

Limita a spojitost

Základy vyšší matematiky

LDF MENDELU



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Podpořeno projektem Průřezová inovace studijních programů Lesnické a dřevařské fakulty MENDELU v Brně (LDF) s ohledem na disciplíny společného základu <http://akademie.ldf.mendelu.cz/cz> (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0021) za přispění finančních prostředků EU a státního rozpočtu České republiky.

Rozšířená množina reálných čísel

Rozšířená množina reálných čísel je množina \mathbb{R} rozšířená o prvky ∞ a $-\infty$.

Značíme ji \mathbb{R}^* . Tedy

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}.$$

Body $\pm\infty$ se nazývají **nevlátní body**, body množiny \mathbb{R} se nazývají **vlastní body**.

Pro $a \in \mathbb{R}$ definujeme operace:

$$a + \infty = \infty, \quad a - \infty = -\infty, \quad \infty + \infty = \infty, \quad -\infty - \infty = -\infty$$

$$\infty \cdot \infty = \infty = -\infty \cdot (-\infty), \quad \infty \cdot (-\infty) = -\infty, \quad \boxed{\frac{a}{\infty} = \frac{a}{-\infty} = 0}, \quad |\pm\infty| = \infty$$

$$\text{Pro } a > 0: \quad a \cdot \infty = \infty, \quad a \cdot (-\infty) = -\infty$$

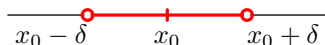
$$\text{Pro } a < 0: \quad a \cdot \infty = -\infty, \quad a \cdot (-\infty) = \infty$$

Nejsou definovány tyto operace:

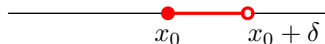
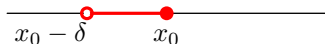
$$\infty - \infty, \quad \pm\infty \cdot 0, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{a}{0}, \quad a \in \mathbb{R}^*$$

Okolí bodu

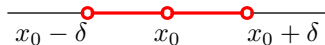
- **Okolím (δ -okolím)** bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ rozumíme otevřený interval $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, kde δ je kladné reálné číslo. Značíme $O_\delta(x_0)$.



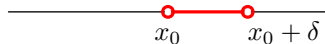
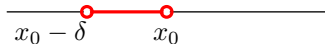
- Interval $(x_0 - \delta, x_0)$ se nazývá **levé okolí** bodu x_0 , značíme $O_\delta^-(x_0)$ a interval $(x_0, x_0 + \delta)$ se nazývá **pravé okolí** bodu x_0 , značíme $O_\delta^+(x_0)$.



- **Ryzím (prstencovým) okolím (δ -okolím)** bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ rozumíme množinu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$, kde δ je kladné reálné číslo. Značíme $P_\delta(x_0)$.



- Interval $(x_0 - \delta, x_0)$ se nazývá **levé ryzí okolí** bodu x_0 , značíme $P_\delta^-(x_0)$ a interval $(x_0, x_0 + \delta)$ se nazývá **pravé ryzí okolí** bodu x_0 , značíme $P_\delta^+(x_0)$.



Pokud nebude hodnota δ podstatná, budeme okolí bodu x_0 značit jen $O(x_0)$ a ryzí okolí $P(x_0)$. Podobně pro jednostranná okolí.

- **Okolím** a zároveň i **ryzím okolím** bodu ∞ rozumíme každý interval (a, ∞) , kde $a \in \mathbb{R}$.
- **Okolím** a zároveň i **ryzím okolím** bodu $-\infty$ rozumíme každý interval $(-\infty, a)$, kde $a \in \mathbb{R}$.

Definice (Limita funkce)

Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ limitu $L \in \mathbb{R}^*$, jestliže ke každému okolí $O(L)$ bodu L existuje ryzí okolí $P(x_0)$ bodu x_0 tak, že pro všechna $x \in P(x_0)$ platí $f(x) \in O(L)$. Píšeme

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L.$$

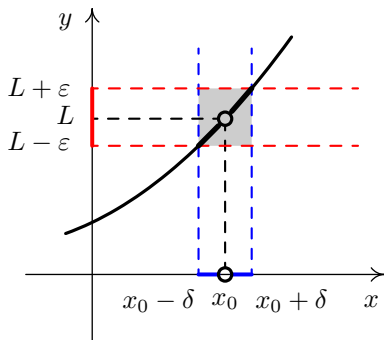
Vlastní limita ve vlastním bodě: $x_0 \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

