evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Limita a spojitost

Základy vyšší matematiky

LDF MENDELU

Podpořeno projektem Průřezová inovace studijních programů Lesnické a dřevařské fakulty MENDELU v Brně (LDF) s ohledem na disciplíny společného základu `http://akademie.ldf.mendelu.cz/cz` (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0021) za přispění finančních prostředků EU a státního rozpočtu České republiky.

Simona Fišnarová

Brno 2012

Rozšířená množina reálných čísel

Rozšířená množina reálných čísel je množina $\mathbb{R}$ rozšířená o prvky ∞ a $-\infty$. Značíme ji $\mathbb{R}^*$. Tedy
$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}.$$

Body $\pm\infty$ se nazývají **nevlastní body**, body množiny $\mathbb{R}$ se nazývají **vlastní body**. Pro $a \in \mathbb{R}$ definujeme operace:

$$a + \infty = \infty, \quad a - \infty = -\infty, \quad \infty + \infty = \infty, \quad -\infty - \infty = -\infty$$

$$\infty \cdot \infty = \infty = -\infty \cdot (-\infty), \quad \infty \cdot (-\infty) = -\infty, \quad \boxed{\frac{a}{\infty} = \frac{a}{-\infty} = 0}, \quad |\pm\infty| = \infty$$

Pro $a > 0$: $\quad a \cdot \infty = \infty, \quad a \cdot (-\infty) = -\infty$

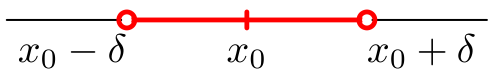
Pro $a < 0$: $\quad a \cdot \infty = -\infty, \quad a \cdot (-\infty) = \infty$

Nejsou definovány tyto operace:

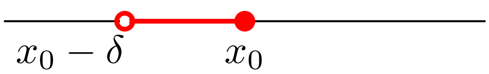
$$\infty - \infty, \quad \pm\infty \cdot 0, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{a}{0}, \ a \in \mathbb{R}^*$$

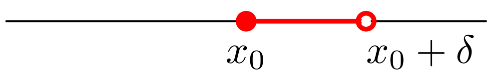
Okolí bodu

- **Okolím (δ-okolím)** bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ rozumíme otevřený interval $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, kde δ je kladné reálné číslo. Značíme $O_\delta(x_0)$.

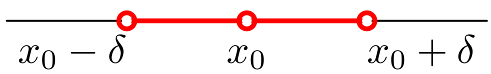


- Interval $(x_0 - \delta, x_0\rangle$ se nazývá **levé okolí** bodu x_0, značíme $O_\delta^-(x_0)$ a interval $\langle x_0, x_0 + \delta)$ se nazývá **pravé okolí** bodu x_0, značíme $O_\delta^+(x_0)$.

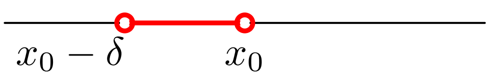


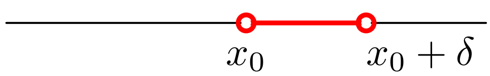


- **Ryzím (prstencovým) okolím (δ-okolím)** bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ rozumíme množinu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$, kde δ je kladné reálné číslo. Značíme $P_\delta(x_0)$.



- Interval $(x_0 - \delta, x_0)$ se nazývá **levé ryzí okolí** bodu x_0, značíme $P_\delta^-(x_0)$ a interval $(x_0, x_0 + \delta)$ se nazývá **pravé ryzí okolí** bodu x_0, značíme $P_\delta^+(x_0)$.





Pokud nebude hodnota δ podstatná, budeme okolí bodu x_0 značit jen $O(x_0)$ a ryzí okolí $P(x_0)$. Podobně pro jednostranná okolí.

- **Okolím** a zároveň i **ryzím okolím** bodu ∞ rozumíme každý interval (a, ∞), kde $a \in \mathbb{R}$.
- **Okolím** a zároveň i **ryzím okolím** bodu $-\infty$ rozumíme každý interval $(-\infty, a)$, kde $a \in \mathbb{R}$.

