evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Číselné vektory, matice, determinanty

Základy vyšší matematiky

LDF MENDELU

Podpořeno projektem Průřezová inovace studijních programů Lesnické a dřevařské fakulty MENDELU v Brně (LDF) s ohledem na disciplíny společného základu `http://akademie.ldf.mendelu.cz/cz` (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0021) za přispění finančních prostředků EU a státního rozpočtu České republiky.

Simona Fišnarová

Brno 2012

Číselné vektory

Definice (Číselné vektory)

Symbolem $\mathbb{R}^n$ označme množinu všech uspořádaných n-tic reálných čísel, tj.

$$\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n); a_1 \in \mathbb{R}, a_2 \in \mathbb{R}, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}.$$

Prvky této množiny, tj. uspořádané n-tice reálných čísel, nazýváme **(reálné) vektory**, značíme $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Čísla $a_1, \ldots, a_n$ se nazývají **složky vektoru** $\vec{a}$ a číslo n se nazývá a **rozměr (dimenze) vektoru** $\vec{a}$.

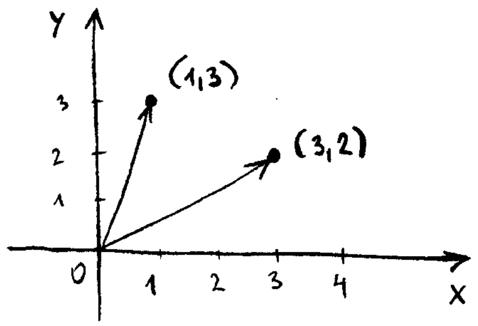
Vektor $\vec{a}$ zapisujeme někdy také ve tvaru $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, tzv. **sloupcový vektor**.

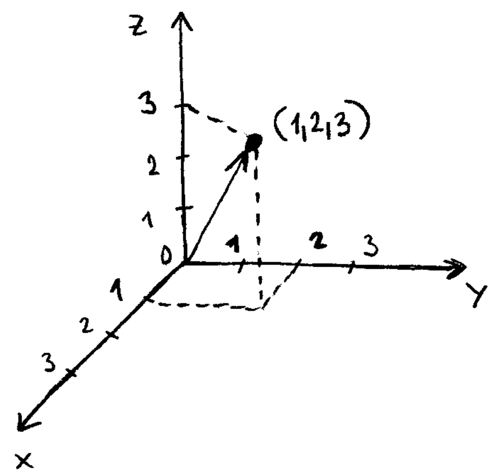
Příklad

$$\vec{a} = (-1, 6) \in \mathbb{R}^2$$
$$\vec{b} = (2, 9, -1) \in \mathbb{R}^3$$
$$\vec{c} = (2, 5, 0, -8, 9) \in \mathbb{R}^5$$

Geometrický význam vektorů v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$

- $\mathbb{R}^2$ můžeme chápat jako množinu všech bodů v rovině, neboť každý bod v rovině je určen uspořádanou dvojicí čísel.
- Podobně, číselné vektory v $\mathbb{R}^3$ chápeme jako body v trojrozměrném prostoru.





Definice (Sčítání vektorů a násobení vektoru reálným číslem)

Pro $k \in \mathbb{R}$ a vektory $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ definujeme operace **sčítání vektorů** a **násobení vektoru reálným číslem**:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$
$$k(a_1, a_2, \dots, a_n) = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n).$$

Příklad

Nechť $\vec{a} = (2, -1, 3)$, $\vec{b} = (1, 0, 6)$, $\vec{c} = (5, 6, -2, 1)$.

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= (2, -1, 3) + (1, 0, 6) = (3, -1, 9) \\ -5\vec{c} &= -5(5, 6, -2, 1) = (-25, -30, 10, -5) \end{aligned}$$

Součet $\vec{a} + \vec{c}$ není definován, protože vektory $\vec{a}$, $\vec{c}$ nemají stejný rozměr.