K libovolnému ε -okolí $O_\varepsilon(L)$ bodu L lze najít ryzí δ -okolí $P_\delta(x_0)$ bodu x_0 tak, aby platilo

$$f(x) \in O_\varepsilon(L) \quad \text{pro všechna } x \in P_\delta(x_0).$$

Zhruba řečeno: **Funkční hodnoty jsou libovolně blízké k L , pokud x je dostatečně blízké k x_0 , ale $x \neq x_0$.**



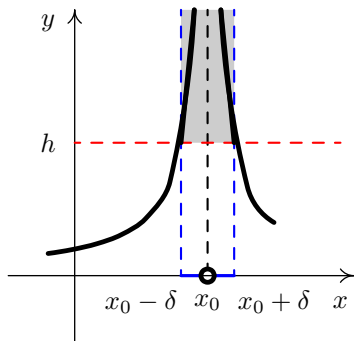
- Na obrázku je k danému $O_\varepsilon(L)$ nalezeno největší možné ryzí okolí bodu x_0 . Ryzí okolí $P_\delta(x_0)$ lze zvolit menší.
- Funkční hodnota v bodě x_0 není pro existenci limity podstatná, funkce nemusí být v bodě x_0 vůbec definovaná. Zajímají nás pouze funkční hodnoty v “blízkém” ryzím okolí bodu x_0 .

Nevlastní limita ve vlastním bodě: $x_0 \in \mathbb{R}, L = \pm\infty$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

K **libovolnému** $h \in \mathbb{R}$ lze najít **ryzí** δ -okolí $P_\delta(x_0)$ bodu x_0 tak, aby platilo

$$f(x) > h \quad \text{pro všechna } x \in P_\delta(x_0).$$



- $P_\delta(x_0)$ je možné volit menší.

Jednostranné limity ($x_0 \in \mathbb{R}$)

Analogicky s použitím pravého (levého) ryzího okolí v předchozí definici limity, můžeme definovat ve vlastním bodě vlastní i nevlastní nevlastní limitu zprava (zleva).

- Nahradíme-li v definici ryzí okolí $P(x_0)$ pravým ryzím okolím $P^+(x_0)$, dostáváme definici **limity zprava**

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L.$$

- Nahradíme-li v definici ryzí okolí $P(x_0)$ levým ryzím okolím $P^-(x_0)$, dostáváme definici **limity zleva**

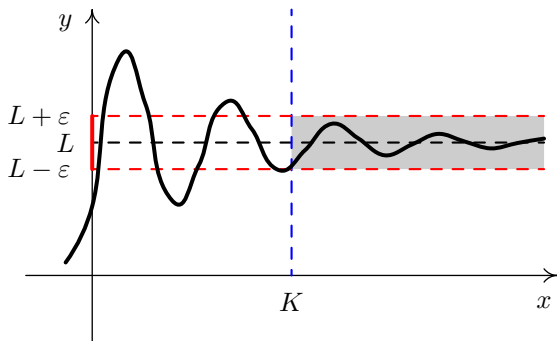
$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L.$$

Vlastní limita v nevlastním bodě: $x_0 = \pm\infty$, $L \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

K **libovolnému** ε -okolí $O_\varepsilon(L)$ bodu L lze najít $K \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo

$$f(x) \in O_\varepsilon(L) \quad \text{pro všechna } x > K.$$



- Číslo K na obrázku je možné volit větší (více vpravo).

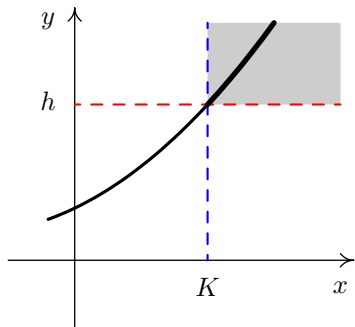
Nevlastní limita v nevlastním bodě:

$$x_0 = \pm\infty, L = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

K **libovolnému** $h \in \mathbb{R}$ lze najít $K \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo

$$f(x) > h \quad \text{pro všechna } x > K.$$



- Na obrázku je k danému h zvoleno nejmenší možné K . Číslo K je možné volit větší (více vpravo).