Definice limity

Definice (Limita funkce)

Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ limitu $L \in \mathbb{R}^*$, jestliže ke každému okolí $O(L)$ bodu L existuje ryzí okolí $P(x_0)$ bodu x_0 tak, že pro všechna $x \in P(x_0)$ platí $f(x) \in O(L)$. Píšeme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

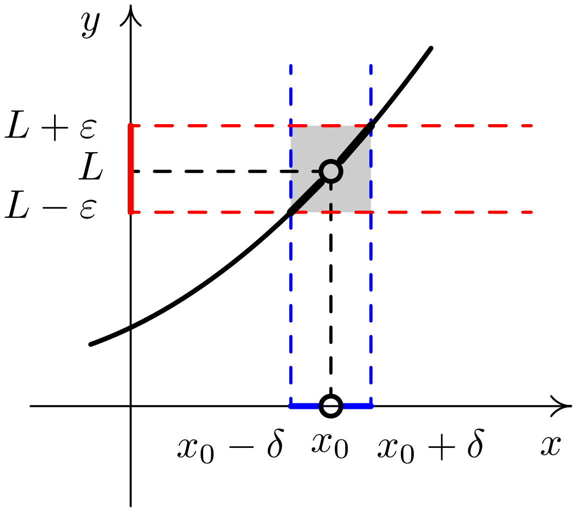
Vlastní limita ve vlastním bodě: $x_0 \in \mathbb{R},\ L \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = L}$$

K **libovolnému** ε-okolí $O_\varepsilon(L)$ bodu L lze najít **ryzí** δ-okolí $P_\delta(x_0)$ bodu x_0 tak, aby platilo

$$f(x) \in O_\varepsilon(L) \quad \text{pro všechna} \quad x \in P_\delta(x_0).$$

Zhruba řečeno: **Funkční hodnoty jsou libovolně blízké k L, pokud x je dostatečně blízké k x_0, ale $x \neq x_0$.**



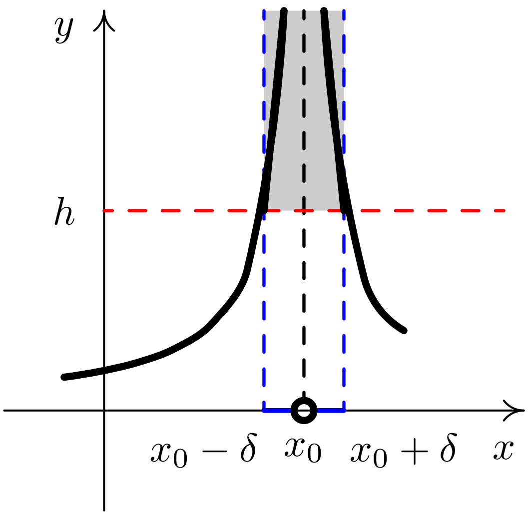
- Na obrázku je k danému $O_\varepsilon(L)$ nalezeno největší možné ryzí okolí bodu x_0. Ryzí okolí $P_\delta(x_0)$ je lze zvolit menší.
- Funkční hodnota v bodě x_0 není pro existenci limity podstatná, funkce nemusí být v bodě x_0 vůbec definovaná. Zajímají nás pouze funkční hodnoty v "blízkém" ryzím okolí bodu x_0.

Nevlastní limita ve vlastním bodě: $x_0 \in \mathbb{R}, L = \pm\infty$

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty}$$

K **libovolnému** $h \in \mathbb{R}$ lze najít **ryzí** δ-okolí $P_\delta(x_0)$ bodu x_0 tak, aby platilo

$$f(x) > h \quad \text{pro všechna} \quad x \in P_\delta(x_0).$$



- $P_\delta(x_0)$ je možné volit menší.

Jednostranné limity ($x_0 \in \mathbb{R}$)

Analogicky s použitím pravého (levého) ryzího okolí v předchozí definici limity, můžeme definovat ve vlastním bodě vlastní i nevlastní nevlastní limitu zprava (zleva).

