INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Poznámky z matematiky

Verze: 26. října 2014

Petr Hasil
hasil@mendelu.cz
http://user.mendelu.cz/hasil/

Ústav matematiky
Lesnická a dřevařská fakulta
Mendelova univerzita v Brně

Vytvořeno s podporou projektu Průřezová inovace studijních programů Lesnické a dřevařské fakulty MENDELU v Brně (LDF) s ohledem na disciplíny společného základu ⟨http://akademie.ldf.mendelu.cz/cz⟩ (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0021) za přispění finančních prostředků EU a státního rozpočtu České republiky.

Tento text je primárně určen pro posluchače kurzu Matematika MT (a MT-K) na Agronomické fakultě Mendelovy univerzity v Brně, nicméně je použitelný jako doplňující text pro každý kurz základů matematiky. Jsou zde zahrnuty základy lineární algebry, diferenciálního počtu a integrálního počtu včetně řešených příkladů i příkladů k procvičení.

Cílem tohoto kurzu je především to, aby posluchači získali povědomí o základních nástrojích v matematice, byli schopni dále prohlubovat své znalosti ve směru daném jejich specializací a tyto bezchybně používat, neboť ke správné volbě metody, rozplánování experimentu, nebo například vyhodnocení výstupu je nutná nejen povrchní znalost typu 'vstup/výstup', ale také logika a důkladné porozumění vnitřním principům metod.

Na konci každé kapitoly je uvedena ukázka zadání příkladů typických pro danou kapitolu ve formě vhodné pro Wolfram|Alpha, což je odpovídací stroj volně dostupný na adrese

`http://www.wolframalpha.com/`

Výhodou Wolfram|Alpha oproti programům určeným k řešení matematických úloh je jeho dostupnost v síti bez instalace a také jeho univerzálnost. Otázka nemusí být zadaná přesně daným způsobem a často dokonce ani úplně jednoznačně — stroj najde nejpravděpodobnější interpretaci otázky a zobrazí výsledek, případně sám upozorní na možné jiné interpretace. Toto nefunguje jen pro matematické výpočty, ale pro otázky všeho druhu. Je tedy možné zeptat se nejen na výsledek početního příkladu, ale také na definici neznámého pojmu, nebo třeba na počasí v Amsterdamu. Při používání doporučuji vždy kontrolovat, jaká interpretace otázky byla použita. Například zadáním 'weather Amsterdam' získáte předpověď počasí pro Amsterdam v Nizozemí a ostatní Amsterdamy jsou zobrazeny jako další možné interpretace. Také proto je vhodné si Wolfram|Alpha před řešením matematických úloh uvedených v textu vyzkoušet zadáváním jiných dotazů (od 'How are you?' po '5%=123, 72%=?') a sledováním odpovědí. V odpovědích je většinou obsaženo mnohem více informací, než bylo požadováno. Např. v odpovědi na otázka ohledně vlastních čísel matice (viz str. 38) jsou obsaženy i příslušné vlastní vektory. Doporučuji vyzkoušet Wolfram|Alpha na řešení všech příkladů uvedených v textu. Tím získáte představu jak vypadá odpověď např. když řešení neexistuje, nebo při nevhodné formě zadání. Za povšimnutí stojí také možnosti typu 'More digits', nebo 'Show steps', které jsou u některých odpovědí k dispozici. Zvláště zobrazení kroků při řešení příkladů může být velmi užitečné (zde ale pozor — způsob výpočtu, který si vybere stroj, je většinou ten, který lze nejsnadněji algoritmizovat, což nemusí být nejlepší způsob jak příklad počítat ručně).

Na závěr si uveďme několik ukázek jak zadávat početní operace:

- Početní operace.

```
12 + 5 * 3 - 2^3
2 * (1 - 3 / (5 + 1))
```

- Další početní operace (hvězdička jako násobení může být vynechána, nedojde-li k nedorozumění).

```
5*8^(1/3)
5 (8)^(1/3)
```