Vlastnosti limit

Z definice limity vyplývá, že aby měla funkce v daném bodě limitu, nemusí být v tomto bodě vůbec definovaná. Musí však být definovaná v nějakém ryzím okolí tohoto bodu. Například $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x$ nemá vůbec smysl, neboť funkce $y = \ln x$ není definovaná v žádném levém okolí nuly. Smysl má tedy pouze $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x$.

Věta

Funkce f má ve vlastním bodě x_0 limitu (vlastní nebo nevlastní) právě tehdy, když má v tomto bodě obě jednostranné limity, které jsou si rovny. Pak platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x).$$

Věta

Funkce má v libovolném bodě nejvýše jednu limitu.

Svislá a vodorovná asymptota

Definice (Svislá asymptota (asymptota bez směrnice))

Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ **svislou asymptotu (asymptotu bez směrnice)** o rovnici $x = x_0$, jestliže alespoň jedna z jednostranných limit v bodě x_0 je nevlastní, tj. nastane alespoň jeden z případů:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty.$$

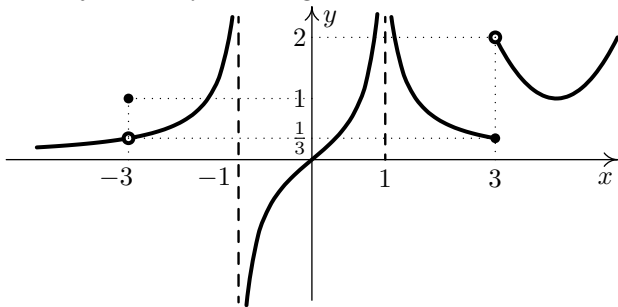
Definice (Vodorovná asymptota)

Řekneme, že funkce f má **vodorovnou asymptotu** o rovnici $y = q$ pro $x \rightarrow \infty$ (pro $x \rightarrow -\infty$), jestliže

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = q \quad \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = q \right).$$

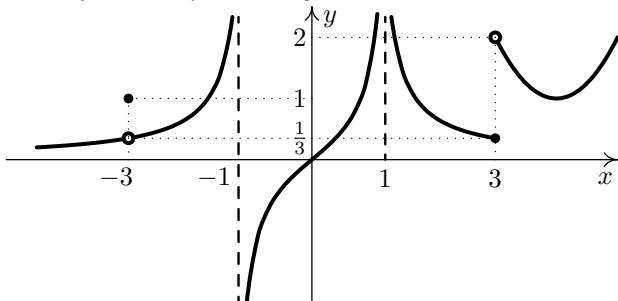
Příklad

Nechť je funkce f zadaná grafem:



Příklad

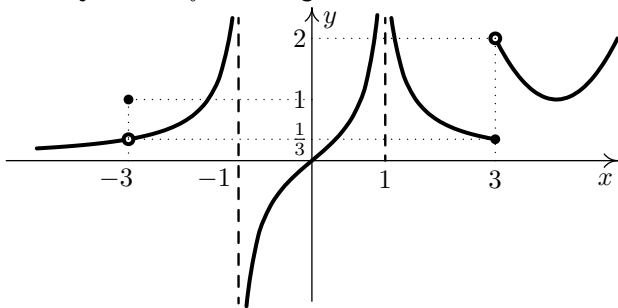
Nechť je funkce f zadaná grafem:



• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

Příklad

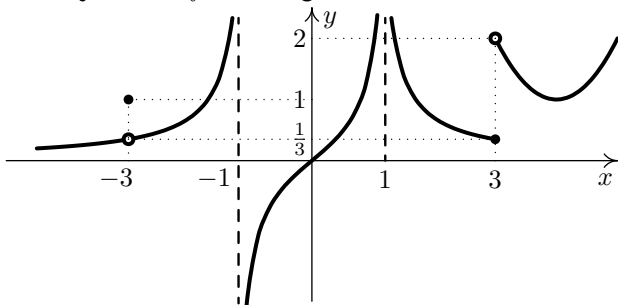
Nechť je funkce f zadaná grafem:



- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \frac{1}{3}$

Příklad

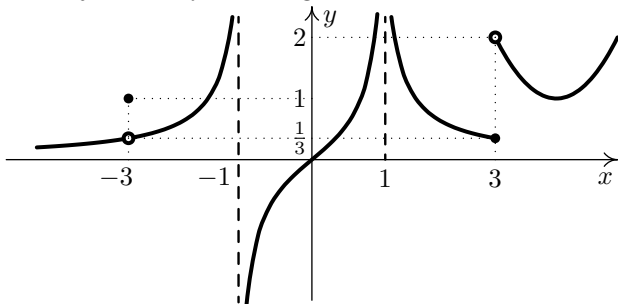
Nechť je funkce f zadaná grafem:



- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \frac{1}{3}$
- $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ neexistuje, neboť
$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$$

Příklad

Nechť je funkce f zadaná grafem:



$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$$

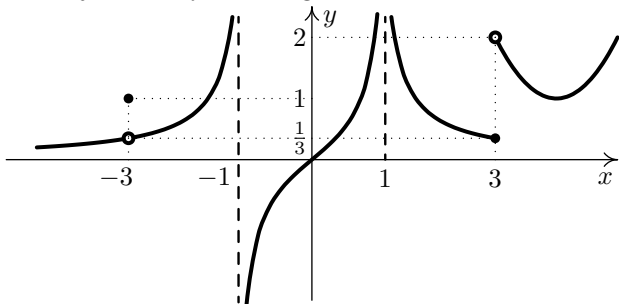
$$\bullet \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \frac{1}{3}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \text{ neexistuje, neboť}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$$

Příklad

Nechť je funkce f zadaná grafem:



- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

- $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \frac{1}{3}$

- $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ neexistuje, neboť

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$$

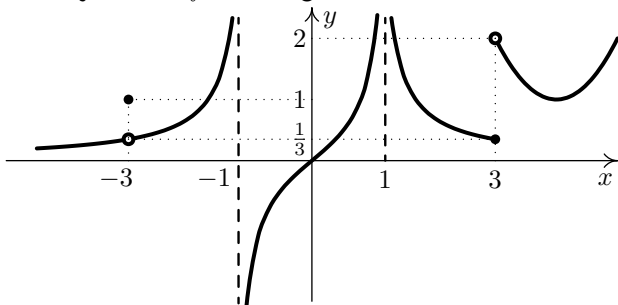
- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$

- $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ neexistuje, neboť

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \frac{1}{3}, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2$$

Příklad

Nechť je funkce f zadaná grafem:



- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

- $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \frac{1}{3}$

- $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ neexistuje, neboť

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$$

- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$

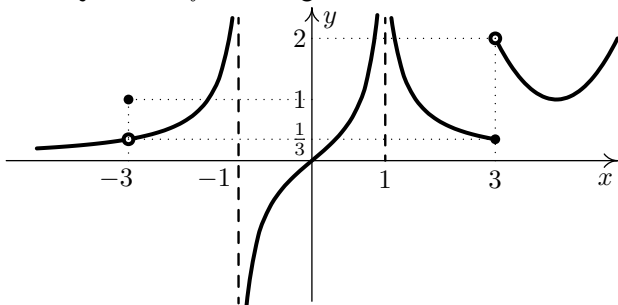
- $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ neexistuje, neboť

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \frac{1}{3}, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2$$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

Příklad

Nechť je funkce f zadaná grafem:



$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \frac{1}{3}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \text{ neexistuje, neboť}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \text{ neexistuje, neboť}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \frac{1}{3}, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

asymptoty: $x = -1$, $x = 1$ a $y = 0$ pro $x \rightarrow -\infty$

Definice (Spojitost v bodě)

- Řekneme, že funkce f je **spojitá v bodě** $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

- Řekneme, že funkce f je **spojitá v bodě** $x_0 \in \mathbb{R}$ **zprava (zleva)**, jestliže

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) \quad (\quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0))$$

- Z definice limity vyplývá, že je-li funkce spojitá v bodě x_0 , pak je definovaná v tomto bodě i v nějakém jeho okolí.

Definice (Spojitost na intervalu)

- Řekneme, že funkce f je **spojitá na otevřeném intervalu** (a, b) , jestliže je spojitá ve všech bodech tohoto intervalu.
- Řekneme, že funkce f je **spojitá na uzavřeném intervalu** $\langle a, b \rangle$, jestliže je spojitá ve všech jeho vnitřních bodech, v bodě a je spojitá zprava a v bodě b je spojitá zleva.

