evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Funkce – základní pojmy a vlastnosti

Základy vyšší matematiky

LDF MENDELU

Podpořeno projektem Průřezová inovace studijních programů Lesnické a dřevařské fakulty MENDELU v Brně (LDF) s ohledem na disciplíny společného základu http://akademie.ldf.mendelu.cz/cz (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0021) za přispění finančních prostředků EU a státního rozpočtu České republiky.

Simona Fišnarová Brno 2012

Množina reálných čísel a její podmnožiny

- Reálná čísla se zobrazují jako body na číselné ose. Každému bodu číselné osy odpovídá právě jedno reálné číslo. Množinu reálných čísel značíme $\mathbb{R}$.

- Další číselné množiny:

  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ – množina přirozených čísel

  $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ – množina celých čísel

  $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ – množina racionálních čísel

  $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ – množina iracionálních čísel

  $\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}$ – množina komplexních čísel

- Množiny $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$ jsou podmnožiny množiny $\mathbb{R}$.

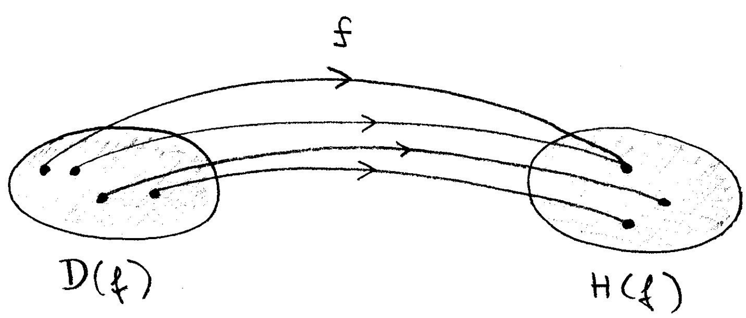
- Symbolem $\mathbb{R}^2$ budeme značit množinu všech uspořádaných dvojich (x, y), kde $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ ... rovina

Pojem funkce

Definice (Funkce)

Nechť M je neprázdná podmnožina množiny reálných čísel, tj. $M \subseteq \mathbb{R}$. Pravidlo f, které každému prvku $x \in M$ přiřazuje **právě jeden** prvek $y \in \mathbb{R}$, se nazývá **reálná funkce jedné reálné proměnné**. Píšeme $y = f(x)$ nebo $f : x \to y$.

- Množina M se nazývá **definiční obor** funkce f a značí se $D(f)$.
- Množina všech $y \in \mathbb{R}$, pro něž existuje $x \in M$ takové, že $y = f(x)$, se nazývá **obor hodnot** funkce f a značí se $H(f)$.



- Funkce je zadaná definičním oborem $D(f)$ a pravidlem (funkčním předpisem), pomocí něhož je každému $x \in D(f)$ přiřazen právě jeden prvek $y \in H(f)$.

  Například:

  - $y = x^2, \ x \geq 0$
  - $y = x^2, \ x \leq 0$
  - $y = \sin x, \ x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

- Pokud není v zadání funkce definiční obor uveden, pak jím rozumíme množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro která má daný předpis "smysl".

  Například definiční obor funkce $y = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$ určíme následovně:

  $$x + 1 \geq 0 \Longrightarrow x \geq -1 \quad \text{a zároveň} \quad x \neq 0,$$

  tedy

  $$D(f) = \langle -1, 0) \cup (0, \infty).$$

- **Explicitně zadaná funkce**: "$y =$ vzorec s proměnnou x",

  například $y = \sin x, \ y = \ln x, \ y = 3^x, \ y = x^4 + 2x, \ y = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$.

  V zápisu $y = f(x)$ nazýváme

  - $f \ldots$ funkční předpis (např. $\sin$, $\ln$, $\ldots$)
  - $x \ldots$ argument (nezávislá proměnná)
  - $y \ldots$ funkční hodnota (závislá proměnná)

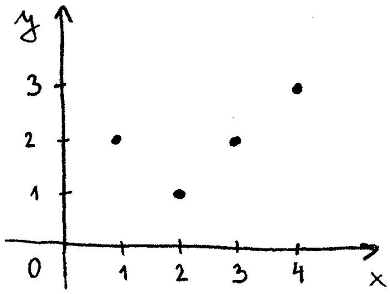
- **Implicitně zadaná funkce**: "vzorec s proměnnými $x, y = 0$",

  například $\sin(x + 2y) + y = 0$.

Budeme se zabývat pouze funkcemi zadanými explicitně.

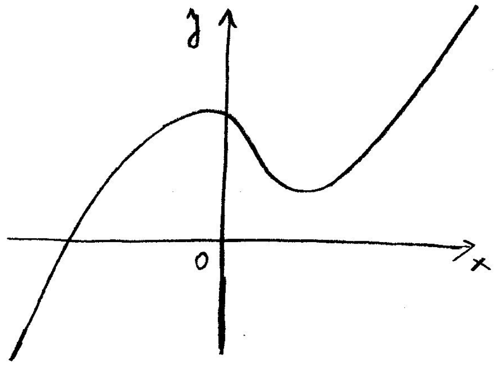
Definice (Graf funkce)

Grafem funkce f rozumíme množinu všech uspořádaných dvojic $(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2$, kde $x \in D(f)$.