Definice

- Vektor $\vec{o} := (0, 0, \dots, 0)$ se nazývá **nulový vektor**.
- Vektor $-\vec{b} = (-1)\vec{b}$ se nazývá **opačný vektor** k vektoru $\vec{b}$.
- **Rozdíl vektorů** $\vec{a}$ a $\vec{b}$ definujeme jako $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Příklad

Nechť $\vec{a} = (2, -1, 3)$, $\vec{b} = (1, 0, 6)$, $\vec{c} = (5, 6, -2, 1)$.

$$\begin{aligned} -\vec{a} &= (-2, 1, -3) \\ -\vec{b} &= (-1, 0, -6) \\ \vec{a} - \vec{b} &= (2, -1, 3) - (1, 0, 6) = (1, -1, -3) \end{aligned}$$

Rozdíl $\vec{a} - \vec{c}$ není definován, protože vektory $\vec{a}, \vec{c}$ nemají stejný rozměr.

Definice (Skalární součin)

Skalární součin vektorů $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n),\ \vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ je reálné číslo

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

Příklad

Nechť $\vec{a} = (2, -1, 3, 2),\ \vec{b} = (1, 0, 6, -3)$.

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot (-3) \\ &= 2 + 0 + 18 - 6 = 14. \end{aligned}$$

Definice (Lineární kombinace vektorů)

Nechť $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ $(k \in \mathbb{N})$ jsou vektory v $\mathbb{R}^n$, $t_1, t_2, \ldots, t_k$ jsou reálná čísla. Vektor

$$\vec{b} = t_1 \vec{a}_1 + t_2 \vec{a}_2 + \cdots + t_k \vec{a}_k,$$

se nazývá **lineární kombinace vektorů** $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$. Čísla $t_1, t_2, \ldots, t_k$ se nazývají **koeficienty lineární kombinace**.

Příklad

Nechť $\vec{a} = (3, 2, -1),\ \vec{b} = (1, 0, -3),\ \vec{c} = (2, -1, -1)$.
Příklady lineárních kombinací vektorů $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$:

$$\begin{aligned} \vec{d} &= 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c} = (9, 5, 2) \\ \vec{o} &= 0\vec{a} + 0\vec{b} + 0\vec{c} = (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Je zřejmé, že nulový vektor může být vždy vyjádřen jako lineární kombinace daných vektorů - tzv. **triviální lineární kombinace**, tj. taková lineární kombinace, v níž jsou všechny koeficienty nulové.

Definice (Lineární (ne)závislost)

Říkáme, že vektory $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ jsou **lineárně závislé**, jestliže existují reálná čísla $t_1, t_2, \ldots, t_k$, **ne všechna nulová**, taková, že

$$t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + \cdots + t_k\vec{a}_k = \vec{o}.$$

V opačném případě říkáme, že vektory jsou **lineárně nezávislé**.

Poznámka

Z definice plyne:

- Vektory jsou lineárně závislé, jestliže alespoň jeden z nich lze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních.
- Vektory $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ jsou lineárně nezávislé, jestliže nulový vektor může být vyjádřen pouze jako triviální lineární kombinace těchto vektorů.

Speciální případy lineárně (ne)závislých vektorů

- Dva vektory jsou lineárně závislé právě tehdy, když jeden z vektorů je násobkem druhého.

Vektory (stejného rozměru) jsou lineárně závislé, jestliže platí alespoň jedna z podmínek:

- Mezi vektory je nulový vektor.
- Alespoň jeden z vektorů je násobkem jiného vektoru.
- Počet vektorů je vetší než je rozměr každého z vektorů.

Obecně budeme schopni o lineární závislosti a nezávislosti vektorů rozhodnout po zavedení pojmu hodnost matice.

Příklad

- Vektory $(1, 2, 0, -3)$, $(-2, -4, 0, 6)$ jsou lineárně závislé, protože
$$(-2, -4, 0, 6) = -2 \cdot (1, 2, 0, -3).$$
- Vektory $(1, 5, 0, -2)$, $(5, 6, -1, -1)$ jsou lineárně nezávislé.
- Vektory $(1, 3, 8)$, $(0, 0, 0)$, $(-1, 0, 3)$ jsou lineárně závislé, protože je mezi nimi nulový vektor.
- Vektory $(1, 2, 3)$, $(3, 7, 1)$, $(2, 4, 6)$ jsou lineárně závislé, protože
$$(2, 4, 6) = 2 \cdot (1, 2, 3).$$
- Vektory $(1, 3)$, $(2, 1)$, $(-3, 2)$ jsou lineárně závislé, protože jejich počet je 3, ale rozměr pouze 2.
- O lineární závislosti nebo nezávislosti vektorů $(1, 3, 8)$, $(1, 0, -1)$, $(9, 3, -4)$ **zatím** neumíme rozhodnout.