Věta

Základní elementární funkce a funkce, které vznikly součtem, rozdílem, součinem, podílem a skládáním těchto funkcí jsou spojitě ve všech bodech svého definičního oboru.

Body, v nichž funkce není spojitá, se nazývají **body nespojitosti**.

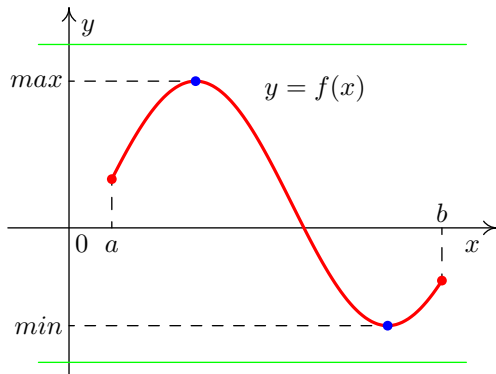
- Body nespojitosti funkce z předchozího příkladu jsou -3 , -1 , 1 a 3 . V bodě 3 je funkce spojitá zleva.
- Body nespojitosti základních elementárních funkcí jsou body, v nichž tyto funkce nejsou definované. Například body nespojitosti funkce $y = \cot gx$ jsou body $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Body nespojitosti racionální lomené funkce jsou nulové body jmenovatele.

Vlastnosti spojitých funkcí

Věta (Weierstrass)

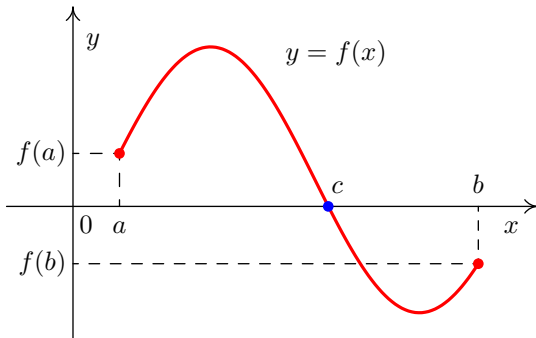
Nechť f je funkce spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$. Pak

- f je na $\langle a, b \rangle$ ohraničená.
- f nabývá na $\langle a, b \rangle$ své největší a nejmenší hodnoty.



Věta (Bolzano)

Nechť f je funkce spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$. Pak f nabývá na $\langle a, b \rangle$ všech hodnot mezi svou nejmenší a největší hodnotou. Zejména, je-li $f(a) \cdot f(b) < 0$, pak existuje bod $c \in (a, b)$ takový, že $f(c) = 0$.



Poznámka

Na předchozí větě je založena metoda půlení intervalu, která se využívá například při řešení algebraických rovnic.

Věta (Pravidla pro počítání s limitami)

Nechť f a g jsou funkce, které mají limitu v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a necht' $c \in \mathbb{R}$. Pak platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} \quad \text{pro} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0.$$

Při výpočtu limity $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ postupujeme tak, že dosadíme bod x_0 do funkce f .

Limita spojité funkce

Je-li funkce f spojitá v x_0 , pak dostaneme po dosazení bodu x_0 do funkce funkční hodnotu (konečné číslo), která je zároveň limitou funkce v daném bodě.

Příklad (Limita spojité funkce)

$$① \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x + 3}{4 - x} = \frac{7}{2}$$

$$② \lim_{x \rightarrow -1} \operatorname{arctg} x^2 = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

V bodech, ve kterých je funkce spojitá, nemá výpočet limity velký význam. Dále se tedy budeme zabývat pouze funkcemi, které nejsou v bodě x_0 spojitě.