$D(f) = \{1,2,3,4\}$

$H(f) = \{1,2,3\}$

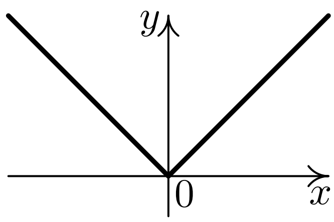


$D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = \mathbb{R}$

Příklad (Absolutní hodnota a signatura)

- Absolutní hodnota

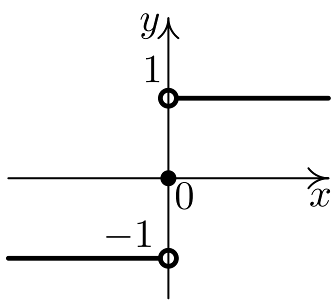
$$f(x) := |x| = \begin{cases} x & \text{pro } x \geq 0, \\ -x & \text{pro } x \leq 0. \end{cases}$$



$D(f) = \mathbb{R}, \quad H(f) = [0, \infty)$

- Signatura

$$f(x) := \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{pro } x < 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ 1 & \text{pro } x > 0. \end{cases}$$

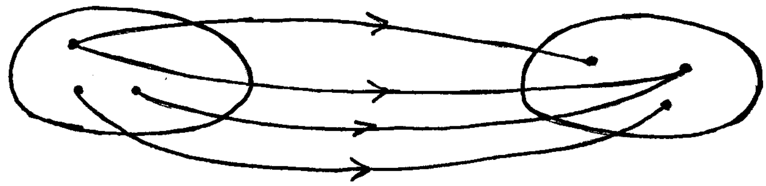


$D(f) = \mathbb{R}, \quad H(f) = \{-1, 0, 1\}$

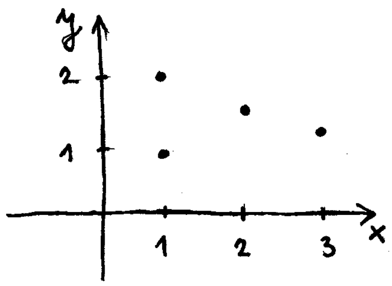
- Platí: $|x| = x \cdot \operatorname{sgn} x$ a také $x = |x| \cdot \operatorname{sgn} x$.

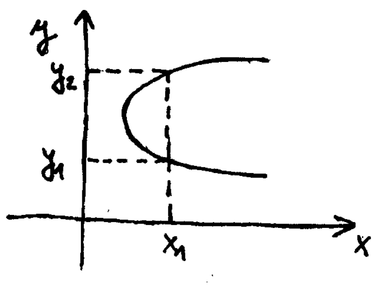
Není funkce, není graf

- Zobrazení, které není funkce – jednomu bodu nemohou být přiřazeny dvě různé hodnoty:



- Body v rovině nebo křivka, které nejsou grafem funkce:





Vlastnosti funkcí

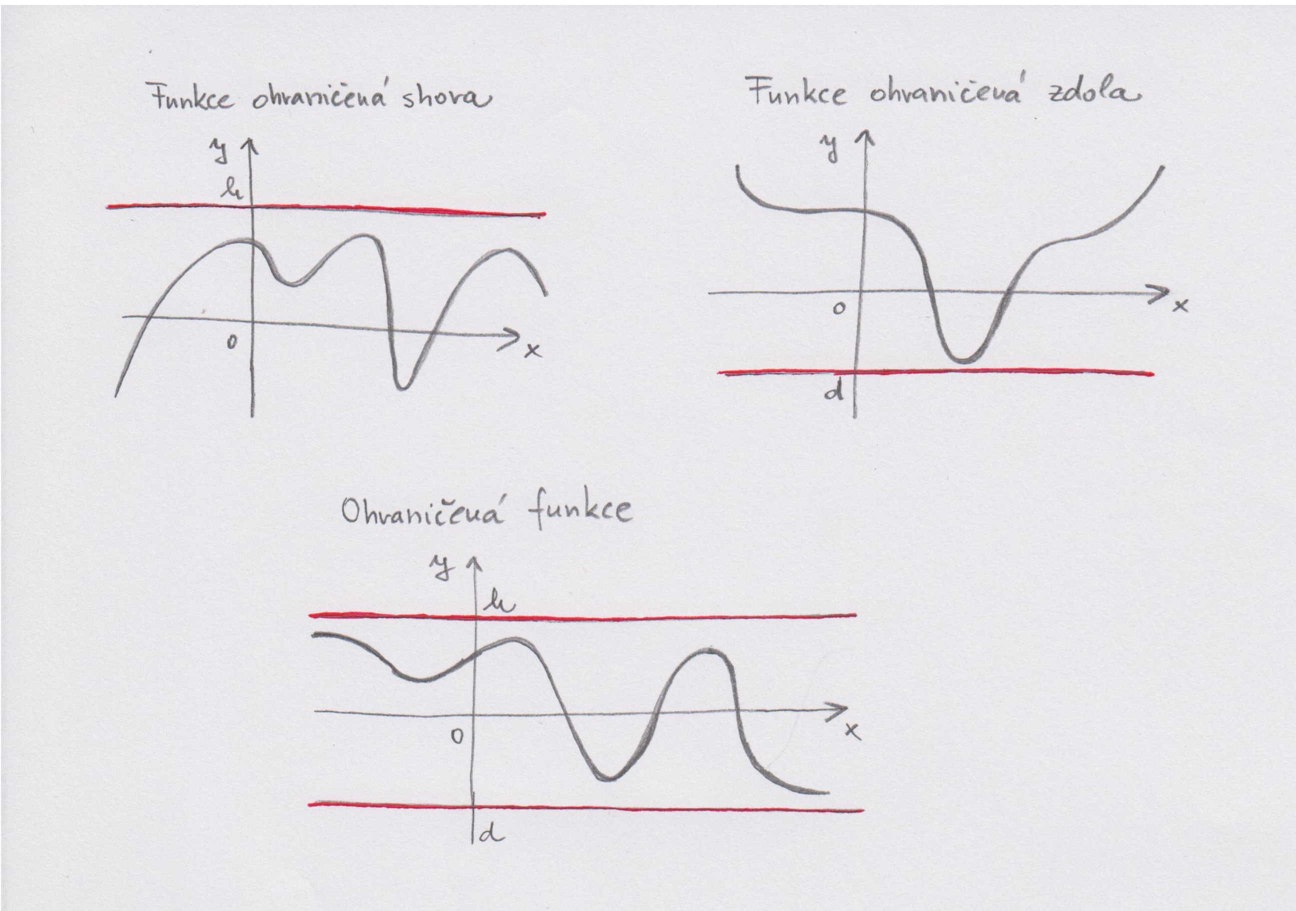
- ohraničenost
- parita (sudost, lichost)
- periodičnost
- monotonie
- prostost

Definice (Ohraničenost)

Nechť f je funkce a $M \subseteq D(f)$ je neprázdná množina. Řekneme, že funkce f je na množině M

- **zdola ohraničená**, jestliže existuje $d \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x) \geq d$ pro každé $x \in M$.
- **shora ohraničená**, jestliže existuje $h \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x) \leq h$ pro každé $x \in M$.
- **ohraničená**, jestliže je na množině M ohraničená zdola i shora.

