

Derivace funkce

Základy vyšší matematiky

LDF MENDELU



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Podpořeno projektem Průřezová inovace studijních programů Lesnické a dřevařské fakulty MENDELU v Brně (LDF) s ohledem na disciplíny společného základu <http://akademie.ldf.mendelu.cz/cz> (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0021) za přispění finančních prostředků EU a státního rozpočtu České republiky.

Derivace a její geometrický význam

- Přímka, která má směrnici k a prochází bodem (x_0, y_0) , má rovnici

$$y = y_0 + k(x - x_0).$$

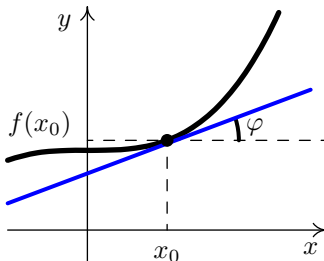
Přitom směrnice k je určena vztahem $k = \operatorname{tg} \varphi$, kde φ je úhel, který tato přímka svírá s kladným směrem osy x .

- Tečna ke grafu funkce f v bodě $(x_0, f(x_0))$ má tedy rovnici

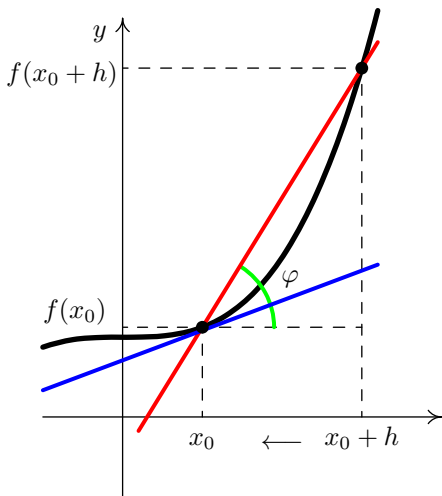
$$y = f(x_0) + k_t(x - x_0),$$

kde k_t je směrnice této tečny.

Jak tuto směrnici určíme?



Společně s tečnou v bodě $(x_0, f(x_0))$ uvažujme sečnu procházející body $(x_0, f(x_0))$ a $(x_0 + h, f(x_0 + h))$, $h \in \mathbb{R}$.



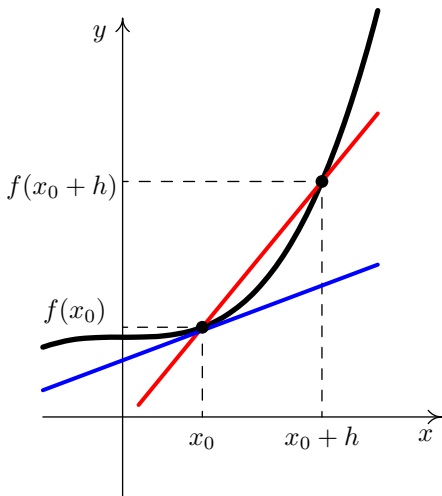
- Směrnice uvažované sečny je

$$k_s = \operatorname{tg} \varphi = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

- Pokud se bod $x_0 + h$ bude blížit bodu x_0 , tj. h se bude blížit k nule, pak tato sečna přejde postupně v tečnu v bodě $(x_0, f(x_0))$.
- Směrnici tečny v bodě $(x_0, f(x_0))$ můžeme tedy vyjádřit

$$k_t = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Společně s tečnou v bodě $(x_0, f(x_0))$ uvažujme sečnu procházející body $(x_0, f(x_0))$ a $(x_0 + h, f(x_0 + h))$, $h \in \mathbb{R}$.



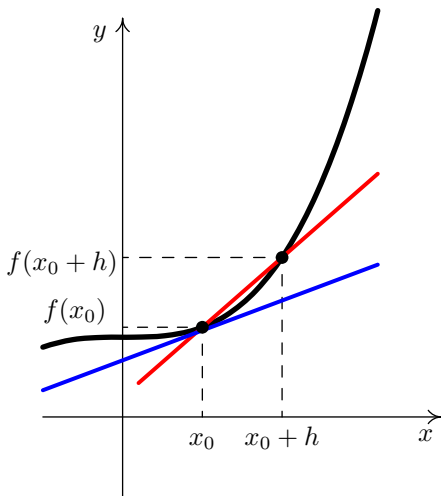
- Směrnice uvažované sečny je

$$k_s = \operatorname{tg} \varphi = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

- Pokud se bod $x_0 + h$ bude blížit bodu x_0 , tj. h se bude blížit k nule, pak tato sečna přejde postupně v tečnu v bodě $(x_0, f(x_0))$.
- Směrnici tečny v bodě $(x_0, f(x_0))$ můžeme tedy vyjádřit

$$k_t = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Společně s tečnou v bodě $(x_0, f(x_0))$ uvažujme sečnu procházející body $(x_0, f(x_0))$ a $(x_0 + h, f(x_0 + h))$, $h \in \mathbb{R}$.