Limita typu $\left\| \frac{a}{\pm\infty} \right\|$, $a \in \mathbb{R}$

Pokud při výpočtu limity podílu funkcí $\frac{f}{g}$ dostaneme výraz $\left\| \frac{a}{\pm\infty} \right\|$, tj.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \quad a \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty,$$

pak

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Příklad (Limita typu $\left\| \frac{a}{\pm\infty} \right\|$, $a \in \mathbb{R}$)

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\ln x} = \frac{0}{-\infty} = 0$$

Limita typu $\left\| \frac{a}{0} \right\|$, $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$

Pokud při výpočtu limity podílu funkcí $\frac{f}{g}$ dostaneme výraz $\left\| \frac{a}{0} \right\|$, tj.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \quad a \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0,$$

pak nastane právě jedna ze tří možností:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$, pokud existuje ryzí okolí bodu x_0 takové, že podíl $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ pro všechna x z tohoto okolí.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$, pokud existuje ryzí okolí bodu x_0 takové, že funkce $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ pro všechna x z tohoto okolí.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ neexistuje, pokud se limita zprava nerovná limitě zleva, tj. podíl $\frac{f(x)}{g(x)}$ mění v bodě x_0 znaménko.

Příklad (Limita typu $\left\| \frac{a}{0} \right\|$, $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$)

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{(x-3)^3} = \left\| \frac{3}{0} \right\|$$

Příklad (Limita typu $\left\| \frac{a}{0} \right\|$, $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$)

① $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{(x-3)^3} = \left\| \frac{3}{0} \right\| \Rightarrow$ možný výsledek: ∞ , $-\infty$ nebo neexistuje

Příklad (Limita typu $\left\| \frac{a}{0} \right\|$, $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$)

① $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{(x-3)^3} = \left\| \frac{3}{0} \right\| \Rightarrow$ možný výsledek: ∞ , $-\infty$ nebo neexistuje

Vyšetříme znaménko zlomku $\frac{x}{(x-3)^3}$ v “blízkém” ryzím okolí bodu $x = 3$.

Čitatel x je v “blízkém” ryzím okolí bodu 3 kladný. Jmenovatel $(x-3)^3$ však v bodě 3 mění znaménko: v levém okolí je záporný, v pravém okolí je kladný.

Příklad (Limita typu $\left\| \frac{a}{0} \right\|$, $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$)

① $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{(x-3)^3} = \left\| \frac{3}{0} \right\| \Rightarrow$ možný výsledek: ∞ , $-\infty$ nebo neexistuje

Vyšetříme znaménko zlomku $\frac{x}{(x-3)^3}$ v “blízkém” ryzím okolí bodu $x = 3$.

Čitatel x je v “blízkém” ryzím okolí bodu 3 kladný. Jmenovatel $(x-3)^3$ však v bodě 3 mění znaménko: v levém okolí je záporný, v pravém okolí je kladný.

Pro jednostranné limity platí:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x}{(x-3)^3} = \left\| \frac{+}{+} \right\| = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x}{(x-3)^3} = \left\| \frac{+}{-} \right\| = -\infty,$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{(x-3)^3} \text{ neexistuje.}$$

Příklad (Limita typu $\left\| \frac{a}{0} \right\|$, $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$)

1 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{(x-3)^3} = \left\| \frac{3}{0} \right\| \Rightarrow$ možný výsledek: ∞ , $-\infty$ nebo neexistuje

Vyšetříme znaménko zlomku $\frac{x}{(x-3)^3}$ v “blízkém” ryzím okolí bodu $x = 3$.

Čitatel x je v “blízkém” ryzím okolí bodu 3 kladný. Jmenovatel $(x-3)^3$ však v bodě 3 mění znaménko: v levém okolí je záporný, v pravém okolí je kladný.

Pro jednostranné limity platí:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x}{(x-3)^3} = \left\| \frac{+}{+} \right\| = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x}{(x-3)^3} = \left\| \frac{+}{-} \right\| = -\infty,$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{(x-3)^3} \text{ neexistuje.}$$

2 $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-7}{(x-5)^2} = \left\| \frac{-2}{0} \right\|$

Příklad (Limita typu $\left\| \frac{a}{0} \right\|$, $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$)

1 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{(x-3)^3} = \left\| \frac{3}{0} \right\| \Rightarrow$ možný výsledek: ∞ , $-\infty$ nebo neexistuje

Vyšetříme znaménko zlomku $\frac{x}{(x-3)^3}$ v “blízkém” ryzím okolí bodu $x = 3$.

Čitatel x je v “blízkém” ryzím okolí bodu 3 kladný. Jmenovatel $(x-3)^3$ však v bodě 3 mění znaménko: v levém okolí je záporný, v pravém okolí je kladný.