- Procenta.

```
20% = 120, 50% = ?
```

- Poměr.

```
52:32
```

Obsah

Strana

1 Úvod **1**

§ 1.1 Symboly 1

§ 1.2 Číselné obory 3

2 Vektory **5**

§ 2.1 Vektorový prostor 5

§ 2.2 Příklady k procvičení 10

§ 2.3 Wolfram|Alpha 10

3 Matice **11**

§ 3.1 Definice a operace 11

§ 3.2 Gaussova eliminační metoda 14

§ 3.3 Aplikace – Leslieho model růstu 18

§ 3.4 Příklady k procvičení 19

§ 3.5 Wolfram|Alpha 21

4 Soustavy lineárních rovnic I **23**

§ 4.1 Definice a pojmy 23

§ 4.2 Řešení soustav lineárních rovnic 25

§ 4.3 Příklady k procvičení 26

§ 4.4 Wolfram|Alpha 27

5 Determinanty **29**

§ 5.1 Definice a determinanty do řádu 3 29

§ 5.2 Determinanty vyšších řádů 30

§ 5.3 Úpravy determinantů 32

§ 5.4 Příklady k procvičení 33

§ 5.5 Wolfram|Alpha 33

6 Soustavy lineárních rovnic II **35**

§ 6.1 Cramerovo pravidlo 35

§ 6.2 Aplikace – Leslieho model růstu II 36

§ 6.3 Příklady k procvičení 37

§ 6.4 Wolfram|Alpha 38

7 Úvod k funkcím **39**

§ 7.1 Definice a pojmy 39

8 Polynomy **45**

§ 8.1 Definice a operace s polynomy 45

§ 8.2 Kořeny polynomu 46

§ 8.3 Hornerovo schéma 47

§ 8.4 Racionální lomená funkce 49

§ 8.5 Příklady k procvičení 51

§ 8.6 Wolfram|Alpha 52

9 Funkce **55**

§ 9.1 Elementárních funkce 55

§ 9.2 Operace s funkcemi 63

§ 9.3 Inverzní funkce 64

§ 9.4 Transformace grafu funkce 67

§ 9.5 Příklady k procvičení 68

§ 9.6 Wolfram|Alpha 70

10 Limita funkce **71**

§ 10.1 Okolí bodu 71

§ 10.2 Limita funkce 72

§ 10.3 Spojitost funkce 77

§ 10.4 Výpočet limit 80

§ 10.5 Příklady k procvičení 81

§ 10.6 Wolfram|Alpha 82

11 Derivace **83**

§ 11.1 Definice a geometrický význam derivace 83

§ 11.2 Pravidla a vzorce 85

§ 11.3 Fyzikální význam 86

§ 11.4 Příklady k procvičení 88

§ 11.5 Wolfram|Alpha 89

12 Použití derivací **91**

§ 12.1 L'Hospitalovo pravidlo 91

§ 12.2 Tečna a normála ke grafu funkce 92

§ 12.3 Příklady k procvičení 92

§ 12.4 Wolfram|Alpha 93

13 Průběh funkce **95**

§ 13.1 Monotonie a lokální extrémy 95

§ 13.2 Konvexnost, konkávnost a inflexní body 98

§ 13.3 Asymptoty 100

§ 13.4 Průběh funkce – shrnutí 101

§ 13.5 Příklady k procvičení 105

§ 13.6 Wolfram|Alpha 106

14 Neurčitý integrál 107

§ 14.1 Definice a vlastnosti 107
§ 14.2 Metoda per partes 109
§ 14.3 Substituční metoda 110
§ 14.4 Racionální lomená funkce 112
§ 14.5 Značení 114
§ 14.6 Goniometrické funkce 114
§ 14.7 Iracionální funkce 115
§ 14.8 Příklady k procvičení 116
§ 14.9 Wolfram|Alpha 118

15 Určitý (Riemannův) integrál 119

§ 15.1 Definice a vlastnosti 119
§ 15.2 Výpočet 122
§ 15.3 Geometrické aplikace 125
§ 15.4 Příklady k procvičení 129
§ 15.5 Wolfram|Alpha 130

16 Aproximace 131

§ 16.1 Algebraická rovnice 131
§ 16.2 Metoda bisekce (půlení) 132
§ 16.3 Taylorův polynom 134
§ 16.4 Lineární interpolace – Lagrangeův interpolační polynom 136
§ 16.5 Lineární regrese – Metoda nejmenších čtverců 137
§ 16.6 Příklady k procvičení 140
§ 16.7 Wolfram|Alpha 141

