ax + b) dx$$

V těchto případech naopak integrujeme polynom, druhou funkci derivujeme. Toto zahrnuje zejména i případy, kdy  $P(x) = 1$ .

## Příklad (Per partes – derivace polynomu)

$$\textcircled{1} \int x \cos x \, dx$$

## Příklad (Per partes – derivace polynomu)

$$\textcircled{1} \int x \cos x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & v' = \cos x \\ u' = 1 & v = \sin x \end{array} \right|$$

## Příklad (Per partes – derivace polynomu)

$$\textcircled{1} \int x \cos x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & v' = \cos x \\ u' = 1 & v = \sin x \end{array} \right| = x \sin x - \int \sin x \, dx$$

## Příklad (Per partes – derivace polynomu)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int x \cos x \, dx &= \left| \begin{array}{ll} u = x & v' = \cos x \\ u' = 1 & v = \sin x \end{array} \right| = x \sin x - \int \sin x \, dx \\ &= x \sin x + \cos x + c \end{aligned}$$

## Příklad (Per partes – derivace polynomu)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int x \cos x \, dx &= \left| \begin{array}{ll} u = x & v' = \cos x \\ u' = 1 & v = \sin x \end{array} \right| = x \sin x - \int \sin x \, dx \\ &= x \sin x + \cos x + c \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \int (x^2 + 1)e^{-x} \, dx$$

## Příklad (Per partes – derivace polynomu)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int x \cos x \, dx &= \left| \begin{array}{ll} u = x & v' = \cos x \\ u' = 1 & v = \sin x \end{array} \right| = x \sin x - \int \sin x \, dx \\ &= x \sin x + \cos x + c \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \int (x^2 + 1)e^{-x} \, dx = \left| \begin{array}{ll} u = x^2 + 1 & v' = e^{-x} \\ u' = 2x & v = -e^{-x} \end{array} \right|$$



## Příklad (Per partes – derivace polynomu)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int x \cos x \, dx &= \left| \begin{array}{ll} u = x & v' = \cos x \\ u' = 1 & v = \sin x \end{array} \right| = x \sin x - \int \sin x \, dx \\ &= x \sin x + \cos x + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \int (x^2 + 1)e^{-x} \, dx &= \left| \begin{array}{ll} u = x^2 + 1 & v' = e^{-x} \\ u' = 2x & v = -e^{-x} \end{array} \right| \\ &= (x^2 + 1)(-e^{-x}) - \int 2x(-e^{-x}) \, dx \end{aligned}$$

## Příklad (Per partes – derivace polynomu)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int x \cos x \, dx &= \left| \begin{array}{ll} u = x & v' = \cos x \\ u' = 1 & v = \sin x \end{array} \right| = x \sin x - \int \sin x \, dx \\ &= x \sin x + \cos x + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \int (x^2 + 1)e^{-x} \, dx &= \left| \begin{array}{ll} u = x^2 + 1 & v' = e^{-x} \\ u' = 2x & v = -e^{-x} \end{array} \right| \\ &= (x^2 + 1)(-e^{-x}) - \int 2x(-e^{-x}) \, dx \\ &= -e^{-x}(x^2 + 1) + 2 \int xe^{-x} \, dx \end{aligned}$$

## Příklad (Per partes – derivace polynomu)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int x \cos x \, dx &= \left| \begin{array}{ll} u = x & v' = \cos x \\ u' = 1 & v = \sin x \end{array} \right| = x \sin x - \int \sin x \, dx \\ &= x \sin x + \cos x + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \int (x^2 + 1)e^{-x} \, dx &= \left| \begin{array}{ll} u = x^2 + 1 & v' = e^{-x} \\ u' = 2x & v = -e^{-x} \end{array} \right| \\ &= (x^2 + 1)(-e^{-x}) - \int 2x(-e^{-x}) \, dx \\ &= -e^{-x}(x^2 + 1) + 2 \int xe^{-x} \, dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & v' = e^{-x} \\ u' = 1 & v = -e^{-x} \end{array} \right| \end{aligned}$$

## Příklad (Per partes – derivace polynomu)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \int x \cos x \, dx &= \left| \begin{array}{ll} u = x & v' = \cos x \\ u' = 1 & v = \sin x \end{array} \right| = x \sin x - \int \sin x \, dx \\ &= x \sin x + \cos x + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \int (x^2 + 1)e^{-x} \, dx &= \left| \begin{array}{ll} u = x^2 + 1 & v' = e^{-x} \\ u' = 2x & v = -e^{-x} \end{array} \right| \\ &= (x^2 + 1)(-e^{-x}) - \int 2x(-e^{-x}) \, dx \\ &= -e^{-x}(x^2 + 1) + 2 \int xe^{-x} \, dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & v' = e^{-x} \\ u' = 1 & v = -e^{-x} \end{array} \right| \\ &= -e^{-x}(x^2 + 1) + 2 \left[ x(-e^{-x}) - \int 1 \cdot (-e^{-x}) \, dx \right] \end{aligned}$$