Matice - základní pojmy

Definice (Matice)

Obdélníkové schéma o m řádcích a n sloupcích
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$
kde $a_{ij} \in \mathbb{R}$ pro $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, se nazývá **matice typu** (m, n). Stručně zapisujeme $A = (a_{ij})$. Množinu všech matic typu (m, n) značíme $\mathbb{R}^{m \times n}$. Prvky a_{ii} se nazývají **prvky hlavní diagonály**. Pokud $m = n$, pak mluvíme o **čtvercové matici řádu n.**

Poznámka

Řádky a sloupce matice chápeme jako vektory. Mluvíme tedy o sčítání, násobení reálným číslem, lineární kombinaci, lineární závislosti a nezávislosti řádků (sloupců).

Nulová matice

Matice, jejíž všechny prvky jsou nulové, se nazývá **nulová matice** a značíme ji 0. Typ nulové matice je obvykle zřejmý z kontextu.

Jednotková matice

Čtvercová matice řádu n, která má na hlavní diagonále jedničky a na ostatních místech nuly, se nazývá **jednotková matice** a značí se I_n nebo jen I.

Příklad

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Transponovaná matice

Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu (m, n). Matice A^T typu (n, m), která vznikne záměnou řádků a sloupců matice A, se nazývá **transponovaná matice** k matici A, tj. $A^T = (a_{ji})$.

Příklad

Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 6 \\ 3 & -2 & 8 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Pak

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 8 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že $B = B^T$. Matice s takovou vlastností se nazývá **symetrická matice**. Jiným příkladem symetrické matice je jednotová matice.

Operace s maticemi

Definice (Sčítaní matic a násobení matice reálným číslem)

- Nechť $A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij})$ jsou matice typu (m, n) . **Součtem matic** A a B rozumíme matici $C = (c_{ij})$ typu (m, n), kde

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

  pro všechna i, j. Píšeme $C = A + B$.
- Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu (m, n), $t \in \mathbb{R}$. **Součinem čísla** t **a matice** A rozumíme matici $D = (d_{ij})$ typu (m, n), kde

$$d_{ij} = t \cdot a_{ij}$$

  pro všechna i, j. Píšeme $D = tA$.

Poznámka (Rozdíl matic)

Stejně jako v případě vektorů, definujeme $-A$ jako $(-1)A$, a píšeme $A - B$ místo $A + (-1)B$.

Příklad

Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pak

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 2 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \\ 3C &= \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \\ A - 2B &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 6 & 10 & 14 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -7 & -7 & -12 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Součet $A + C$ není definován, neboť matice A a C nejsou stejného typu.

Definice (Násobení matic)

Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu (m, n), $B = (b_{ij})$ je matice typu (n, p). **Součinem matic** A a B (v tomto pořadí) rozumíme matici $C = (c_{ij})$ typu (m, p), kde

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

pro $i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, p$. Píšeme $C = AB$.

Poznámka (Vysvětlení předchozí definice)

- Počet sloupců matice A musí být roven počtu řádků matice B, jinak není součin AB definován.
- Prvek c_{ij} v matici C je roven skalárnímu součinu i-tého řádku matice A a j-tého sloupce matice B.
- Jak uvidíme z příkladů, **násobení matic není komutativní operace, tzn. obecně neplati** $AB = BA$. Abychom zdůraznili pořadí matic v součinu AB, říkáme, že matici A **násobíme zprava** maticí B nebo že matici B **násobíme zleva** maticí A.

Příklad

Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pak

$$\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 - 1 \cdot 3 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 \\ -2 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 & -2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 5 & 6 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \\
BA &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{není definován,} \\
A^2 &= A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 8 & 0 \\ -4 & 1 & 4 \\ -8 & -4 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Věta (Vlastnosti maticového součinu)

Nechť matice A, B, C, I jsou takového typu, že následující operace jsou definovány, $r \in \mathbb{R}$.

1. $A(BC) = (AB)C$ *(asociativní zákon)*
2. $A(B + C) = AB + AC$ *(distributibní zákon zleva)*
3. $(B + C)A = BA + CA$ *(distributivní zákon zprava)*
4. $r(AB) = (rA)B = A(rB)$
5. $IA = AI = A$

Upozornění

1. Obecně $AB \neq BA$.
2. Pro násobení matic neplatí pravidla pro krácení, tj. obecně $AB = AC \not\Rightarrow B = C$.
3. Obecně $AB = 0 \not\Rightarrow A = 0$ nebo $B = 0$.