- Je-li funkce ohraničená zdola, pak existuje vodorovná přímka (při označení z definice $y = d$) taková, že graf funkce leží nad touto přímkou.
- Je-li funkce ohraničená shora, pak existuje vodorovná přímka (při označení z definice $y = h$) taková, že graf funkce leží pod touto přímkou.
- Je-li funkce ohraničená, leží celý graf mezi dvěma vodorovnými přímkami.

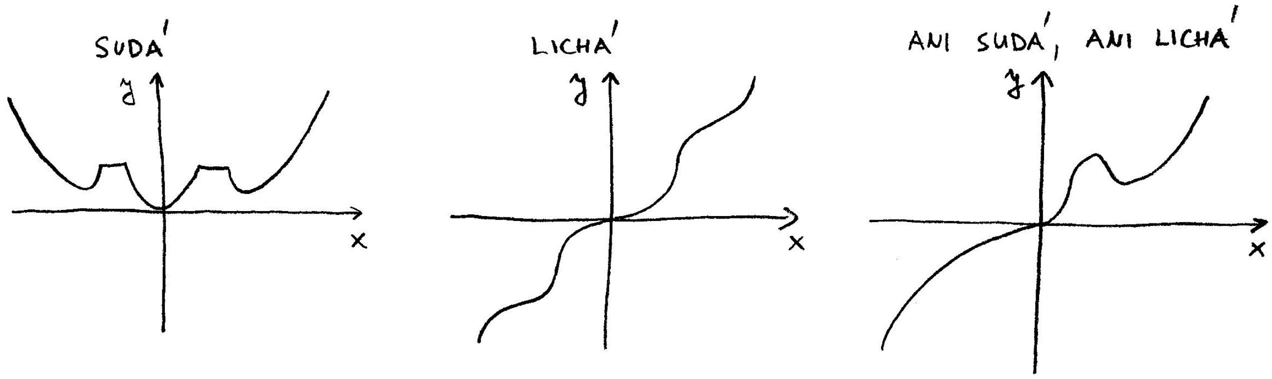


Definice (Parita)

Funkce f se nazývá

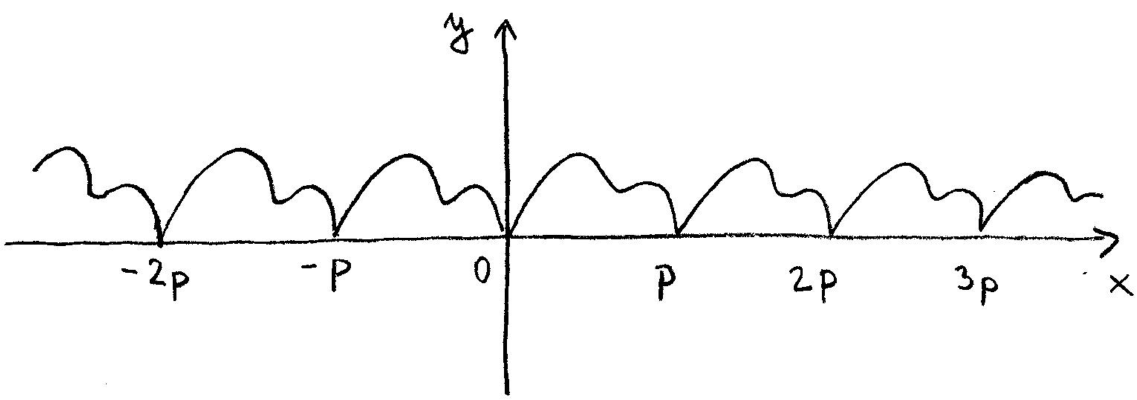
- **sudá**, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí
$$-x \in D(f) \quad \text{a} \quad f(-x) = f(x).$$
- **lichá**, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí
$$-x \in D(f) \quad \text{a} \quad f(-x) = -f(x).$$

- Graf sudé funkce je souměrný podle osy y.
- Graf liché funkce je souměrný podle počátku.



Definice (Periodičnost)

Nechť $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$. Funkce f se nazývá **periodická** s periodou p, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí
$$x \pm p \in D(f) \quad \text{a} \quad f(x+p) = f(x) = f(x-p).$$

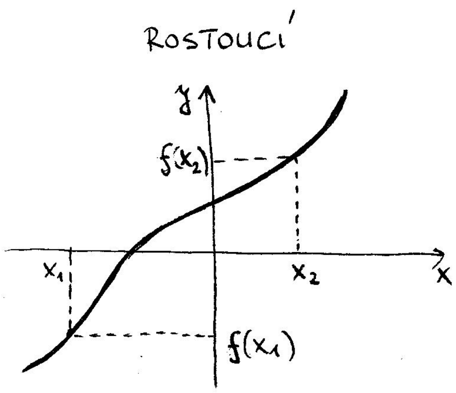


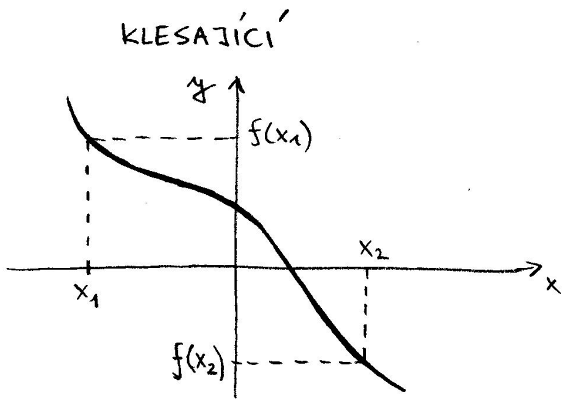
Definice (Monotonie)