## Příklad (Per partes – derivace polynomu)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int x \cos x \, dx &= \left| \begin{array}{ll} u = x & v' = \cos x \\ u' = 1 & v = \sin x \end{array} \right| = x \sin x - \int \sin x \, dx \\ &= x \sin x + \cos x + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \int (x^2 + 1)e^{-x} \, dx &= \left| \begin{array}{ll} u = x^2 + 1 & v' = e^{-x} \\ u' = 2x & v = -e^{-x} \end{array} \right| \\ &= (x^2 + 1)(-e^{-x}) - \int 2x(-e^{-x}) \, dx \\ &= -e^{-x}(x^2 + 1) + 2 \int xe^{-x} \, dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & v' = e^{-x} \\ u' = 1 & v = -e^{-x} \end{array} \right| \\ &= -e^{-x}(x^2 + 1) + 2 \left[ x(-e^{-x}) - \int 1 \cdot (-e^{-x}) \, dx \right] \\ &= -e^{-x}(x^2 + 1) - 2xe^{-x} + 2 \int e^{-x} \, dx \end{aligned}$$

## Příklad (Per partes – derivace polynomu)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int x \cos x \, dx &= \left| \begin{array}{ll} u = x & v' = \cos x \\ u' = 1 & v = \sin x \end{array} \right| = x \sin x - \int \sin x \, dx \\ &= x \sin x + \cos x + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \int (x^2 + 1)e^{-x} \, dx &= \left| \begin{array}{ll} u = x^2 + 1 & v' = e^{-x} \\ u' = 2x & v = -e^{-x} \end{array} \right| \\ &= (x^2 + 1)(-e^{-x}) - \int 2x(-e^{-x}) \, dx \\ &= -e^{-x}(x^2 + 1) + 2 \int xe^{-x} \, dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & v' = e^{-x} \\ u' = 1 & v = -e^{-x} \end{array} \right| \\ &= -e^{-x}(x^2 + 1) + 2 \left[ x(-e^{-x}) - \int 1 \cdot (-e^{-x}) \, dx \right] \\ &= -e^{-x}(x^2 + 1) - 2xe^{-x} + 2 \int e^{-x} \, dx \\ &= -e^{-x}(x^2 + 1) - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + c \end{aligned}$$

## Příklad (Per partes – derivace polynomu)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int x \cos x \, dx &= \left| \begin{array}{ll} u = x & v' = \cos x \\ u' = 1 & v = \sin x \end{array} \right| = x \sin x - \int \sin x \, dx \\ &= x \sin x + \cos x + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \int (x^2 + 1)e^{-x} \, dx &= \left| \begin{array}{ll} u = x^2 + 1 & v' = e^{-x} \\ u' = 2x & v = -e^{-x} \end{array} \right| \\ &= (x^2 + 1)(-e^{-x}) - \int 2x(-e^{-x}) \, dx \\ &= -e^{-x}(x^2 + 1) + 2 \int xe^{-x} \, dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & v' = e^{-x} \\ u' = 1 & v = -e^{-x} \end{array} \right| \\ &= -e^{-x}(x^2 + 1) + 2 \left[ x(-e^{-x}) - \int 1 \cdot (-e^{-x}) \, dx \right] \\ &= -e^{-x}(x^2 + 1) - 2xe^{-x} + 2 \int e^{-x} \, dx \\ &= -e^{-x}(x^2 + 1) - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + c = -e^{-x}(x^2 - 2x + 3) + c \end{aligned}$$

## Příklad (Per partes – integrace polynomu)

$$① \int \ln x \, dx$$



## Příklad (Per partes – integrace polynomu)

$$\textcircled{1} \int \ln x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x} & v = x \end{array} \right|$$

## Příklad (Per partes – integrace polynomu)

$$\textcircled{1} \int \ln x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x} & v = x \end{array} \right| = x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx$$

### Příklad (Per partes – integrace polynomu)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \ln x \, dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x} & v = x \end{array} \right| = x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx \\ &= x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c \end{aligned}$$

## Příklad (Per partes – integrace polynomu)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \ln x \, dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x} & v = x \end{array} \right| = x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx \\ &= x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \int x \operatorname{arctg} x \, dx$$

## Příklad (Per partes – integrace polynomu)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \ln x \, dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x} & v = x \end{array} \right| = x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx \\ &= x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \int x \operatorname{arctg} x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x & v' = x \\ u' = \frac{1}{x^2+1} & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right|$$

### Příklad (Per partes – integrace polynomu)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \ln x \, dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x} & v = x \end{array} \right| = x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx \\ &= x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \int x \operatorname{arctg} x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x & v' = x \\ u' = \frac{1}{x^2+1} & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x^2+1} \, dx$$

### Příklad (Per partes – integrace polynomu)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \ln x \, dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x} & v = x \end{array} \right| = x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx \\ &= x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \int x \arctg x \, dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \arctg x & v' = x \\ u' = \frac{1}{x^2+1} & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x^2+1} \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2} \int \left( 1 - \frac{1}{x^2+1} \right) dx \end{aligned}$$

### Příklad (Per partes – integrace polynomu)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \int \ln x \, dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x} & v = x \end{array} \right| = x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx \\ &= x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \int x \arctg x \, dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \arctg x & v' = x \\ u' = \frac{1}{x^2+1} & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x^2+1} \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2} \int \left( 1 - \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2} (x - \arctg x) + c \end{aligned}$$



# Využití systémů počítačové algebry

Využití systémů Sage, Maxima, Wolfram Alpha:

<http://user.mendelu.cz/marik/akademie/integralni-pocet.html>

Matematické výpočty online (MAW):

<http://um.mendelu.cz/maw-html/index.php?lang=cs&form=integral>