Schodovitá matice

Říkáme, že matice je ve **schodovitém (stupňovitém) tvaru**, jestliže každý nenulový řádek v této matici začíná větším počtem nul než předchozí řádek.

Příklad

Následující matice jsou ve schodovitém tvaru:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Hodnost matice

Definice (Hodnost matice)

Nechť A je matice. **Hodností matice** A rozumíme číslo, které udává maximální počet lineárně nazávislých řádků matice A. Hodnost matice A značíme $h(A)$.

Věta

Hodnost matice ve schodovitém tvaru je rovna počtu nenulových řádků této matice.

Příklad

Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice A je ve schodovitém tvaru a tedy $h(A) = 4$.
Matice B není ve schodovitém tvaru a o její hodnosti neumíme na první pohled rozhodnout.

Definice (Ekvivalentní řádkové úpravy)

Následující úpravy:

1. vynásobení řádku nenulovým číslem,
2. záměna pořadí řádků,
3. přičtení násobku jednoho řadku k nenulovému násobku jiného řádku,
4. vynechání nulového řádku nebo řádku, který je násobkem jiného řádku,

se nazývají **ekvivalentní řádkové úpravy**. Skutečnost, že matice A byla převedena na matici B konečným počtem ekvivaletních řádkových úprav značíme $A \sim B$ a tyto matice nazýváme **ekvivalentní**.

Věta

(i) *Libovolnou nenulovou matici lze konečným počtem ekvivalentních řádkových úprav převést na matici ve schodovitém tvaru.*

(ii) *Ekvivalentní řádkové úpravy zachovávají hodnost matice, tj. ekvivalentní matice mají stejnou hodnost.*

Poznámka

- Při zjišťování hodnosti matice A postupujeme tak, že matici převedeme pomocí ekvivalentních řádkových úprav na schodovitý tvar. Hodnost matice A je potom rovna hodnosti takto získáné schodovité matice, tedy počtu jejích nenulových řádků.
- Libovolná nenulová matice může být převedena na více než jednu matici ve schodovitém tvaru použitím různých posloupností řádkových ekvivalentních úprav.
- Pod pojmem **klíčový prvek** budeme rozumět nenulový prvek matice, pomocí nějž jsou ekvivalentními řádkovými úpravami vytvářeny nuly v matici. Řádek a sloupec obsahující klíčový prvek budeme nazývat **klíčový řádek** a **klíčový sloupec**.

Příklad

Určete hodnost matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -1 & -2 & 4 \\ \boxed{1} & 3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} & \begin{matrix} -3 \\ + \\ \\ + \end{matrix} \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{-3} & -7 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{4} & \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{-}2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ 2 \\ \mid 3 \quad + \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -7 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -11 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

- Získaná matice ve schodovitém tvaru má tři nenulové řádky, tedy
$$h(A) = 3.$$

Postup popsaný v předchozím příkladu můžeme shrnout:

Postup úpravy matice do schodovitého tvaru

1. Začneme s nenulovým sloupcem nejvíce vlevo - tzv. klíčový sloupec. Vybereme nenulový prvek z tohoto sloupce jakožto klíčový prvek (nejvhodnější je, pokud je klíčový prvek roven 1 nebo -1).
2. Klíčový řádek přemístíme na první místo v matici.
3. Aplikací vhodných řádkových úprav vytváříme nuly pod klíčovým prvkem, tzn. přičítáme vhodné násobky klíčového řádku ke vhodným násobkům řádků pod ním. Případně provedeme dodatečné úpravy, které mohou matici zjednodušit (např. vynechání řádku).
4. Kroky 1–3 aplikujeme na "podmatici" pod klíčovým řádkem. (Tedy klíčový řádek a všechny případné řádky nad ním budeme v dalším už jenom opisovat). Postup opakujeme tak dlouho, dokud není matice ve schodovitém tvaru.

Věta

Hodnost matice se transponováním matice nezmění, tedy pro libovolnou matici A platí $h(A) = h(A^T)$.

Poznámka

Z předchozí věty vyplývá, že všechna tvrzení týkající se hodnosti matice vyslovená pro řádky lze formulovat i pro sloupce. Hodnost matice můžeme tedy chápat jako maximální počet lineárně nezávislých sloupců matice.