- Nahradíme-li v definici ryzí okolí $P(x_0)$ pravým ryzím okolím $P^+(x_0)$, dostáváme definici **limity zprava**

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L.$$

- Nahradíme-li v definici ryzí okolí $P(x_0)$ levým ryzím okolím $P^-(x_0)$, dostáváme definici **limity zleva**

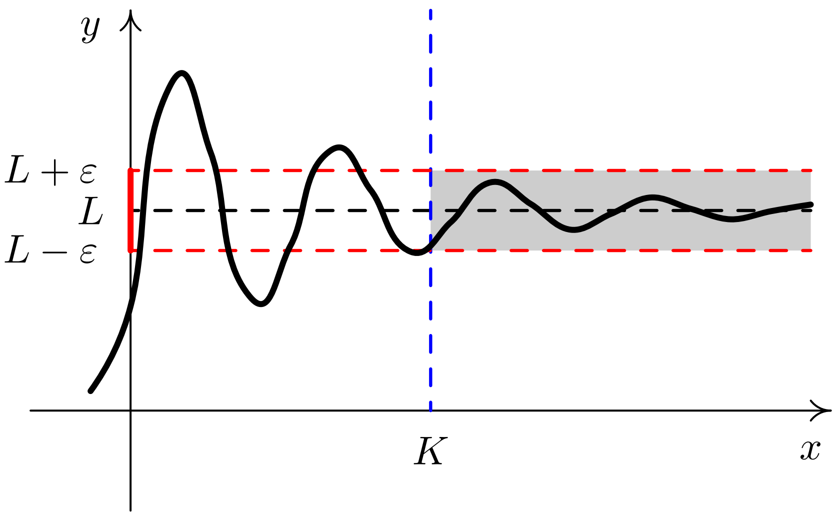
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L.$$

Vlastní limita v nevlastním bodě: $x_0 = \pm\infty, \ L \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} f(x) = L}$$

K **libovolnému** ε-okolí $O_\varepsilon(L)$ bodu L lze najít $K \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo

$$f(x) \in O_\varepsilon(L) \quad \text{pro všechna} \quad x > K.$$



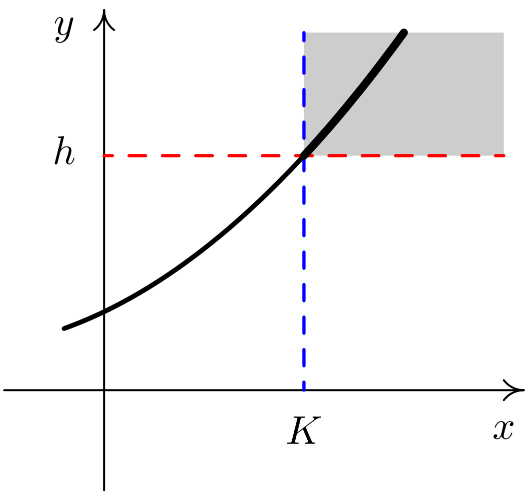
- Číslo K na obrázku je možné volit větší (více vpravo).

Nevlastní limita v nevlastním bodě: $x_0 = \pm\infty, L = \pm\infty$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty}$$

K **libovolnému** $h \in \mathbb{R}$ lze najít $K \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo

$$f(x) > h \quad \text{pro všechna} \quad x > K.$$



- Na obrázku je k danému h zvoleno nejmenší možné K. Číslo K je možné volit větší (více vpravo).

Vlastnosti limit

Z definice limity vyplývá, že aby měla funkce v daném bodě limitu, nemusí být v tomto bodě vůbec definovaná. Musí však být definovaná v nějakém ryzím okolí tohoto bodu. Například $\lim\limits_{x\to 0} \ln x$ nemá vůbec smysl, neboť funkce $y = \ln x$ není definovaná v žádném levém okolí nuly. Smysl má tedy pouze $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x$.

Věta

Funkce f má ve vlastním bodě x_0 limitu (vlastní nebo nevlastní) právě tehdy, když má v tomto bodě obě jednostranné limity, které jsou si rovny. Pak platí

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x).$$

Věta

Funkce má v libovolném bodě nejvýše jednu limitu.

Svislá a vodorovná asymptota

Definice (Svislá asymptota (asymptota bez směrnice))

Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ **svislou asymptotu (asymptotu bez směrnice)** o rovnici $x = x_0$, jestliže alespoň jedna z jednostranných limit v bodě x_0 je nevlastní, tj. nastane alespoň jeden z případů:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty.$$