Pro jednostranné limity platí:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x}{(x-3)^3} = \left\| \frac{+}{+} \right\| = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x}{(x-3)^3} = \left\| \frac{+}{-} \right\| = -\infty,$$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{(x-3)^3}$ neexistuje.

2 $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-7}{(x-5)^2} = \left\| \frac{-2}{0} \right\| \Rightarrow$ možný výsledek: ∞ , $-\infty$ nebo neexistuje

Příklad (Limita typu $\left\| \frac{a}{0} \right\|$, $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$)

① $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{(x-3)^3} = \left\| \frac{3}{0} \right\| \Rightarrow$ možný výsledek: ∞ , $-\infty$ nebo neexistuje

Vyšetříme znaménko zlomku $\frac{x}{(x-3)^3}$ v “blízkém” ryzím okolí bodu $x = 3$.

Čitatel x je v “blízkém” ryzím okolí bodu 3 kladný. Jmenovatel $(x-3)^3$ však v bodě 3 mění znaménko: v levém okolí je záporný, v pravém okolí je kladný.

Pro jednostranné limity platí:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x}{(x-3)^3} = \left\| \frac{+}{+} \right\| = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x}{(x-3)^3} = \left\| \frac{+}{-} \right\| = -\infty,$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{(x-3)^3} \text{ neexistuje.}$$

② $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-7}{(x-5)^2} = \left\| \frac{-2}{0} \right\| \Rightarrow$ možný výsledek: ∞ , $-\infty$ nebo neexistuje

Čitatel $x-7$ je v “blízkém” ryzím okolí bodu 5 záporný, jmenovatel $(x-5)^2$ je kladný. Takže

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-7}{(x-5)^2} = \left\| \frac{-}{+} \right\| = -\infty.$$

Neurčité výrazy typu $\left\| \frac{0}{0} \right\|$ nebo $\left\| \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \right\|$

Dostaneme-li při výpočtu limity podílu dvou funkcí výraz typu $\left\| \frac{0}{0} \right\|$ nebo $\left\| \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \right\|$, pak se jedná o tzv. **neurčitý výraz**. Tímto typem limit se budeme obecněji zabývat až po probrání pojmu derivace. Zde si ukážeme jen výpočet v případě podílu dvou polynomů.

Další neurčité výrazy: $\left\| \pm\infty \cdot 0 \right\|$, $\left\| \infty - \infty \right\|$, $\left\| 0^0 \right\|$, $\left\| \infty^0 \right\|$, $\left\| 1^\infty \right\|$ se dají převést na výpočet limity typu $\left\| \frac{0}{0} \right\|$ nebo $\left\| \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \right\|$. Těmito typy limit se zabývat nebudeme.

Věta (Limita polynomu a racionální lomené funkce v nevlastním bodě)

Platí

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_0x^n,$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m}.$$

Věta (Limita polynomu a racionální lomené funkce v nevlastním bodě)

Platí

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_0x^n,$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m}.$$

Příklad

① $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 4x^2 + x - 2)$

Věta (Limita polynomu a racionální lomené funkce v nevlastním bodě)

Platí

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_0x^n,$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m}.$$

Příklad

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 4x^2 + x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3$$

Věta (Limita polynomu a racionální lomené funkce v nevlastním bodě)

Platí

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_0x^n,$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m}.$$

Příklad

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 4x^2 + x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty.$$

Věta (Limita polynomu a racionální lomené funkce v nevlastním bodě)

Platí

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_0x^n,$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m}.$$

Příklad

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 4x^2 + x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty.$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 3x^2 - 2x}{3x^4 + 5}$$

Věta (Limita polynomu a racionální lomené funkce v nevlastním bodě)

Platí

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_0x^n,$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m}.$$

Příklad

$$① \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 4x^2 + x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty.$$

$$② \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 3x^2 - 2x}{3x^4 + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{3x^4}$$

Věta (Limita polynomu a racionální lomené funkce v nevlastním bodě)

Platí

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_0x^n,$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m}.$$

Příklad

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 4x^2 + x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty.$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 3x^2 - 2x}{3x^4 + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{3x^4} = \frac{1}{3}.$$

Věta (Limita polynomu a racionální lomené funkce v nevlastním bodě)

