evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Derivace funkce

Základy vyšší matematiky

LDF MENDELU

Podpořeno projektem Průřezová inovace studijních programů Lesnické a dřevařské fakulty MENDELU v Brně (LDF) s ohledem na disciplíny společného základu `http://akademie.ldf.mendelu.cz/cz` (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0021) za přispění finančních prostředků EU a státního rozpočtu České republiky.

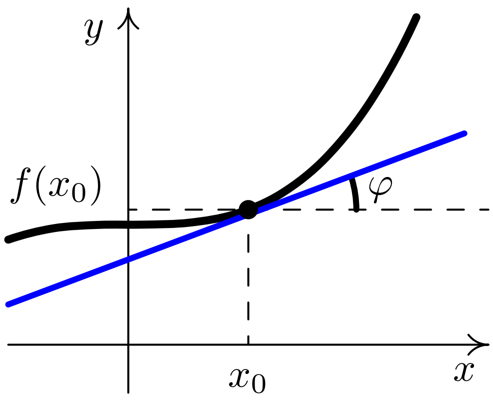
Simona Fišnarová

Brno 2012

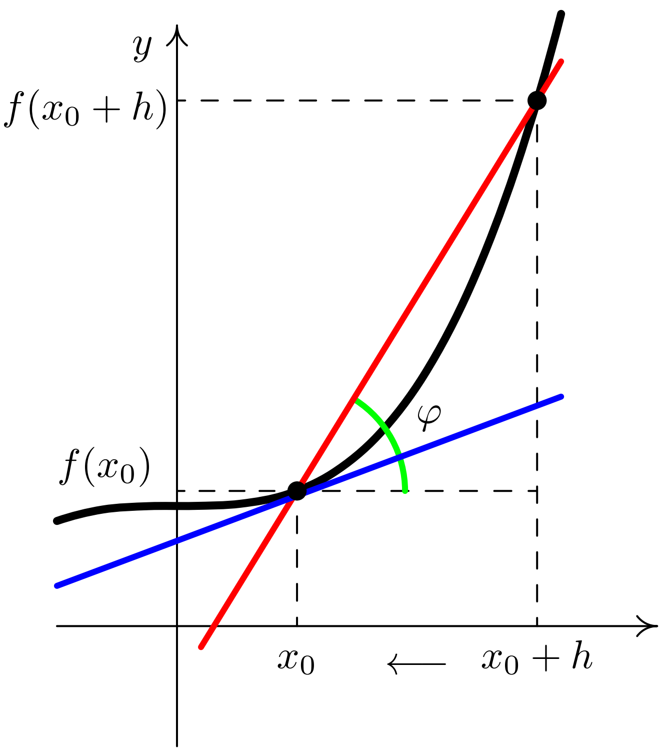
Derivace a její geometrický význam

- Přímka, která má směrnici k a prochází bodem (x_0, y_0), má rovnici
$$y = y_0 + k(x - x_0).$$
Přitom směrnice k je určena vztahem $k = \mathrm{tg}\varphi$, kde φ je úhel, který tato přímka svírá s kladným směrem osy x.

- Tečna ke grafu funkce f v bodě $(x_0, f(x_0))$ má tedy rovnici
$$y = f(x_0) + k_t(x - x_0),$$
kde k_t je směrnice této tečny.
Jak tuto směrnici určíme?



Společně s tečnou v bodě $(x_0, f(x_0))$ uvažujme sečnu procházející body $(x_0, f(x_0))$ a $(x_0 + h, f(x_0 + h))$, $h \in \mathbb{R}$.

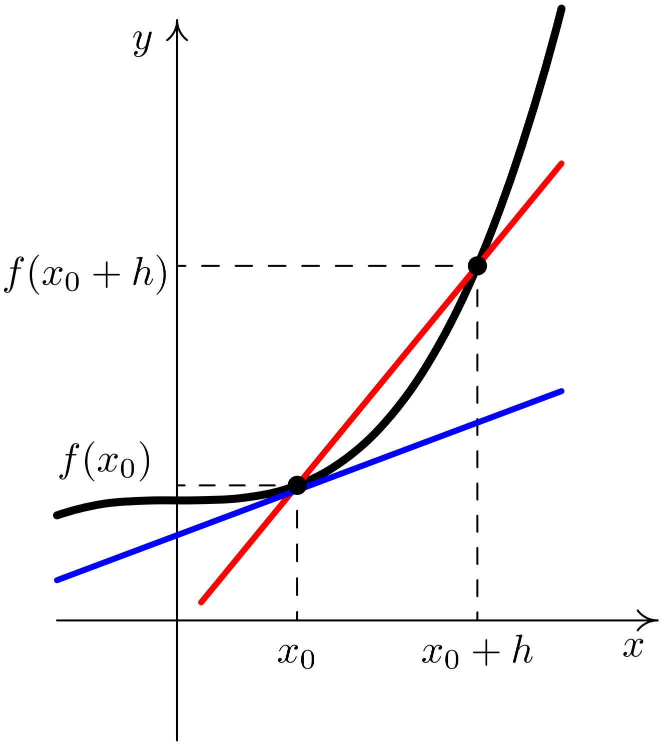


- Směrnice uvažované sečny je
$$k_s = \mathrm{tg}\varphi = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