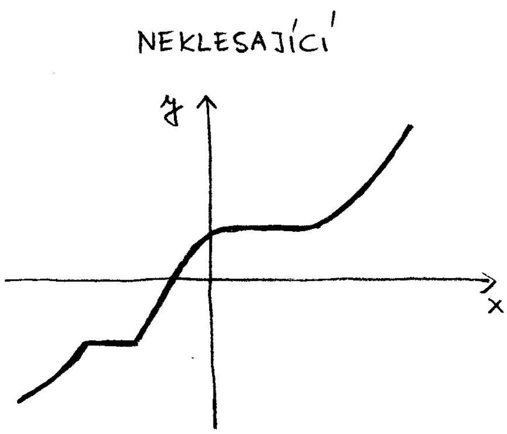
Nechť f je funkce a $M \in D(f)$ neprázdná množina. Řekneme, že funkce f je na množině M

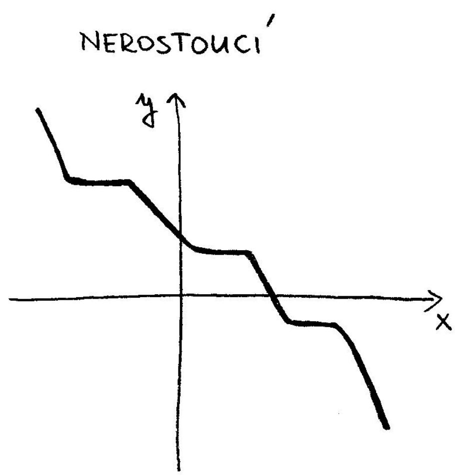
- **rostoucí**, jestliže pro každá dvě $x_1,\ x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ je $f(x_1) < f(x_2)$.
- **klesající**, jestliže pro každá dvě $x_1,\ x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ je $f(x_1) > f(x_2)$.
- **neklesající**, jestliže pro každá dvě $x_1,\ x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ je $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- **nerostoucí**, jestliže pro každá dvě $x_1,\ x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ je $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Funkce f se nazývá **monotonní** na množině M, jestliže je neklesající nebo nerostoucí.
Funkce f se nazývá **ryze monotonní** na množině M, jestliže je rostoucí nebo klesající.





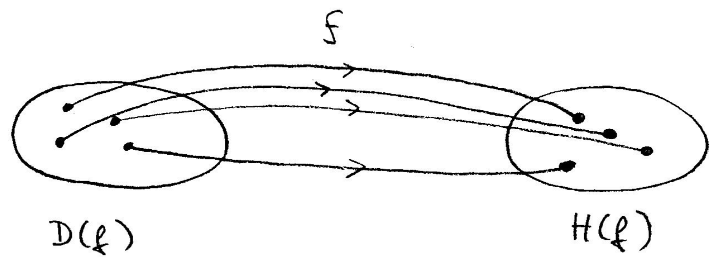




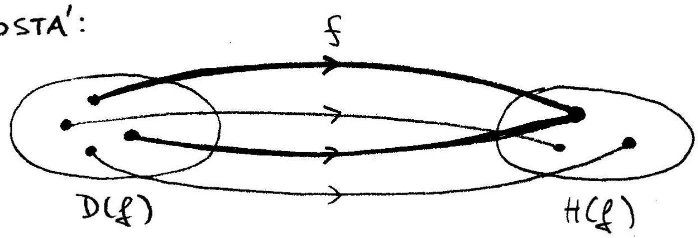
Definice (Prostá funkce)

Nechť f je funkce a $M \in D(f)$ neprázdná množina. Řekneme, že funkce f je na množině M **prostá**, jestliže pro každá dvě $x_1,\ x_2 \in M$ splňující $x_1 \neq x_2$ je $f(x_1) \neq f(x_2)$.

PROSTÁ:



NENÍ PROSTÁ:



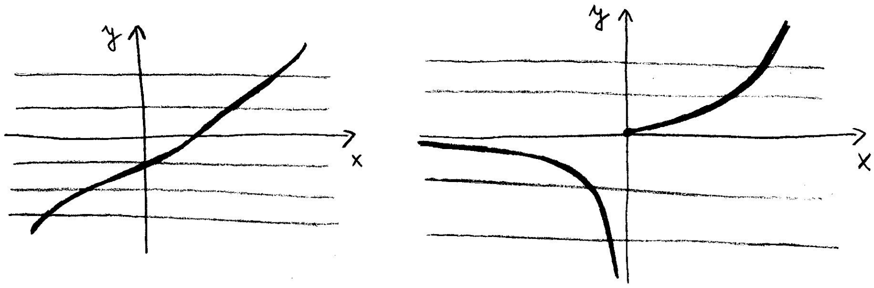
Dva různé body z D(f) se zobrazí do jednoho bodu z H(f).

Věta

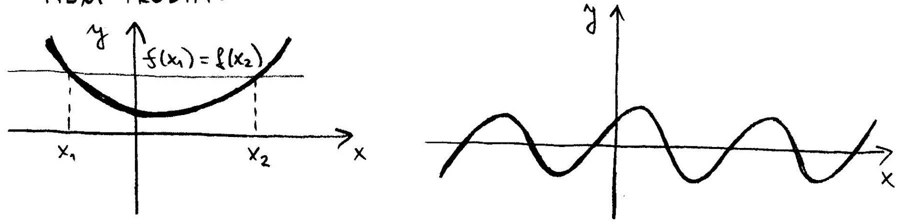
Je-li funkce ryze monotonní na množině M, pak je na této množině prostá.