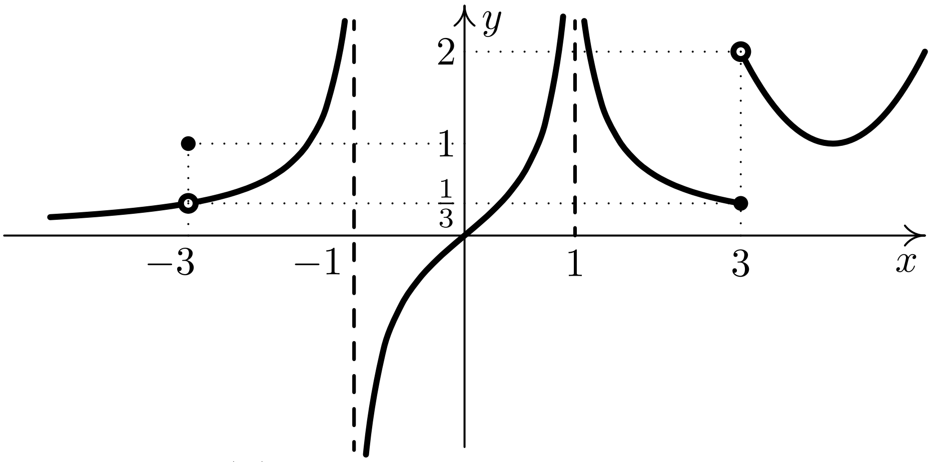
Definice (Vodorovná asymptota)

Řekneme, že funkce f má **vodorovnou asymptotu** o rovnici $y = q$ **pro** $x \to \infty$ **(pro** $x \to -\infty$**)**, jestliže

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = q \quad \left(\lim_{x\to-\infty} f(x) = q\right).$$

Příklad

Nechť je funkce f zadaná grafem:



- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$
- $\lim\limits_{x\to-3} f(x) = \frac{1}{3}$
- $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ neexistuje, neboť

  $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \infty, \ \lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \infty$
- $\lim\limits_{x\to3} f(x)$ neexistuje, neboť

  $\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = \frac{1}{3}, \ \lim\limits_{x\to3^+} f(x) = 2$
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

asymptoty: $x = -1$, $x = 1$ a $y = 0$ pro $x \to -\infty$

Spojitost funkce

Definice (Spojitost v bodě)

- Řekneme, že funkce f je **spojitá v bodě** $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

- Řekneme, že funkce f je **spojitá v bodě** $x_0 \in \mathbb{R}$ **zprava (zleva)**, jestliže

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) \; (\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0))$$

- Z definice limity vyplývá, že je-li funkce spojitá v bodě x_0, pak je definovaná v tomto bodě i v nějakém jeho okolí.

Definice (Spojitost na intervalu)

- Řekneme, že funkce f je **spojitá na otevřeném intervalu** (a, b), jestliže je spojitá ve všech bodech tohoto intervalu.
- Řekneme, že funkce f je **spojitá na uzavřeném intervalu** $\langle a, b\rangle$, jestliže je spojitá ve všech jeho vnitřních bodech, v bodě a je spojitá zprava a v bodě b je spojitá zleva.

Věta

Základní elementární funkce a funkce, které vznikly součtem, rozdílem, součinem, podílem a skládáním těchto funkcí jsou spojité ve všech bodech svého definičního oboru.

Body, v nichž funkce není spojitá, se nazývají **body nespojitosti**.

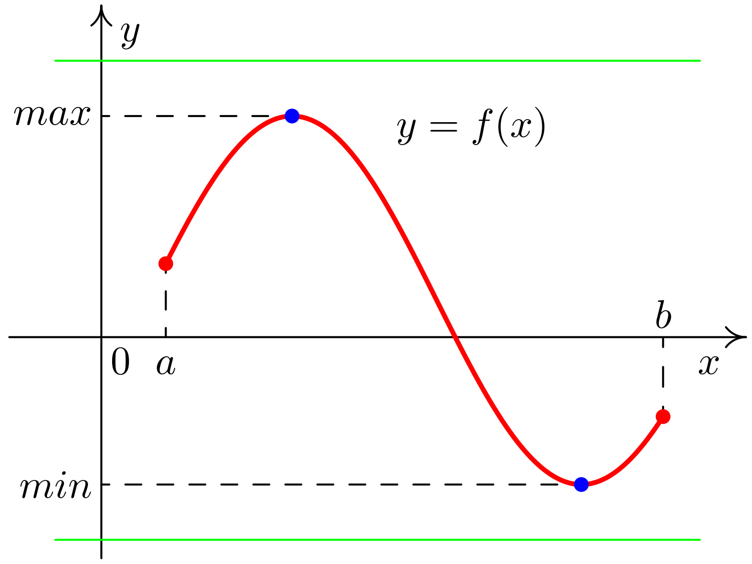
- Body nespojitosti funkce z předchozího příkladu jsou -3, -1, 1 a 3. V bodě 3 je funkce spojitá zleva.
- Body nespojitosti základních elementárních funkcí jsou body, v nichž tyto funkce nejsou definované. Například body nespojitosti funkce $y = \mathrm{cotg} x$ jsou body $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Body nespojitosti racionální lomené funkce jsou nulové body jmenovatele.