A Řešení 143

B Vzorce **163**

§ B.1 Základní vzorce 163

§ B.2 Derivace 164

§ B.3 Integrály 165

Kapitola

1 Úvod

§ 1.1 Symboly

$A \wedge B$	A a současně B (současná platnost, konjunkce)
$A \vee B$	A nebo B (disjunkce)
$A \Rightarrow B$	A z toho plyne B; platí-li A, potom platí B (implikace)
$A \Leftrightarrow B$	A právě tehdy když B; (ekvivalence, $A \Leftrightarrow B = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$)
$\forall$	pro všechna (obecný kvantifikátor)
$\exists$	existuje (existenční kvantifikátor)
$\exists!$	existuje právě jeden
$\nexists$	neexistuje
$\in$	je prvkem
$\notin$	není prvkem
$A = \{a, b, c\}$	množina A s prvky a, b, c
$\emptyset$	prázdná množina
$\{x \in M : V(x)\}$	množina takových x z množiny M, které splňují vlastnost $V(x)$
$[x_1, x_2, \dots, x_n]$	uspořádaná n-tice
$A \times B$	kartézský součin množin A a B; $A \times B = \{[a, b] : a \in A, b \in B\}$
A^n	n-tá kartézská mocnina množiny A; $A^n = A \times A \times \cdots \times A$
$A \subseteq B$	množina A je podmnožinou množiny B; množina A je obsažena v množině B (je povolena rovnost)
$A \subset B$	množina A je vlastní podmnožinou množiny B (není povolena rovnost)
$A \cap B$	průnik množin A, B ($x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$)
$A \cup B$	sjednocení množin A, B ($x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$)
$f : A \to B$	zobrazení f z množiny A do množiny B
$y = f(x)$	hodnota zobrazení (funkce) f v bodě x; funkce f nezávisle proměnné x (zde y je závisle proměnná)
$(f \circ g)(x), f(g(x))$	složené zobrazení (funkce) f po g
$a = b$	a je rovno b
$a \neq b$	a není rovno b; a je různé od b
$a \approx b$	a je přibližně rovno b
$a \doteq b$	a je po zaokrouhlení rovno b
$a < b$	a je menší než b
$a > b$	a je větší než b
$a \leq b$	a je menší nebo rovno b
$a \geq b$	a je větší nebo rovno b
(a, b)	otevřený interval od a do b; $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

$[a,b]$	uzavřený interval od a do b; $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
$(a,b]$	zleva otevřený a zprava uzavřený interval od a do b; $\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ (též polootevřený)
$[a,b)$	zleva uzavřený a zprava otevřený interval od a do b; $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ (též polouzavřený)
$n!$	n faktoriál $(0! = 1, 1! = 1, 2! = 2 \cdot 1, 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1, \ldots)$
$\|a\|$	absolutní hodnota čísla a; velikost čísla a (vzdálenost od počátku)
max	maximum
min	minimum
$\sum\limits_{i=a}^{b} x_i$	součet $x_a + x_{a+1} + \cdots + x_{b-1} + x_b$
$\prod\limits_{i=a}^{b} x_i$	součin $x_a \cdot x_{a+1} \cdot \cdots \cdot x_{b-1} \cdot x_b$
∞	nekonečno
e	Eulerovo číslo $(\mathrm{e} = 2{,}718\,281\,828\ldots)$; základ přirozeného logaritmu
π	Ludolfovo číslo $(\pi = 3{,}141\,592\,654\ldots)$; poměr obvodu kruhu k jeho průměru
i	imaginární jednotka ($i = \sqrt{-1}$, tj. $i^2 = -1$)
$z = a + bi$	komplexní číslo z, kde $\operatorname{Re} z = a, \operatorname{Im} z = b$
$\operatorname{Re} z$	reálná část komplexního čísla z
$\operatorname{Im} z$	imaginární část komplexního čísla z
$\bar{z}$	komplexně sdružené číslo ke komplexnímu číslu z; $(z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi)$
$\vec{v}$	vektor
$\vec{0}$	nulový vektor
$-\vec{v}$	opačný vektor k vektoru $\vec{v}$
$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \vec{u} \cdot \vec{v}$	skalární součin vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$
$\mathrm{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$	množina matic o m řádcích a n sloupcích s reálnými prvky
$a_{i,j}, a_{ij}$	prvek matice A z řádku i a sloupce j
$\mathcal{O}$	nulová matice
$\mathcal{O}_{m \times n}$	nulová matice o m řádcích a n sloupcích
I	jednotková matice
I_n	jednotková matice o n řádcích a n sloupcích
A^{-1}	inverzní matice k matici A
A^T	transponovaná matice k matici A
$\mathrm{h}(A)$	hodnost matice A
$\|A\|, \det A$	determinant matice A
$A \sim B$	matice A ekvivalentní s matici B
$\operatorname{sgn} x$	signum (znaménko) čísla x
$x \to a$	x se blíží k a
$x \to a^+$	x se blíží k a zprava
$x \to a^-$	x se blíží k a zleva
$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	limita funkce f pro x blížící se k a
$\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$	limita funkce f pro x blížící se k a zprava (jednostranná limita)