Poznámka (Lineární (ne)závislost vektorů)

Nechť je dáno m vektorů stejného rozměru. Z definice hodnosti matice (a z poslední věty) vyplývá, že tyto vektory jsou

- lineárně závislé, jestliže $h(A) < m$,
- lineárně nezávislé, jestliže $h(A) = m$,

kde A je matice, jejíž řádky (sloupce) jsou tvořeny danými vektory.

Příklad

Vektory

$$(3, 6, -1, -2, 4),\ (1, 3, 2, -1, 2),\ (0, 2, 1, 0, -1),\ (-1, 1, 0, 1, -4)$$

jsou lineárně závislé, neboť hodnost matice

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -7 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -11 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

je rovna 3, viz předchozí příklad na určení hodnosti matice.

Příklad

Vektory

$$(0,2,0,3,0),\ (1,0,0,0,0),\ (0,0,0,5,-1),\ (0,0,1,0,-4)$$

jsou lineárně nezávislé, neboť hodnost matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

je rovna 4.

Inverzní matice

Definice (Inverzní matice)

Nechť A je čtvercová matice řádu n. Matice A se nazývá **invertibilní**, jestliže existuje čtvercová matice A^{-1} řádu n taková, že

$$AA^{-1} = I = A^{-1}A.$$

Matice A^{-1} se nazývá **inverzní matice** k matici A.

Je-li A invertibilní, pak inverzní matice A^{-1} je určena jednoznačně. Ne každá matice je však invertibilní.

Věta

- *Matice A je invertibilní právě tehdy, když ji lze pomocí ekvivalentních řádkových úprav převést na jednotkovou matici I.*
- *Každá posloupnost ekvivalentních řádkových úprav, která převede matici A na I, převede zároveň I na A^{-1}.*

Předchozí věta dává návod jak nelézt inverzní matici:

Postup nalezení A^{-1}

Nechť A je čtvercová matice.

1. Vytvoříme "dvojmatici" $(A|I)$.
2. Na matici $(A|I)$ aplikujeme ekvivalentní řádkové úpravy, které převedou matici A na jednotkovou matici I.
3. Jestliže je A převedena na I (v levé části výsledné "dvojmatice" je I), pak v pravé části výsledné "dvojmatice" máme A^{-1}.
   Schematicky:
   $$(A|I) \sim \cdots \sim (I|A^{-1}).$$
4. Pokud matici A nelze převést na jednotkovou matici (v průběhu výpočtu se v levé části vynuluje celý řádek), pak A není invertibilní, tj. inverzní matice A^{-1} neexistuje.

! Používáme pouze řádkové úpravy.

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = ?$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ + \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot 2 \quad + \\ \cdot(-1) \\ + \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ + \\ \cdot 3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} |:2 \\ |:2 \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \implies A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Příklad

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = ?$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -2 \quad -4 \\ + \\ \qquad + \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Z poslední matice vyplývá, že B^{-1} neexistuje.

Determinant matice

Determinant matice

Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n. Pod pojmem **determinant** matice A budeme rozumět reálné číslo $\det A$ (nebo také $|A|$), které je "určitým způsobem" přiřazeno matici A. Determinant z matice A zapisujeme

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Způsob, jakým je determinant matici přiřazen, nebudeme definovat obecně, ukážeme si pouze, jak je možné determinant vypočítat (vyčíslit z výše uvedeného schématu) pro matice různých řádů.

Determinanty matic malých řádů

- Pro $n = 1$, tj. $A = a_{11}$, je $\det A = a_{11}$.
- Pro $n = 2$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12},$$

  tzv. **křížové pravidlo**

- Pro $n = 3$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{c} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ -a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}. \end{array}$$

Sarrusovo pravidlo

Pravidlo pro výpočet determinantu matice třetího řádu si můžeme zapamatovat pomocí následujícího schématu:

- Pod determinant opíšeme znovu první dva řádky.
- Vynásobíme prvky v hlavní diagonále a v diagonálách pod ní (tyto součiny jsou se znaménkem $+$).
- Vynásobíme prvky ve vedlejší diagonále $a_{31} - a_{22} - a_{13}$ a v diagonálách pod ní (tyto součiny jsou se znaménkem $-$).
- Všechny tyto součiny sečteme.