Je-li funkce prostá, pak každá vodorovná přímka protíná její graf v nejvýše jednom bodě.

PROSTÁ:



NENÍ PROSTÁ:



Operace s funkcemi

Součet, rozdíl, součin a podíl funkcí f a g definujeme následovně:

$$\begin{aligned}
(f+g)(x) &= f(x)+g(x) \quad \text{pro} \quad x \in D(f) \cap D(g) \\
(f-g)(x) &= f(x)-g(x) \quad \text{pro} \quad x \in D(f) \cap D(g) \\
(f \cdot g)(x) &= f(x)\cdot g(x) \quad \text{pro} \quad x \in D(f) \cap D(g) \\
\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{pro} \quad x \in D(f) \cap D(g) \setminus \{z \in \mathbb{R} : g(z)=0\}
\end{aligned}$$

Příklad

$f : y = x^3, \quad g : y = x, \quad D(f) = D(g) = \mathbb{R}$

- $f + g : y = x^3 + x, \quad D(f+g) = \mathbb{R}$
- $f - g : y = x^3 - x, \quad D(f-g) = \mathbb{R}$
- $f \cdot g : y = x^4, \quad D(f \cdot g) = \mathbb{R}$
- $\frac{f}{g} : y = x^2, \quad D\left(\frac{f}{g}\right) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Skládání funkcí

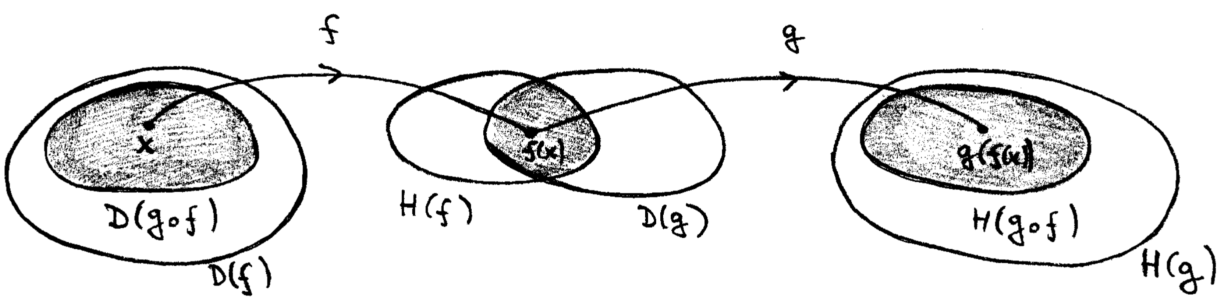
Dosazením libovolné funkce za argument jiné funkce vzniká funkce složená.

Definice (Složená funkce)

Nechť f, g jsou dvě funkce. **Složenou funkcí** $g \circ f$ rozumíme funkci definovanou předpisem

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad \text{kde} \quad x \in D(f) \text{ a } f(x) \in D(g).$$

Funkce f se nazývá **vnitřní složka** a g **vnější složka** složené funkce $g \circ f$. Zápis $g \circ f$ čteme "g po f".



Příklad

$f : y = x^2, \quad g : y = \sin x$

- $g \circ f : y = g(f(x)) = \sin x^2$
- $f \circ g : y = f(g(x)) = \sin^2 x$

Složená funkce může mít více složek, např.

$$(h \circ g \circ f)(x) = h(g(f(x))).$$

Příklad

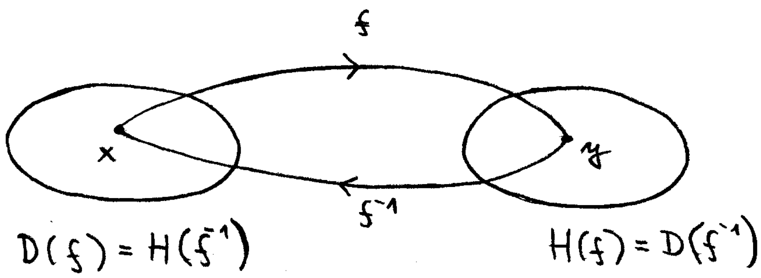
$f : y = x^2, \quad g : y = \sin x, \quad h : y = \ln x$

- $h \circ g \circ f : y = h(g(f(x))) = \ln \sin x^2$
- $f \circ g \circ h : y = f(g(h(x))) = \sin^2 \ln x$
- $f \circ h \circ g : y = f(h(g(x))) = \ln^2 \sin x$
- $g \circ f \circ h : y = g(f(h(x))) = \sin \ln^2 x$

Inverzní funkce

Definice (Inverzní funkce)

Nechť f je prostá funkce. Funkce f^{-1}, která každému $y \in H(f)$ přiřazuje právě to $x \in D(f)$, pro které platí $y = f(x)$, se nazývá **inverzní funkce** k funkci f.



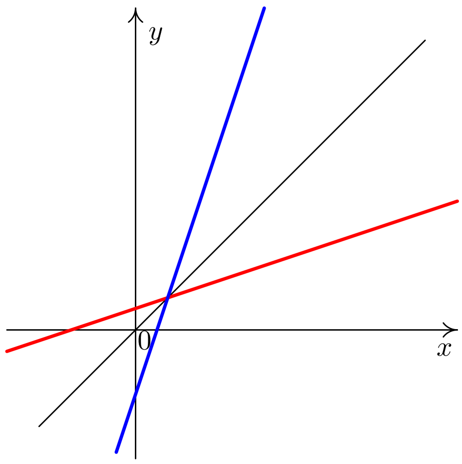
- f je inverzní funkce k funkci f^{-1}.
- Grafy funkcí f a f^{-1} jsou symetrické podle přímky $y = x$.
- $D(f) = H(f^{-1})$ a $H(f) = D(f^{-1})$
- $f^{-1}(f(x)) = x$ pro každé $x \in D(f)$
  $f(f^{-1}(y)) = y$ pro každé $y \in H(f)$
- Funkce f je rostoucí (klesající), pak f^{-1} je také rostoucí (klesající).