- Pokud se bod $x_0 + h$ bude blížit bodu x_0, tj. h se bude blížit k nule, pak tato sečna přejde postupně v tečnu v bodě $(x_0, f(x_0))$.

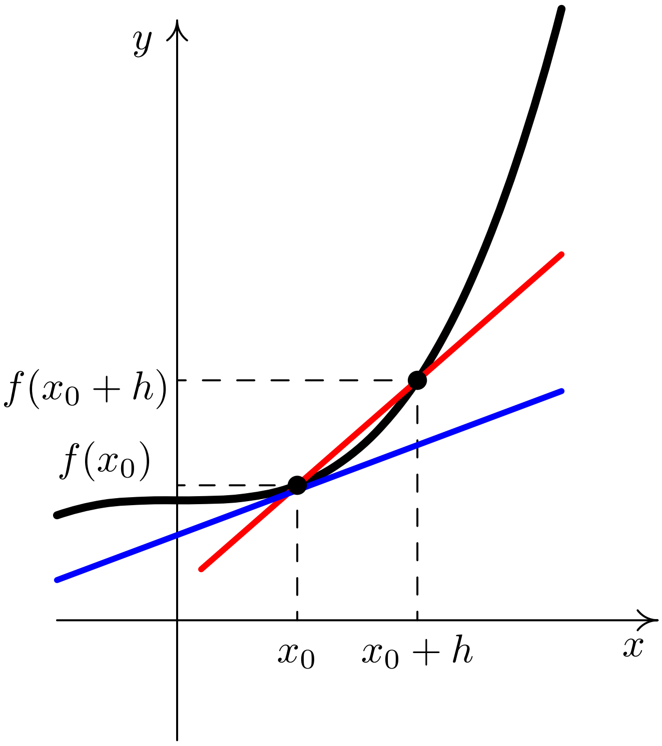
- Směrnici tečny v bodě $(x_0, f(x_0))$ můžeme tedy vyjádřit
$$k_t = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Společně s tečnou v bodě $(x_0, f(x_0))$ uvažujme sečnu procházející body $(x_0, f(x_0))$ a $(x_0 + h, f(x_0 + h))$, $h \in \mathbb{R}$.



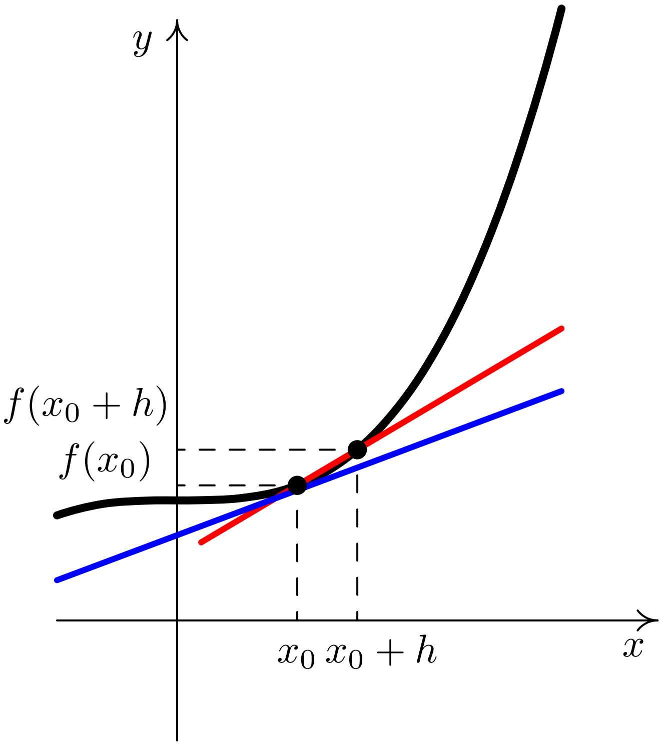
- Směrnice uvažované sečny je
$$k_s = \mathrm{tg}\varphi = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$
- Pokud se bod $x_0 + h$ bude blížit bodu x_0, tj. h se bude blížit k nule, pak tato sečna přejde postupně v tečnu v bodě $(x_0, f(x_0))$.
- Směrnici tečny v bodě $(x_0, f(x_0))$ můžeme tedy vyjádřit
$$k_t = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Společně s tečnou v bodě $(x_0, f(x_0))$ uvažujme sečnu procházející body $(x_0, f(x_0))$ a $(x_0 + h, f(x_0 + h))$, $h \in \mathbb{R}$.