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ \hline \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix} \end{array} = \begin{array}{c} a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23} \\ -a_{31}a_{22}a_{13}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{21}a_{12}a_{33} \end{array}$$

- **Toto pravidlo nelze žádným způsobem zobecnit pro matice čtvrtého nebo vyšších řádů!**

Výpočet determinantů matic čtvrtého a vyšších řádů můžeme převést na výpočet determinantů nižších řádů pomocí následující věty.

Věta (Laplaceův rozvoj)

Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n. Symbolem M_{ij} označme determinant matice řádu $n-1$, která vznikne z matice A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce. Pak

$$\det A = (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} M_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} M_{in}$$
$$\textit{pro} \quad i = 1, \ldots, n,$$

(tzv. Laplaceův rozvoj podle i-tého řádku)
a

$$\det A = (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j} + (-1)^{2+j} a_{2j} M_{2j} + \cdots + (-1)^{n+j} a_{nj} M_{nj}$$
$$\textit{pro} \quad j = 1, \ldots, n.$$

(tzv. Laplaceův rozvoj podle j-tého sloupce)

Příklad

Při výpočtu determinantu pomocí Laplaceova rozvoje je nejvýhodnější provést rozvoj podle řádku nebo sloupce, který obsahuje nejvíce nul.

- Pro výpočet tohoto determinantu bude nejvýhodnější provést rozvoj podle třetího řádku.
- Vzniklé determinanty třetího řádu vypočteme pomocí Sarrusova pravidla.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 & -1 \\ -1 & -2 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -7 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{3+1} 2 \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 3 & -7 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} 1 \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2[8 - 14 + 30 - (12 - 28 + 10)] + [-2 + 3 - 12 - (-6 - 6 + 2)] = 59$$

Věta (Vlastnosti determinantu)

1. *Transponováním matice se hodnota determinantu nezmění.*
2. *Hodnota determinantu matice se nezmění, jestliže k libovolnému řádku (sloupci) matice přičteme libovolný násobek jiného řádku (sloupce).*
3. *Přehozením dvou řádků (sloupců) determinant změní znaménko.*
4. *Vynásobíme-li jeden řádek (sloupec) číslem k, zvětší se hodnota determinantu k-krát.*
5. *Vydělíme-li jeden řádek (sloupec) nenulovým číslem k, zmenší se hodnota determinantu k-krát.*
6. *Determinant z matice, která má pod hlavní diagonálou samé nuly, je roven součinu prvků v hlavní diagonále.*

Poznámka

Předchozí věta dává návod jak "zjednodušit" výpočet determinantu vytvořením většího množství nul v matici. Nejvýhodnější je upravit determinant tak, aby v jednom řádku (sloupci) byly kromě jednoho prvku samé nuly. Podle tohoto řádku (sloupce) pak provedeme rozvoj determinantu.

Věta

Determinant matice je roven nule, jestliže platí alespoň jedno z následujících tvrzení.

1. *Některý řádek nebo sloupec v matici je nulový.*
2. *V matici jsou dva stejné řádky nebo sloupce.*
3. *Některý řádek (sloupec) je násobkem jiného řádku (sloupce).*

Regulární a singulární matice

Věta

Nechť A je čtvercová matice řádu n. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. $h(A) = n$
2. *Řádky (sloupce) matice A jsou lineárně nezávislé.*
3. $\det A \neq 0$
4. *A je invertibilní, tj. A^{-1} existuje.*

Definice (Regulární a singulární matice)

Čtvercovou matici, která má vlastnosti uvedené v předchozí větě, nazýváme **regulární**, v opačném případě mluvíme o **singulární** matici.

Využití systémů počítačové algebry

Ukázka využití systémů Wolfram Alpha, Sage, Maxima, viz:

`http://user.mendelu.cz/marik/akademie/linearni-algebra.html`

Přímý odkaz na Wolfram Alpha:

`http://www.wolframalpha.com/`

Příklad

Vypočtěte součin matic

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení pomocí systému Wolfram Alpha:

{{1,2,2},{2,1,3}}*{{1,2},{3,1},{1,4}}

Příklad

Je daná matice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Určete hodnost matice, determinant, inverzní matici.

Řešení pomocí systému Wolfram Alpha:

1. hodnost matice:

   rank{{1,2,3},{2,0,1},{3,2,1}}

2. determinant:

   det{{1,2,3},{2,0,1},{3,2,1}}

3. inverzní matice:

   inv{{1,2,3},{2,0,1},{3,2,1}}