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$	limita funkce f pro x blížící se k a zleva (jednostranná limita)
$\mathrm{D}(f)$	definiční obor funkce f
$\mathrm{H}(f)$	obor hodnot funkce f
$f(a)$	hodnota funkce f v bodě $x = a$
$f(x)\vert_{x=a}$	dosazení čísla a za nezávisle proměnnou x do funkce f; $f(a)$
$f'(x)$, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, y'	derivace funkce f podle nezávisle proměnné x
$f''(x)$, $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$, y''	druhá derivace funkce f podle nezávisle proměnné x
$f^{(n)}(x)$, $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$, $y^{(n)}$	n-tá derivace funkce f podle nezávisle proměnné x
$\mathrm{d}f$	diferenciál funkce f
$\mathrm{d}x$	diferenciál argumentu x (nezávisle proměnné)
$[x, f(x)] = [x, y]$	bod grafu funkce f o souřadnicích x, y
$\mathcal{O}_\delta(x_0)$	δ-okolí bodu x_0; $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$
$\widehat{\mathcal{O}}_\delta(x_0)$	prstencové (ryzí) δ-okolí bodu x_0; $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$
$\mathcal{O}_\delta^-(x_0)$	levé δ-okolí bodu x_0; $(x_0 - \delta, x_0]$
$\mathcal{O}_\delta^+(x_0)$	pravé δ-okolí bodu x_0; $[x_0, x_0 + \delta)$
$\widehat{\mathcal{O}}_\delta^-(x_0)$	levé prstencové δ-okolí bodu x_0; $(x_0 - \delta, x_0)$
$\widehat{\mathcal{O}}_\delta^+(x_0)$	pravé prstencové δ-okolí bodu x_0; $(x_0, x_0 + \delta)$
$\int f(x)\mathrm{d}x$	primitivní funkce k funkci f; (neurčitý) integrál funkce f
$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$	Riemannův (určitý) integrál funkce f od a do b
$[F(x)]_a^b = F(x)\vert_a^b$	$F(b) - F(a)$

§ 1.2 Číselné obory[1]

- **Přirozená čísla**: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.
- **Celá čísla**: $\mathbb{Z} = \{z = n \vee z = -n \vee z = 0 : n \in \mathbb{N}\} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
- **Racionální čísla**: $\mathbb{Q} = \{q = \frac{z}{n} :\ z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$.
  Čísla, která nejsou racionální, tj. nelze je vyjádřit jako podíl celého a přirozeného čísla, nazýváme *iracionální* a značíme $\mathbb{I}$.
- **Reálná čísla**: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.
  K reálným číslům lze jednoznačně přiřadit všechny body nekonečné přímky (číselné osy) dle jejich vzdálenosti od počátku.
- **Komplexní čísla**: $\mathbb{C} = \{z = a + bi :\ a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$.
  Komplexním číslem z nazýváme uspořádanou dvojici reálných čísel $[a, b]$ a píšeme $z = [a, b] = a + bi$. Číslu a říkáme reálná část komplexního čísla z ($\mathrm{Re}\, z$), číslu b imaginární část komplexního čísla z ($\mathrm{Im}\, z$).