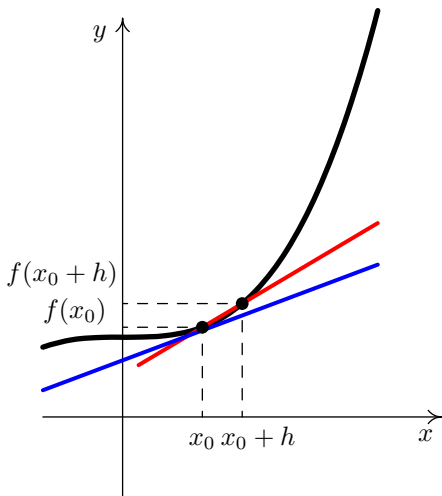
- Směrnice uvažované sečny je

$$k_s = \operatorname{tg} \varphi = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

- Pokud se bod $x_0 + h$ bude blížit bodu x_0 , tj. h se bude blížit k nule, pak tato sečna přejde postupně v tečnu v bodě $(x_0, f(x_0))$.
- Směrnici tečny v bodě $(x_0, f(x_0))$ můžeme tedy vyjádřit

$$k_t = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Společně s tečnou v bodě $(x_0, f(x_0))$ uvažujme sečnu procházející body $(x_0, f(x_0))$ a $(x_0 + h, f(x_0 + h))$, $h \in \mathbb{R}$.



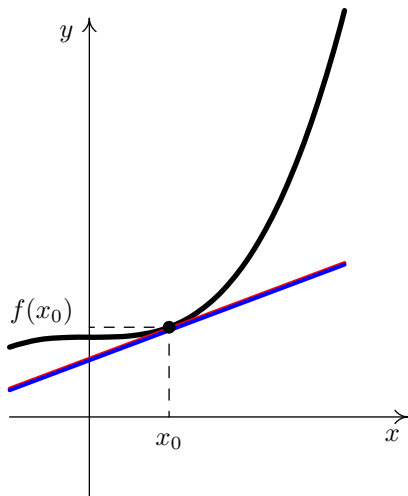
- Směrnice uvažované sečny je

$$k_s = \operatorname{tg}\varphi = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

- Pokud se bod $x_0 + h$ bude blížit bodu x_0 , tj. h se bude blížit k nule, pak tato sečna přejde postupně v tečnu v bodě $(x_0, f(x_0))$.
- Směrnici tečny v bodě $(x_0, f(x_0))$ můžeme tedy vyjádřit

$$k_t = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Společně s tečnou v bodě $(x_0, f(x_0))$ uvažujme sečnu procházející body $(x_0, f(x_0))$ a $(x_0 + h, f(x_0 + h))$, $h \in \mathbb{R}$.



- Směrnice uvažované sečny je

$$k_s = \operatorname{tg}\varphi = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

- Pokud se bod $x_0 + h$ bude blížit bodu x_0 , tj. h se bude blížit k nule, pak tato sečna přejde postupně v tečnu v bodě $(x_0, f(x_0))$.
- Směrnici tečny v bodě $(x_0, f(x_0))$ můžeme tedy vyjádřit

$$k_t = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Definice (Derivace v bodě)

Nechť f je funkce a $x_0 \in D(f)$. Existuje-li limita

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

nazýváme ji **derivací funkce f v bodě x_0** a značíme $f'(x_0)$.

- Pokud označíme $x = x_0 + h$, pak můžeme limitu v předchozí definici ekvivalentně vyjádřit jako

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

- Analogicky (pomocí jednostranných limit) definujeme derivaci zprava $f'_+(x_0)$ a derivaci zleva $f'_-(x_0)$.
- Má-li funkce v bodě x_0 derivaci, pak je definovaná v tomto bodě a v nějakém jeho okolí. Derivace funkce je definovaná pouze ve vlastních bodech, ale může být vlastní i nevlastní.
- Má-li funkce f v bodě x_0 vlastní derivaci, pak **tečna** ke grafu funkce v bodě $(x_0, f(x_0))$ je přímka o rovnici

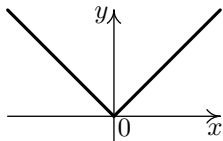
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Věta

Má-li funkce f v bodě x_0 vlastní derivaci, pak je v tomto bodě spojitá.