Inverzní funkci k funkci f určíme tak, že v zadání funkce $y = f(x)$ zaměníme proměnné x a y. Dostaneme tedy rovnici $x = f(y)$. Z této rovnice vyjádříme proměnnou y (pokud to lze). Je-li funkce f prostá, je toto vyjádření jednoznačné.

Příklad

Inverzní funkce k funkci $y = 3x - 1$ je funkce $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$.

$$f: \quad y = 3x - 1 \qquad\qquad f^{-1}: \quad x = 3y - 1 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$$
$$D(f) = \mathbb{R} \qquad\qquad D(f^{-1}) = \mathbb{R}$$
$$H(f) = \mathbb{R} \qquad\qquad H(f^{-1}) = \mathbb{R}$$



Některé vzájemně inverzní funkce:

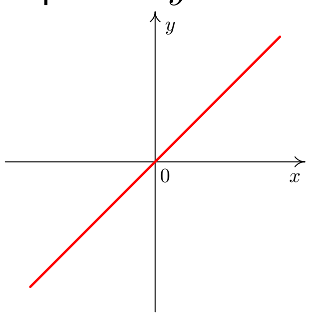
$y = \sqrt{x}$	$y = x^2,\ x \geq 0$
$y = \sqrt[3]{x}$	$y = x^3$
$y = e^x$	$y = \ln x$
$y = a^x, a \neq 1, a > 0$	$y = \log_a x$
$y = \sin x,\ x \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$	$y = \arcsin x$
$y = \cos x,\ x \in \langle 0, \pi \rangle$	$y = \arccos x$
$y = \mathrm{tg} x,\ x \in (-\pi/2, \pi/2)$	$y = \mathrm{arctg} x$
$y = \mathrm{cotg} x,\ x \in (0, \pi)$	$y = \mathrm{arccotg} x$

Základní elementární funkce

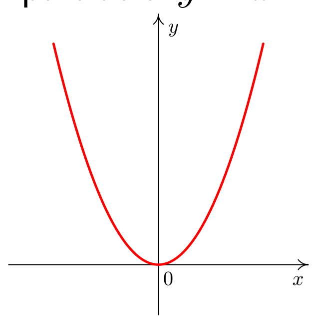
- Mocninné funkce
- Exponenciální funkce
- Logaritmické funkce (inverzní k exponenciálním)
- Goniometrické funkce
- Cyklometrické funkce (inverzní ke goniometrickým na daném intervalu)

Mocninné funkce

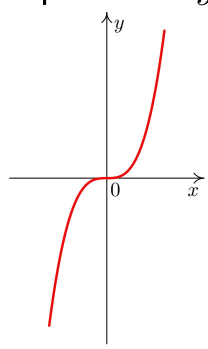
přímka $y = x$



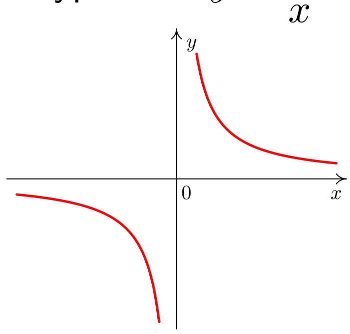
parabola $y = x^2$



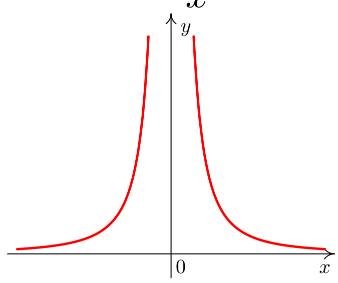
kubická parabola $y = x^3$



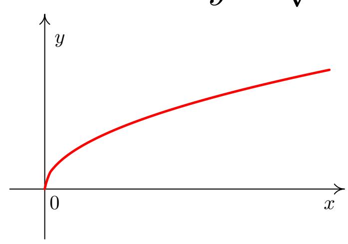
hyperbola $y = \dfrac{1}{x}$



$y = \dfrac{1}{x^2}$

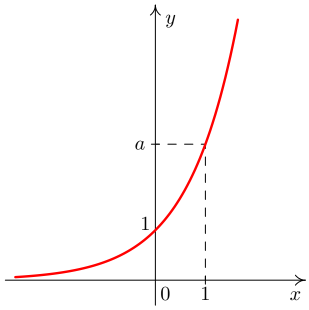


odmocnina $y = \sqrt{x}$



Exponenciální a logaritmické funkce

$y = a^x \ (a > 1)$

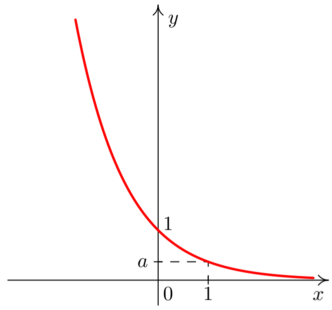


Speciální případ:

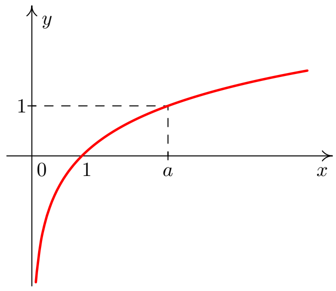
$$y = e^x, \ e \doteq 2,71828$$

e je tzv. Eulerovo číslo

$y = a^x \ (0 < a < 1)$



$y = \log_a x \ (a > 1)$

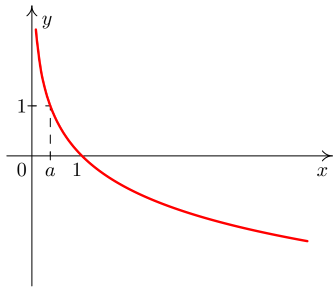


Speciální případ:

$$y = \ln x = \log_e x$$

tzv. přirozený logaritmus

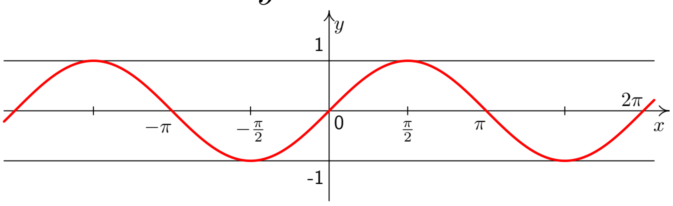
$y = \log_a x \ (0 < a < 1)$



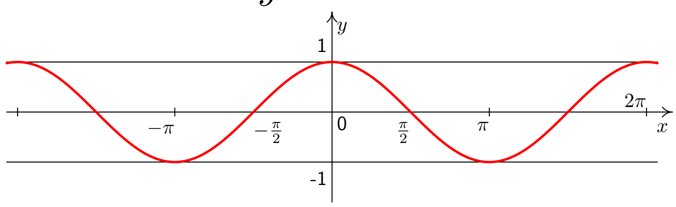
Funkce $y = a^x$ a $y = \log_a x$ jsou vzájemně inverzní, tedy $y = \log_a x \iff x = a^y$.

Goniometrické funkce

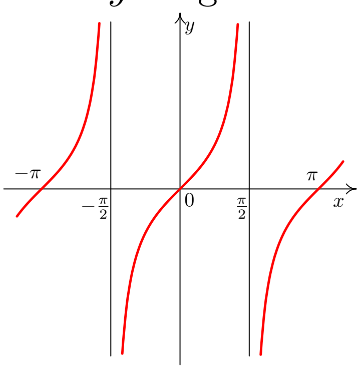
$y = \sin x$



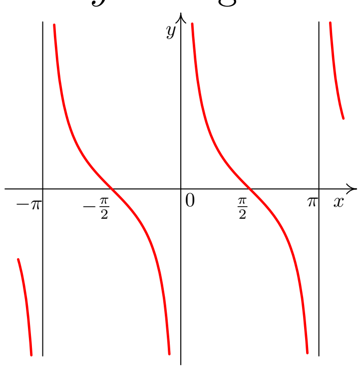
$y = \cos x$



$y = \operatorname{tg} x$



$y = \operatorname{cotg} x$



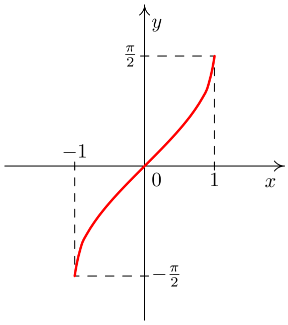
$$\mathrm{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\mathrm{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Cyklometrické funkce

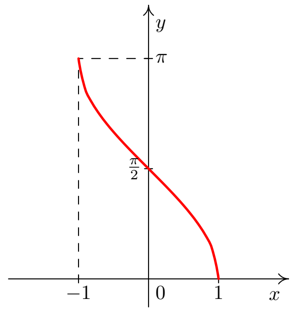
$y = \arcsin x$

inverzní k $y = \sin x,\ x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$



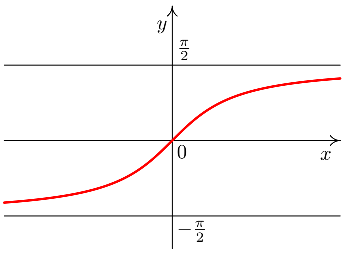
$y = \arccos x$

inverzní k $y = \cos x,\ x \in \langle 0, \pi \rangle$



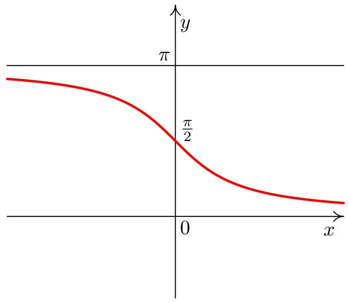
$y = \operatorname{arctg} x$

inverzní k $y = \operatorname{tg} x,\ x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$



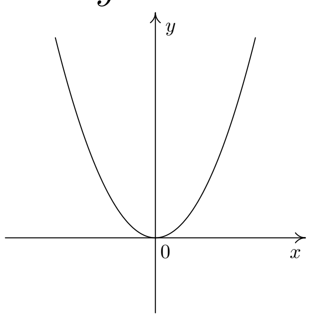
$y = \operatorname{arccotg} x$

inverzní k $y = \operatorname{cotg} x,\ x \in (0, \pi)$

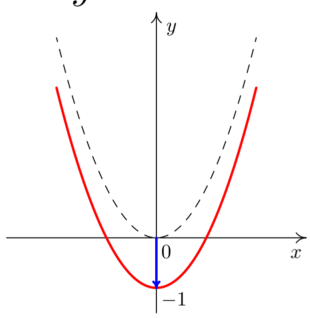


Transformace grafu funkce

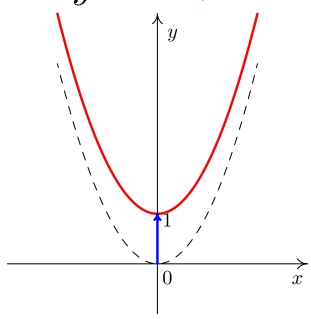
$y = x^2$



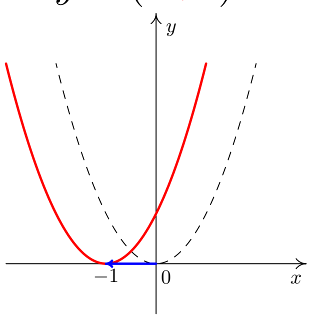
$y = x^2 - 1$



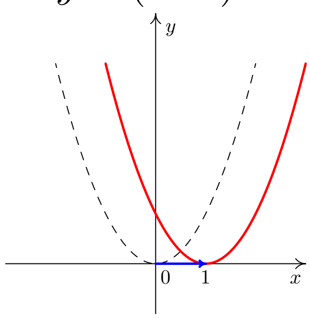
$y = x^2 + 1$



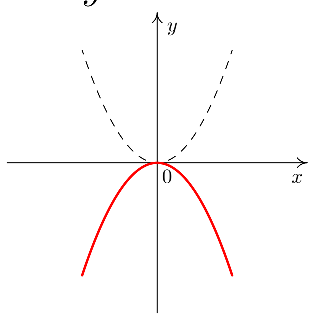
$y = (x+1)^2$



$y = (x-1)^2$



$y = -x^2$



Polynomy

Definice (Polynom)