Platí

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_0x^n,$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m}.$$

Příklad

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 4x^2 + x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty.$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 3x^2 - 2x}{3x^4 + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{3x^4} = \frac{1}{3}.$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^6 + 3x^4 - 2}{3x^2 + x - 1}$$

Věta (Limita polynomu a racionální lomené funkce v nevlastním bodě)

Platí

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_0x^n,$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m}.$$

Příklad

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 4x^2 + x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty.$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 3x^2 - 2x}{3x^4 + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{3x^4} = \frac{1}{3}.$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^6 + 3x^4 - 2}{3x^2 + x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^6}{3x^2}$$

Věta (Limita polynomu a racionální lomené funkce v nevlastním bodě)

Platí

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_0x^n,$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m}.$$

Příklad

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 4x^2 + x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty.$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 3x^2 - 2x}{3x^4 + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{3x^4} = \frac{1}{3}.$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^6 + 3x^4 - 2}{3x^2 + x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^6}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{3}x^4$$

Věta (Limita polynomu a racionální lomené funkce v nevlastním bodě)

Platí

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_0x^n,$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m}.$$

Příklad

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 4x^2 + x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty.$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 3x^2 - 2x}{3x^4 + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{3x^4} = \frac{1}{3}.$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^6 + 3x^4 - 2}{3x^2 + x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^6}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{3}x^4 = \infty.$$

Věta (Limita polynomu a racionální lomené funkce v nevlastním bodě)

Platí

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_0x^n,$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m}.$$

Příklad

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 4x^2 + x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty.$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 3x^2 - 2x}{3x^4 + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{3x^4} = \frac{1}{3}.$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^6 + 3x^4 - 2}{3x^2 + x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^6}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{3}x^4 = \infty.$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x - 2}{3x^3 + x^2 + 2}$$

Věta (Limita polynomu a racionální lomené funkce v nevlastním bodě)

Platí

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_0x^n,$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m}.$$

Příklad

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 4x^2 + x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty.$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 3x^2 - 2x}{3x^4 + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{3x^4} = \frac{1}{3}.$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^6 + 3x^4 - 2}{3x^2 + x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^6}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{3}x^4 = \infty.$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x - 2}{3x^3 + x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2}{3x^3}$$

Věta (Limita polynomu a racionální lomené funkce v nevlastním bodě)

Platí

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_0x^n,$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m}.$$

Příklad

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 4x^2 + x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty.$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 3x^2 - 2x}{3x^4 + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{3x^4} = \frac{1}{3}.$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^6 + 3x^4 - 2}{3x^2 + x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^6}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{3}x^4 = \infty.$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x - 2}{3x^3 + x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2}{3x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{3x}$$

Věta (Limita polynomu a racionální lomené funkce v nevlastním bodě)

Platí

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_0x^n,$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m}.$$

Příklad

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 4x^2 + x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty.$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 3x^2 - 2x}{3x^4 + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{3x^4} = \frac{1}{3}.$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^6 + 3x^4 - 2}{3x^2 + x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^6}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{3}x^4 = \infty.$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x - 2}{3x^3 + x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2}{3x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{3x} = \frac{5}{-\infty}$$

Věta (Limita polynomu a racionální lomené funkce v nevlastním bodě)

Platí

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_0x^n,$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m}.$$

Příklad

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 4x^2 + x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty.$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 3x^2 - 2x}{3x^4 + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{3x^4} = \frac{1}{3}.$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^6 + 3x^4 - 2}{3x^2 + x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^6}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{3}x^4 = \infty.$$

$$\textcircled{4} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x - 2}{3x^3 + x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2}{3x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{3x} = \frac{5}{-\infty} = 0.$$

Příklad

Vypočtete limity:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 3x^4 + x - 2}{2x^3 + 4}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2}{x - 1}.$$

Řešení pomocí Wolfram Alpha (<http://www.wolframalpha.com/>):

$$\lim (x^5 - 3x^4 + x - 2) / (2x^3 + 4) \text{ as } x \rightarrow \infty$$

$$\lim (\ln x) / x \text{ as } x \rightarrow 0^+$$

$$\lim ((x + 2) / (x - 1)) \text{ as } x \rightarrow 1$$