- Směrnice uvažované sečny je
$$k_s = \mathrm{tg}\varphi = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$
- Pokud se bod $x_0 + h$ bude blížit bodu x_0, tj. h se bude blížit k nule, pak tato sečna přejde postupně v tečnu v bodě $(x_0, f(x_0))$.
- Směrnici tečny v bodě $(x_0, f(x_0))$ můžeme tedy vyjádřit
$$k_t = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Společně s tečnou v bodě $(x_0, f(x_0))$ uvažujme sečnu procházející body $(x_0, f(x_0))$ a $(x_0 + h, f(x_0 + h))$, $h \in \mathbb{R}$.



- Směrnice uvažované sečny je

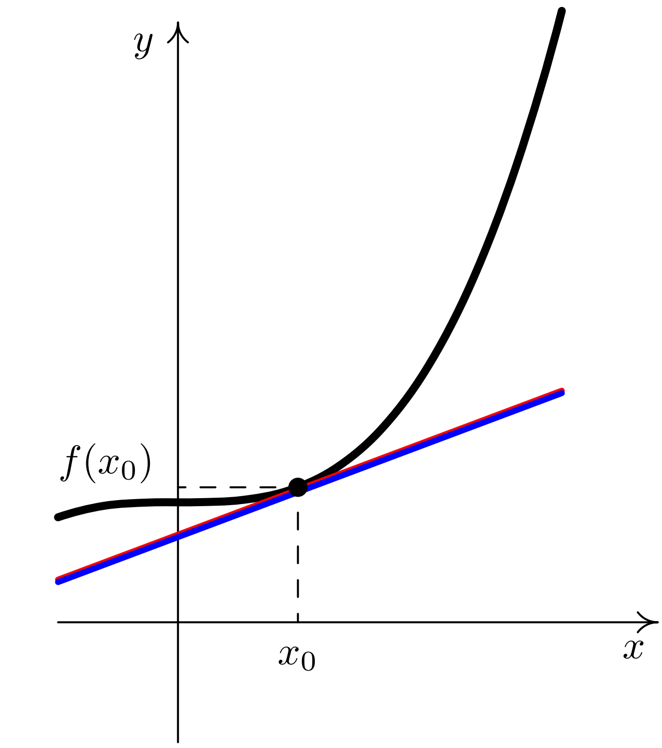
$$k_s = \mathrm{tg}\varphi = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

- Pokud se bod $x_0 + h$ bude blížit bodu x_0, tj. h se bude blížit k nule, pak tato sečna přejde postupně v tečnu v bodě $(x_0, f(x_0))$.

- Směrnici tečny v bodě $(x_0, f(x_0))$ můžeme tedy vyjádřit

$$k_t = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Společně s tečnou v bodě $(x_0, f(x_0))$ uvažujme sečnu procházející body $(x_0, f(x_0))$ a $(x_0 + h, f(x_0 + h))$, $h \in \mathbb{R}$.



- Směrnice uvažované sečny je

$$k_s = \mathrm{tg}\varphi = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

- Pokud se bod $x_0 + h$ bude blížit bodu x_0, tj. h se bude blížit k nule, pak tato sečna přejde postupně v tečnu v bodě $(x_0, f(x_0))$.

- Směrnici tečny v bodě $(x_0, f(x_0))$ můžeme tedy vyjádřit

$$k_t = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Definice (Derivace v bodě)

Nechť f je funkce a $x_0 \in D(f)$. Existuje-li limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

nazýváme ji **derivací funkce f v bodě** x_0 a značíme $f'(x_0)$.

- Pokud označíme $x = x_0 + h$, pak můžeme limitu v předchozí definici ekvivalentně vyjádřit jako

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

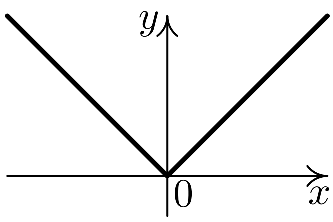
- Analogicky (pomocí jednostranných limit) definujeme derivaci zprava $f'_+(x_0)$ a derivaci zleva $f'_-(x_0)$.
- Má-li funkce v bodě x_0 derivaci, pak je definovaná v tomto bodě a v nějakém jeho okolí. Derivace funkce je definovaná pouze ve vlastních bodech, ale může být vlastní i nevlastní.
- Má-li funkce f v bodě x_0 vlastní derivaci, pak **tečna** ke grafu funkce v bodě $(x_0, f(x_0))$ je přímka o rovnici

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Věta

Má-li funkce f v bodě x_0 vlastní derivaci, pak je v tomto bodě spojitá.