Obrácení věty neplatí. Funkce spojitá v bodě x_0 nemusí mít v tomto bodě derivaci.

Například funkce $y = |x|$ je v bodě $x = 0$ spojitá, ale derivace zde neexistuje, neboť $f'_-(0) = -1$, ale $f'_+(0) = 1$.



Poznámka (Derivace jako funkce)

Má-li funkce f derivaci ve všech bodech množiny $M \subseteq \mathbb{R}$, pak můžeme na této množině definovat funkci, která každému bodu z M přiřadí derivaci v tomto bodě. Tato funkce se nazývá derivace funkce f a značí se f' .

Je-li funkce f tvaru $y = f(x)$, pak také píšeme y' . Další značení: $\frac{df}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$.

Derivace elementárních funkcí

$$c' = 0$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Pravidla pro derivování

Nechť u, v jsou funkce a $c \in \mathbb{R}$. Pak

$$(cu)' = cu'$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, v \neq 0.$$

Pravidla pro derivování

Nechť u, v jsou funkce a $c \in \mathbb{R}$. Pak

$$(cu)' = cu'$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, v \neq 0.$$

Příklad

① $y = \sin x(x^2 + 3x)$

Pravidla pro derivování

Nechť u, v jsou funkce a $c \in \mathbb{R}$. Pak

$$(cu)' = cu'$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, v \neq 0.$$

Příklad

$$\textcircled{1} \quad y = \sin x(x^2 + 3x) \Rightarrow y' = \cos x(x^2 + 3x) + \sin x(2x + 3)$$

Pravidla pro derivování

Nechť u, v jsou funkce a $c \in \mathbb{R}$. Pak

$$(cu)' = cu'$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, v \neq 0.$$

Příklad

$$\textcircled{1} \quad y = \sin x(x^2 + 3x) \Rightarrow y' = \cos x(x^2 + 3x) + \sin x(2x + 3)$$

$$\textcircled{2} \quad y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$$

Pravidla pro derivování

Nechť u, v jsou funkce a $c \in \mathbb{R}$. Pak

$$(cu)' = cu'$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, v \neq 0.$$

Příklad

$$\textcircled{1} \quad y = \sin x(x^2 + 3x) \Rightarrow y' = \cos x(x^2 + 3x) + \sin x(2x + 3)$$

$$\textcircled{2} \quad y = \frac{x^3}{x^2 + 1} \Rightarrow y' = \frac{3x^2(x^2 + 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

Pravidla pro derivování

Nechť u, v jsou funkce a $c \in \mathbb{R}$. Pak

$$(cu)' = cu'$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, v \neq 0.$$

Příklad

$$\textcircled{1} \quad y = \sin x(x^2 + 3x) \Rightarrow y' = \cos x(x^2 + 3x) + \sin x(2x + 3)$$

$$\textcircled{2} \quad y = \frac{x^3}{x^2 + 1} \Rightarrow y' = \frac{3x^2(x^2 + 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

Pravidla pro derivování

Nechť u, v jsou funkce a $c \in \mathbb{R}$. Pak

$$(cu)' = cu'$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, v \neq 0.$$

Příklad

$$\textcircled{1} \quad y = \sin x(x^2 + 3x) \Rightarrow y' = \cos x(x^2 + 3x) + \sin x(2x + 3)$$

$$\textcircled{2} \quad y = \frac{x^3}{x^2 + 1} \Rightarrow y' = \frac{3x^2(x^2 + 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2(x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^2}$$

Věta

Pro složenou funkci platí

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x),$$

kde existence derivace vlevo plyne z existence derivací vpravo.

Podobně

$$[f(g(h(x)))]' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Derivace složené funkce

Věta

Pro složenou funkci platí

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x),$$

kde existence derivace vlevo plyne z existence derivací vpravo.

Podobně

$$[f(g(h(x)))]' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Příklad

① $y = \sin x^2$

Derivace složené funkce

Věta

Pro složenou funkci platí

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x),$$

kde existence derivace vlevo plyne z existence derivací vpravo.

Podobně

$$[f(g(h(x)))]' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Příklad

$$\textcircled{1} \quad y = \sin x^2 \Rightarrow y' = \cos x^2$$

Derivace složené funkce

Věta

Pro složenou funkci platí

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x),$$

kde existence derivace vlevo plyne z existence derivací vpravo.