Vlastnosti spojitých funkcí

Věta (Weierstrass)

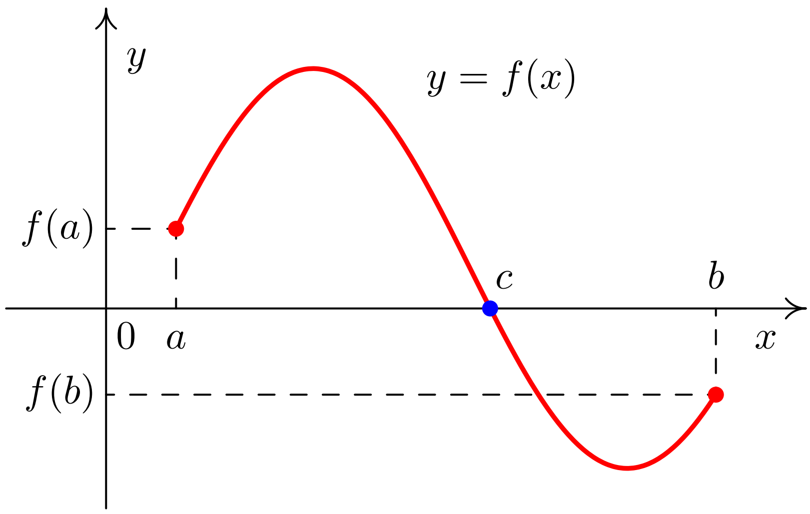
Nechť f *je funkce spojitá na uzavřeném intervalu* $\langle a, b\rangle$. *Pak*

- f *je na* $\langle a, b\rangle$ *ohraničená.*
- f *nabývá na* $\langle a, b\rangle$ *své největší a nejmenší hodnoty.*



Věta (Bolzano)

Nechť f *je funkce spojitá na uzavřeném intervalu* $\langle a, b\rangle$. *Pak* f *nabývá na* $\langle a, b\rangle$ *všech hodnot mezi svou nejmenší a největší hodnotou. Zejména, je-li* $f(a) \cdot f(b) < 0$, *pak existuje bod* $c \in (a, b)$ *takový, že* $f(c) = 0$.



Poznámka

Na předchozí větě je založena metoda půlení intervalu, která se využívá například při řešení algebraických rovnic.

Výpočet limity

Věta (Pravidla pro počítání s limitami)

Nechť f a g jsou funkce, které mají limitu v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a nechť $c \in \mathbb{R}$. Pak platí

$$\lim_{x \to x_0} c = c$$

$$\lim_{x \to x_0} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \to x_0} f(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} \big(f(x) \pm g(x)\big) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} \quad \textit{pro} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0.$$

Při výpočtu limity $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ postupujeme tak, že dosadíme bod x_0 do funkce f.

Limita spojité funkce

Je-li funkce f spojitá v x_0, pak dostaneme po dosazení bodu x_0 do funkce funkční hodnotu (konečné číslo), která je zároveň limitou funkce v daném bodě.

Příklad (Limita spojité funkce)

1. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x+3}{4-x} = \dfrac{7}{2}$

2. $\lim\limits_{x \to -1} \mathrm{arctg} x^2 = \mathrm{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$

V bodech, ve kterých je funkce spojitá, nemá výpočet limity velký význam. Dále se tedy budeme zabývat pouze funkcemi, které nejsou v bodě x_0 spojité.