Obrácení věty neplatí. Funkce spojitá v bodě x_0 nemusí mít v tomto bodě derivaci.
Například funkce $y = |x|$ je v bodě $x = 0$ spojitá, ale derivace zde neexistuje, neboť $f'_-(0) = -1$, ale $f'_+(x_0) = 1$.



Poznámka (Derivace jako funkce)

Má-li funkce f derivaci ve všech bodech množiny $M \subseteq \mathbb{R}$, pak můžeme na této množině definovat funkci, která každému bodu z M přiřadí derivaci v tomto bodě. Tato funkce se nazývá derivace funkce f a značí se f'.

Je-li funkce f tvaru $y = f(x)$, pak také píšeme y'. Další značení: $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

Pravidla a vzorce pro derivování

Derivace elementárních funkcí

$$c' = 0 \qquad (x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(e^x)' = e^x \qquad (\sin x)' = \cos x \qquad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \qquad (\cos x)' = -\sin x \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad (\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (\mathrm{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad (\mathrm{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \qquad (\mathrm{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Pravidla pro derivování

Nechť u, v jsou funkce a $c \in \mathbb{R}$. Pak

$$(cu)' = cu'$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \; v \neq 0.$$

Příklad

1. $y = \sin x(x^2 + 3x) \;\Rightarrow\; y' = \cos x(x^2 + 3x) + \sin x(2x + 3)$

2. $y = \dfrac{x^3}{x^2+1} \;\Rightarrow\; y' = \dfrac{3x^2(x^2+1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^4 + 3x^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$

Derivace složené funkce

Věta

Pro složenou funkci platí

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x),$$

kde existence derivace vlevo plyne z existence derivací vpravo.

Podobně

$$[f(g(h(x)))]' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Příklad

1. $y = \sin x^2 \;\Rightarrow\; y' = \cos x^2 \cdot 2x$
2. $y = \sin^2 x \;\Rightarrow\; y' = 2 \sin x \cdot \cos x$
3. $y = \ln \sin e^{2x} \;\Rightarrow\; y' = \dfrac{1}{\sin e^{2x}} \cdot \cos e^{2x} \cdot e^{2x} \cdot 2$

Derivace vyšších řádů

Definice

Druhou derivací funkce f rozumíme funkci $f'' = (f')'$, tj. derivaci první derivace. Obecnně n-tou derivací funkce f rozumíme funkci $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Derivace do 3. řádu značíme čárkami, derivace vyšších řádů značíme číslicí v závorce, tj. píšeme

$$f', f'', f''', f^{(4)}, \ldots, f^{(n)}, \quad \text{resp.} \quad y', y'', y''', y^{(4)}, \ldots, y^{(n)}.$$

Jiné značení:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \; \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}, \; \frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}, \; \ldots, \; \frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}.$$

L'Hospitalovo pravidlo

Věta (L'Hospitalovo pravidlo)

Nechť f *a* g *jsou funkce,* $x_0 \in \mathbb{R}^*$ *a nechť je splněna jedna z podmínek*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$$

nebo

$$|\lim_{x\to x_0} g(x)| = \infty.$$

Pak platí

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

pokud limita na pravé straně existuje.

- Obdobné tvrzení platí i pro jednostranné limity.
- L'Hospitalovo pravidlo je užitečné pro výpočet limit typu $\left\|\frac{0}{0}\right\|$ a $\left\|\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right\|$.
- L'Hospitalovo pravidlo lze použít opakovaně.

Příklad

1. $$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x} = \left\|\frac{0}{0}\right\| \overset{\text{L.P.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{\cos x} = 0.$$

2. $$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\| \overset{\text{L.P.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x} = \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\| \overset{\text{L.P.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \infty.$$

3. $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{cotg} x} = \left\|\frac{-\infty}{\infty}\right\| \overset{\text{L.P.}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin^2 x}{x} = \left\|\frac{0}{0}\right\|$$

   $$\overset{\text{L.P.}}{=} \lim_{x\to 0^+} -2\sin x \cos x = 0.$$

Využití systémů počítačové algebry

Ukázka využití systémů Mathematical Assistant on Web, Sage, Maxima, Wolfram Alpha:

`http://user.mendelu.cz/marik/akademie/diferencialni-pocet.html`