Podobně

$$[f(g(h(x)))]' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Příklad

$$\textcircled{1} \quad y = \sin x^2 \Rightarrow y' = \cos x^2 \cdot 2x$$

Derivace složené funkce

Věta

Pro složenou funkci platí

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x),$$

kde existence derivace vlevo plyne z existence derivací vpravo.

Podobně

$$[f(g(h(x)))]' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Příklad

① $y = \sin x^2 \Rightarrow y' = \cos x^2 \cdot 2x$

② $y = \sin^2 x$

Derivace složené funkce

Věta

Pro složenou funkci platí

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x),$$

kde existence derivace vlevo plyne z existence derivací vpravo.

Podobně

$$[f(g(h(x)))]' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Příklad

① $y = \sin x^2 \Rightarrow y' = \cos x^2 \cdot 2x$

② $y = \sin^2 x \Rightarrow y' = 2 \sin x$

Derivace složené funkce

Věta

Pro složenou funkci platí

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x),$$

kde existence derivace vlevo plyne z existence derivací vpravo.

Podobně

$$[f(g(h(x)))]' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Příklad

① $y = \sin x^2 \Rightarrow y' = \cos x^2 \cdot 2x$

② $y = \sin^2 x \Rightarrow y' = 2 \sin x \cdot \cos x$

Derivace složené funkce

Věta

Pro složenou funkci platí

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x),$$

kde existence derivace vlevo plyne z existence derivací vpravo.

Podobně

$$[f(g(h(x)))]' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Příklad

① $y = \sin x^2 \Rightarrow y' = \cos x^2 \cdot 2x$

② $y = \sin^2 x \Rightarrow y' = 2 \sin x \cdot \cos x$

③ $y = \ln \sin e^{2x}$

Derivace složené funkce

Věta

Pro složenou funkci platí

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x),$$

kde existence derivace vlevo plyne z existence derivací vpravo.

Podobně

$$[f(g(h(x)))]' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Příklad

$$\textcircled{1} \quad y = \sin x^2 \Rightarrow y' = \cos x^2 \cdot 2x$$

$$\textcircled{2} \quad y = \sin^2 x \Rightarrow y' = 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$\textcircled{3} \quad y = \ln \sin e^{2x} \Rightarrow y' = \frac{1}{\sin e^{2x}}$$

Derivace složené funkce

Věta

Pro složenou funkci platí

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x),$$

kde existence derivace vlevo plyne z existence derivací vpravo.

Podobně

$$[f(g(h(x)))]' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Příklad

$$\textcircled{1} \quad y = \sin x^2 \Rightarrow y' = \cos x^2 \cdot 2x$$

$$\textcircled{2} \quad y = \sin^2 x \Rightarrow y' = 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$\textcircled{3} \quad y = \ln \sin e^{2x} \Rightarrow y' = \frac{1}{\sin e^{2x}} \cdot \cos e^{2x}$$

Derivace složené funkce

Věta

Pro složenou funkci platí

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x),$$

kde existence derivace vlevo plyne z existence derivací vpravo.

Podobně

$$[f(g(h(x)))]' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Příklad

$$\textcircled{1} \quad y = \sin x^2 \Rightarrow y' = \cos x^2 \cdot 2x$$

$$\textcircled{2} \quad y = \sin^2 x \Rightarrow y' = 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$\textcircled{3} \quad y = \ln \sin e^{2x} \Rightarrow y' = \frac{1}{\sin e^{2x}} \cdot \cos e^{2x} \cdot e^{2x}$$

Derivace složené funkce

Věta

Pro složenou funkci platí

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x),$$

kde existence derivace vlevo plyne z existence derivací vpravo.

Podobně

$$[f(g(h(x)))]' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Příklad

$$\textcircled{1} \quad y = \sin x^2 \Rightarrow y' = \cos x^2 \cdot 2x$$

$$\textcircled{2} \quad y = \sin^2 x \Rightarrow y' = 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$\textcircled{3} \quad y = \ln \sin e^{2x} \Rightarrow y' = \frac{1}{\sin e^{2x}} \cdot \cos e^{2x} \cdot e^{2x} \cdot 2$$

Derivace vyšších řádů

Definice

Druhou derivací funkce f rozumíme funkci $f'' = (f')'$, tj. derivaci první derivace. Obecně n -tou derivací funkce f rozumíme funkci $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Derivace do 3. řádu značíme čárkami, derivace vyšších řádů značíme číslicí v závorce, tj. píšeme

$$f', f'', f''', f^{(4)}, \dots, f^{(n)}, \quad \text{resp.} \quad y', y'', y''', y^{(4)}, \dots, y^{(n)}.$$

Jiné značení:

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}.$$

L'Hospitalovo pravidlo

Věta (L'Hospitalovo pravidlo)

Nechť f a g jsou funkce, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a necht' je splněna jedna z podmínek

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

nebo

$$|\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)| = \infty.$$

Pak platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

pokud limita na pravé straně existuje.