Limita typu $\left\| \frac{a}{\pm\infty} \right\|$, $a \in \mathbb{R}$

Pokud při výpočtu limity podílu funkcí $\frac{f}{g}$ dostaneme výraz $\left\| \frac{a}{\pm\infty} \right\|$, tj.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a,\ a \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty,$$

pak

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Příklad (Limita typu $\left\| \frac{a}{\pm\infty} \right\|$, $a \in \mathbb{R}$)

1. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{\infty} = 0$

2. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sin x}{\ln x} = \dfrac{0}{-\infty} = 0$

Limita typu $\left\| \frac{a}{0} \right\|$, $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$

Pokud při výpočtu limity podílu funkcí $\frac{f}{g}$ dostaneme výraz $\left\| \frac{a}{0} \right\|$, tj.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a,\ a \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}, \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = 0,$$

pak nastane právě jedna ze tří možností:

- $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$, pokud existuje ryzí okolí bodu x_0 takové, že podíl $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ pro všechna x z tohoto okolí.
- $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$, pokud existuje ryzí okolí bodu x_0 takové, že funkce $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ pro všechna x z tohoto okolí.
- $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ neexistuje, pokud se limita zprava nerovná limitě zleva, tj. podíl $\frac{f(x)}{g(x)}$ mění v bodě x_0 znaménko.

Příklad (Limita typu $\left\|\frac{a}{0}\right\|$, $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$)

1. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x}{(x-3)^3} = \left\|\dfrac{3}{0}\right\| \Rightarrow$ možný výsledek: ∞, $-\infty$ nebo neexistuje
Vyšetříme znaménko zlomku $\frac{x}{(x-3)^3}$ v "blízkém" ryzím okolí bodu $x = 3$.
Čitatel x je v "blízkém" ryzím okolí bodu 3 kladný. Jmenovatel $(x-3)^3$ však v bodě 3 mění znaménko: v levém okolí je záporný, v pravém okolí je kladný. Pro jednostranné limity platí:

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x}{(x-3)^3} = \left\|\frac{+}{+}\right\| = \infty, \quad \lim_{x\to 3^-} \frac{x}{(x-3)^3} = \left\|\frac{+}{-}\right\| = -\infty,$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x}{(x-3)^3}$ neexistuje.

2. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x-7}{(x-5)^2} = \left\|\dfrac{-2}{0}\right\| \Rightarrow$ možný výsledek: ∞, $-\infty$ nebo neexistuje
Čitatel $x-7$ je v "blízkém" ryzím okolí bodu 5 záporný, jmenovatel $(x-5)^2$ je kladný. Takže
$$\lim_{x\to 5} \frac{x-7}{(x-5)^2} = \left\|\frac{-}{+}\right\| = -\infty.$$

Neurčité výrazy typu $\left\|\frac{0}{0}\right\|$ nebo $\left\|\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right\|$

Dostaneme-li při výpočtu limity podílu dvou funkcí výraz typu $\left\|\frac{0}{0}\right\|$ nebo $\left\|\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right\|$, pak se jedná o tzv. **neurčitý výraz**. Tímto typem limit se budeme obecněji zabývat až po probrání pojmu derivace. Zde si ukážeme jen výpočet v případě podílu dvou polynomů.

Další neurčité výrazy: $\|\pm\infty \cdot 0\|$, $\|\infty - \infty\|$, $\|0^0\|$, $\|\infty^0\|$, $\|1^\infty\|$ se dají převést na výpočet limity typu $\left\|\frac{0}{0}\right\|$ nebo $\left\|\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right\|$. Těmito typy limit se zabývat nebudeme.

Věta (Limita polynomu a racionální lomené funkce v nevlastním bodě)

Platí

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n) = \lim_{x\to\pm\infty} a_0x^n,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m}.$$

Příklad

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3 - 4x^2 + x - 2) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty.$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4 + 3x^2 - 2x}{3x^4 + 5} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4}{3x^4} = \dfrac{1}{3}.$

3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^6 + 3x^4 - 2}{3x^2 + x - 1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^6}{3x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{3}x^4 = \infty.$

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2 - 3x - 2}{3x^3 + x^2 + 2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2}{3x^3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5}{3x} = \dfrac{5}{-\infty} = 0.$

Využití systémů počítačové algebry

Příklad

Vypočtěte limity:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5 - 3x^4 + x - 2}{2x^3 + 4}, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x}, \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x-1}.$$

Řešení pomocí Wolfram Alpha (`http://www.wolframalpha.com/`):

```
lim (x^5-3x^4+x-2)/(2x^3+4) as x->infty

lim (ln x)/x as x->0+

lim ((x+2)/(x-1)) as x->1
```