[1] Bůh stvořil přirozená čísla, vše ostatní už je výtvorem člověka. (Leopold Kronecker)

Poznámka. Občas se používají např. pouze kladná reálná čísla včetně, nebo bez nuly apod. Proto označíme:

- $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$,
- $\mathbb{Z}^+ = \{x \in \mathbb{Z} : x > 0\}$, $\mathbb{Z}^- = \{x \in \mathbb{Z} : x < 0\}$,
- $\mathbb{Z}_0^+ = \{x \in \mathbb{Z} : x \geq 0\}$, $\mathbb{Z}_0^- = \{x \in \mathbb{Z} : x \leq 0\}$,
- $\mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}$, $\mathbb{Q}^- = \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}$,
- $\mathbb{Q}_0^+ = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0\}$, $\mathbb{Q}_0^- = \{x \in \mathbb{Q} : x \leq 0\}$,
- $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$,
- $\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $\mathbb{R}_0^- = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$,
- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ (tzv. rozšířená množina reálných čísel).

Kapitola

2 Vektory

§ 2.1 Vektorový prostor

Veličiny, kterými popisujeme svět kolem nás lze rozdělit do dvou skupin:

- **Skalární veličiny (skaláry)**
  – jsou plně určeny jediným číselným údajem udávajícím jejich velikost
  – teplota, hmotnost, množství,...

- **Vektorové veličiny (vektory)**
  – k jejich popisu je třeba více čísel v určeném pořadí
  – rychlost, síla (velikost a směr), poloha (souřadnice), barevný odstín (souřadnice RGB, CMYK), stav populace (počet a čas), ...

Definice 1 (Vektor)**.**

Nechť $n \in \mathbb{N}$. Uspořádanou n-tici reálných čísel $v_1, v_2, \ldots, v_n$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

nazýváme (reálným) *vektorem*. Číslo n potom nazýváme *dimenzí* (rozměrem) vektoru $\vec{v}$ a čísla $v_1, v_2, \ldots, v_n$ nazýváme *složky* vektoru $\vec{v}$.

Poznámka. Vektory se v literatuře někdy zapisují do řádku, tj. $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Je-li potom potřeba použít ho jako sloupec, používá se na něj operace transpozice (viz dále v části o maticích, kdy je na vektor nahlíženo jako na matici o jediném řádku/sloupci), podobně obráceně.

- Sčítání vektorů definujeme po složkách, tj. pro $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ máme

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

  Je zřejmé, že je možné sčítat pouze vektory o stejné dimenzi.

- Násobení vektoru $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ skalárem $\alpha \in \mathbb{R}$ definujeme tak, že každou složku vektoru $\vec{v}$ vynásobíme skalárem α, tj.

$$\alpha\vec{v} = \alpha \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \\ \vdots \\ \alpha v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Definice 2 (Nulový vektor)**.**

Vektor

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

nazýváme *nulový vektor*.

Pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ platí:

- $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$,
- $\alpha\vec{0} = \vec{0}$.

Definice 3 (Opačný vektor)**.**

Vektor $-\vec{v} = -1\vec{v}$ nazýváme *opačný vektor* k vektoru $\vec{v}$.

Platí

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{v} - \vec{v} = \vec{0}.$$

Vlastnosti operací na vektorech

Pro všechny vektory $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ a skaláry $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí:

(i) $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$,

(ii) $\alpha\vec{v} = \vec{v}\alpha$,

(iii) $\alpha(\vec{v} + \vec{w}) = \alpha\vec{v} + \alpha\vec{w}$,

(iv) $(\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$,

(v) $\alpha(\beta\vec{v}) = (\alpha\beta)\vec{v}$,

(vi) $1\vec{v} = \vec{v}$.

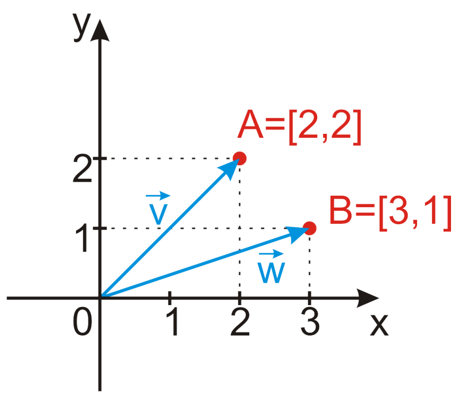
Definice 4 (Vektorový prostor)**.**

Množinu všech n-rozměrných vektorů s operacemi sčítání vektorů a násobení vektoru reálným číslem nazýváme n-rozměrný *vektorový prostor*.