Polynomem stupně n rozumíme funkci tvaru

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R},\ a_0 \neq 0$. Čísla $a_0, a_1, \ldots, a_n$ nazýváme **koeficienty** polynomu. Člen a_n se nazývá **absolutní člen** polynomu.

Příklad

- polynom stupně 0: $P_0(x) = a$ (konstantní funkce)
- polynom stupně 1: $P_1(x) = ax + b$ (lineární funkce)
- polynom stupně 2: $P_2(x) = ax^2 + bx + c$ (kvadratická funkce)
- konkrétní příklad polynomu 5. stupně: $x^5 - 3x^4 + 5x^2 - x + 9$

Definice (Kořen polynomu)

- Číslo c se nazývá **kořen polynomu** $P_n(x)$, jestliže

$$P_n(c) = 0.$$

- Kořen c polynomu $P_n(x)$ se nazývá k-**násobný**, jesliže existuje polynom Q_{n-k} takový, že

$$P_n(x) = (x-c)^k Q_{n-k}(x)$$

  a c není kořenem polynomu $Q_{n-k}(x)$, tj. $Q_{n-k}(c) \neq 0$.

- Kořen s násobností 1 se nazývá jednoduchý kořen.
- Násobnost kořene c udává, kolikrát je možné vydělit daný polynom beze zbytku tzv. kořenovým činitelem $(x-c)$.

Věta (Základní věta algebry)

Každý polynom stupně n má právě n kořenů (včetně komplexních), přitom každý kořen počítáme tolikrát, kolik je jeho násobnost.

Příklad

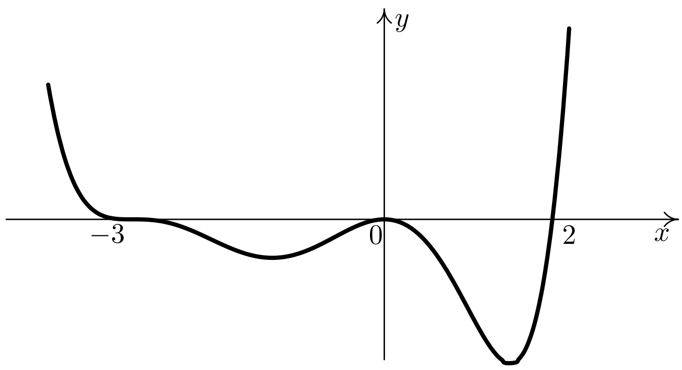
- Lineární polynom $P_1(x) = ax + b$ má právě jeden kořen $x = -\frac{b}{a}$ (řešení rovnice $ax + b = 0$).
- Kvadratický polynom $P_2(x) = ax^2 + bx + c$ má právě dva kořeny $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (řešení rovnice $ax^2 + bx + c = 0$):
  - dva různé reálné kořeny, pokud $b^2 - 4ac > 0$
  - jeden dvojnásobný reálný kořen, pokud $b^2 - 4ac = 0$
  - dvojici komplexně sdružených kořenů, pokud $b^2 - 4ac < 0$

Geometrický význam reálných kořenů

Reálné kořeny polynomu jsou průsečíky grafu tohoto polynomu s osou x.

- **Kořen sudé násobnosti**: Polynom nemění znaménko v tomto bodě.
- **Kořen liché násobnosti**: Polynom mění znaménko v tomto bodě.

Příklad



$P(x) = x^2(x-2)(x+3)^3$

- -3 je trojnásobný kořen
- 0 je dvojnásobný kořen
- 2 je jednoduchý kořen

Racionální lomená funkce

Definice (Racionální lomená funkce)

Nechť $P_n(x)$ je polynom stupně n a $Q_m(x)$ je polynom stupně m. Funkce tvaru

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

se nazývá **racionální lomená funkce**.

- Je-li $n < m$, pak se $R(x)$ nazývá **ryze lomená**.
- Je-li $n \geq m$, pak se $R(x)$ nazývá **neryze lomená**.

Každou neryze lomenou racionální funkci lze vyjádřit jako součet polynomu a ryze lomené racionální funkce. (Provedeme dělení $P_n(x) : Q_m(x)$).

Využití systémů počítačové algebry

Využití systémů Sage, Maxima, Wolfram Alpha:

- Základy práce:

  `http://user.mendelu.cz/marik/akademie/zaklady-prace.html`

- Grafika:

  `http://user.mendelu.cz/marik/akademie/grafika.html`

Matematické výpočty online (MAW):

- Grafy funkcí:

  `http://um.mendelu.cz/maw-html/index.php?lang=cs&form=graf`

- Definiční obory:

  `http://um.mendelu.cz/maw-html/index.php?lang=cs&form=df`

Příklad

Určete definiční obory funkcí:

$$y = \ln\left(\frac{x+2}{x-3}\right), \quad y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}.$$

Řešení pomocí Wolfram Alpha (`http://www.wolframalpha.com/`):

```
domain of f(x)=ln((x+2)/(x-3))
```

```
domain of f(x)=sqrt(x^2-3x+2)
```

Příklad

Nakreselte grafy funkcí:

$$y = x^2 + 2, \quad y = \sin x.$$

Řešení pomocí Wolfram Alpha (`http://www.wolframalpha.com/`):

```
plot x^2+2
```

```
plot sin(x)
```