- Obdobné tvrzení platí i pro jednostranné limity.
- L'Hospitalovo pravidlo je užitečné pro výpočet limit typu $\left\| \frac{0}{0} \right\|$ a $\left\| \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \right\|$.
- L'Hospitalovo pravidlo lze použít opakovaně.

Příklad

$$① \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x}$$

Příklad

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x} = \left\| \frac{0}{0} \right\|$$

Příklad

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| \stackrel{\text{L.P.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\cos x}$$

Příklad

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| \stackrel{\text{L.P.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\cos x} = 0.$$

Příklad

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| \stackrel{\text{L.P.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\cos x} = 0.$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2}$$

Příklad

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| \stackrel{\text{L.P.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\cos x} = 0.$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\|$$

Příklad

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| \stackrel{\text{L.P.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\cos x} = 0.$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| \stackrel{\text{L.P.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x}$$

Příklad

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| \stackrel{\text{L.P.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\cos x} = 0.$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| \stackrel{\text{L.P.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\|$$

Příklad

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| \stackrel{\text{L.P.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\cos x} = 0.$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| \stackrel{\text{L.P.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| \stackrel{\text{L.P.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2}$$

Příklad

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| \stackrel{\text{L.P.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\cos x} = 0.$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| \stackrel{\text{L.P.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| \stackrel{\text{L.P.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2} = \infty.$$

Příklad

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| \stackrel{\text{L.P.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\cos x} = 0.$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| \stackrel{\text{L.P.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| \stackrel{\text{L.P.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2} = \infty.$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\cot g x}$$

Příklad

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| \stackrel{\text{L.P.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\cos x} = 0.$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| \stackrel{\text{L.P.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| \stackrel{\text{L.P.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2} = \infty.$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\cot g x} = \left\| \frac{-\infty}{\infty} \right\|$$

Příklad

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| \stackrel{\text{L.P.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\cos x} = 0.$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| \stackrel{\text{L.P.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| \stackrel{\text{L.P.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2} = \infty.$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\cotg x} = \left\| \frac{-\infty}{\infty} \right\| \stackrel{\text{L.P.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}$$

Příklad

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| \stackrel{\text{L.P.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\cos x} = 0.$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| \stackrel{\text{L.P.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| \stackrel{\text{L.P.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2} = \infty.$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\cotg x} = \left\| \frac{-\infty}{\infty} \right\| \stackrel{\text{L.P.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin^2 x}{x}$$

Příklad

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| \stackrel{\text{L.P.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\cos x} = 0.$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| \stackrel{\text{L.P.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| \stackrel{\text{L.P.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2} = \infty.$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\cotg x} = \left\| \frac{-\infty}{\infty} \right\| \stackrel{\text{L.P.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin^2 x}{x} = \left\| \frac{0}{0} \right\|$$

Příklad

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| \stackrel{\text{L.P.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\cos x} = 0.$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| \stackrel{\text{L.P.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| \stackrel{\text{L.P.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2} = \infty.$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\cotg x} = \left\| \frac{-\infty}{\infty} \right\| \stackrel{\text{L.P.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin^2 x}{x} = \left\| \frac{0}{0} \right\|$$

$$\stackrel{\text{L.P.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} -2 \sin x \cos x$$

Příklad

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| \stackrel{\text{L.P.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\cos x} = 0.$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| \stackrel{\text{L.P.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| \stackrel{\text{L.P.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2} = \infty.$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\cotg x} = \left\| \frac{-\infty}{\infty} \right\| \stackrel{\text{L.P.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin^2 x}{x} = \left\| \frac{0}{0} \right\|$$

$$\stackrel{\text{L.P.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} -2 \sin x \cos x = 0.$$

Využití systémů počítačové algebry

Ukázka využití systémů Mathematical Assistant on Web, Sage, Maxima, Wolfram Alpha:

<http://user.mendelu.cz/marik/akademie/diferencialni-pocet.html>