Poznámka. Vektorový prostor je uzavřen na operace sčítání vektorů a násobení vektoru reálným číslem. Tj. je-li V vektorový prostor, $\vec{v}, \vec{w} \in V$, $a, b \in \mathbb{R}$, pak

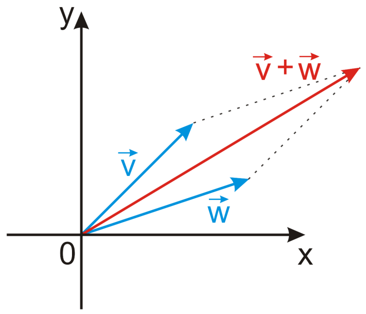
- $\vec{v} + \vec{w} \in V$,
- $a\vec{v} \in V$,
- $a\vec{v} + b\vec{w} \in V$.

Geometricky lze vektory (dimenze 2 a 3) zobrazit jako orientované průvodiče bodů (v rovině, nebo v prostoru). Na obr. 2.1 jsou zobrazeny vektory $\vec{v} = \binom{2}{2}$ a $\vec{w} = \binom{3}{1}$.

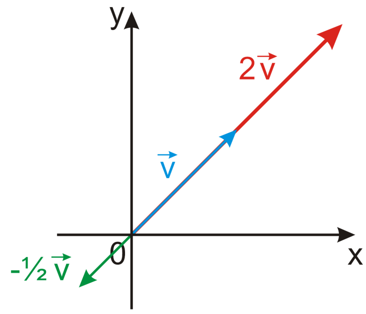


Obr. 2.1: Vektory v rovině.

Operaci sčítání vektorů lze snadno znázornit pomocí tzv. rovnoběžníkového pravidla (viz obr. 2.2). Násobení konstantou $\alpha \in \mathbb{R}$ geometricky znamená prodloužení vektoru (pro $\alpha > 1$), žádnou změnu (pro $\alpha = 1$), nebo jeho zkrácení (pro $\alpha < 1$) při zachování jeho směru. Vynásobení zápornou konstantou navíc vektor otáčí (viz obr. 2.3).

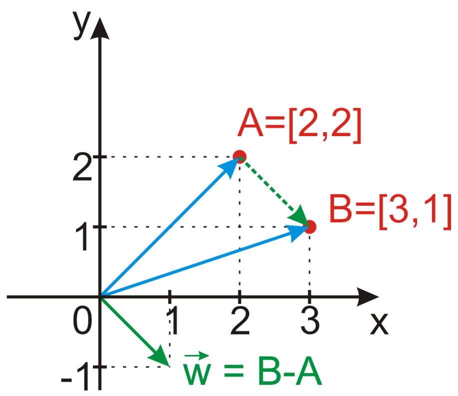


Obr. 2.2: Sčítání vektorů.



Obr. 2.3: Násobení vektoru konstantou.

Vektor lze zadat také pomocí jeho počátečního a koncového bodu. Vektor $\vec{w} = \overrightarrow{AB} = B - A$ je orientovaná úsečka z bodu A do bodu B, viz obr. 2.4.



Obr. 2.4: Vektor $\vec{w} = B - A$.

Poznámka. Protože vektor je dán jen svou velikostí a směrem, zelené šipky na obr. 2.4 jsou jen různá umístění téhož vektoru $\vec{w} = \binom{1}{-1}$.

Definice 5 (Lineární kombinace)**.**

Nechť $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \in \mathbb{R}^n$ a $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$. Vektor

$$\vec{w} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_m\vec{v}_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\vec{v}_i$$

nazýváme *lineární kombinace* vektorů $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$.

Příklad 1. *Vektor* $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ *je lineární kombinací vektorů* $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, *neboť*

$$2\vec{u} + \vec{v} = 2\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3\\1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cdot 1 + (-3)\\2\cdot 2 + 1\\2\cdot 3 + (-2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\5\\4\end{pmatrix} = \vec{w}.$$

Definice 6 (Lineární závislost)**.**

Řekneme, že vektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \in \mathbb{R}^n$ jsou *lineárně závislé*, jestliže je jeden z těchto vektorů lineární kombinací ostatních. V opačném případě řekneme, že jsou *lineárně nezávislé*.

Platí 1. *Vektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \in \mathbb{R}^n$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když existují taková čísla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$, že aspoň jedno z nich je nenulové a platí*

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \vec{v}_i = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \cdots + \alpha_m \vec{v}_m = \vec{0}.$$

Poznámka. Vektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m \in \mathbb{R}^n$ jsou zcela jistě závislé, jestliže:

- je mezi nimi aspoň jeden nulový vektor,
- jsou mezi nimi aspoň dva vektory stejné,
- jeden z daných vektorů je násobkem jiného,
- $m > n$ (vektorů je větší počet, než je jejich dimenze).

Příklad 2. *Vektory* $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix}-3\\1\\-2\end{pmatrix}$ *a* $\vec{w} = \begin{pmatrix}-1\\5\\4\end{pmatrix}$ *jsou lineárně závislé, neboť* $\vec{w} = 2\vec{u} + \vec{v}$, *tj.*

$$2\vec{u} + \vec{v} - \vec{w} = \vec{0}.$$

Definice 7 (Skalární součin)**.**

Nechť $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$. Číslo

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_m w_m = \sum_{i=1}^{m} v_i w_i$$

nazýváme *skalární součin* vektorů $\vec{v}, \vec{w}$.

Příklad 3.

$$\langle \begin{pmatrix}-3\\7\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\5\\4\end{pmatrix} \rangle = (-3)\cdot(-1) + 7\cdot 5 + (-2)\cdot 4 = 3 + 35 - 8 = 30.$$

§ 2.2 Příklady k procvičení

Příklad 4. *Jsou dány vektory*

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Spočtěte:

(i) $5w - u$,

(ii) $3u - 2v + w$,

(iii) $\langle u, v \rangle = u \cdot v$,

(iv) $\langle 2u - w, -v \rangle = (2u - w) \cdot (-v)$.

§ 2.3 Wolfram|Alpha

- Součet vektorů.

```
(1,3,2) + (-2,4,5)
```

- Násobení vektoru konstantou.

```
-2 (-1,0,2)
```

- Lineární kombinace vektorů.

```
4 (-1,0,2) -3 (5,4,-6)
```

- Skalární součin.

```
(-1,0,2).(5,4,-6)
```

- Lineární (ne)závislost.

```
linear independence (-1,0,2),(5,4,-6),(1,2,3),(0,2,5)
```

Kapitola

3 Matice

§ 3.1 Definice a operace

Definice 8 (Matice)**.**

(Reálnou) *maticí* typu $m \times n$ rozumíme obdélníkové číselné schéma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

kde čísla $a_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$, nazýváme prvky matice A. Množinu všech matic typu $m \times n$ značíme $Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$. Matici A s prvky a_{ij} značíme také $A = (a_{ij})$.

Poznámka. V předchozí definici m značí počet řádků a n počet sloupců matice A. Prvek a_{ij} se nachází v i-tém řádku a j-tém sloupci matice A.

- Sčítání matic stejných rozměrů definujeme po složkách, tj. pro $A, B \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ máme

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R}).$$

Příklad 5.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 4 & -2 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2 & -1+7 \\ 0+4 & 1-2 \\ 5+1 & 3+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 4 & -1 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}$$

Příklad 6.

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \textit{Nelze sečíst, matice mají různé rozměry.}$$

- Násobení matice $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ skalárem $\alpha \in \mathbb{R}$ definujeme tak, že každou složku matice A vynásobíme skalárem α, tj.

$$\alpha A = \alpha(a_{ij}) = (\alpha a_{ij}) \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R}).$$

Příklad 7.

$$7\begin{pmatrix}-2 & 7\\ 4 & -1\\ 1 & 8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\cdot(-2) & 7\cdot 7\\ 7\cdot 4 & 7\cdot(-1)\\ 7\cdot 1 & 7\cdot 8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-14 & 49\\ 28 & -7\\ 7 & 56\end{pmatrix}$$

Vlastnosti operací na maticích

Pro všechny matice $A, B \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ a skaláry $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí:

(i) $A + B = B + A$,

(ii) $\alpha A = A\alpha$,

(iii) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$,

(iv) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$,

(v) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$,

(vi) $1A = A$.

Definice 9.

Nechť $A = (a_{ij}) \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$.

- Platí-li $m = n$, nazýváme matici A *čtvercová matice* řádu m (řádu n).
- Prvky a_{ii} čtvercové matice nazýváme prvky *hlavní diagonály*.
- Matice, jejíž všechny prvky jsou nulové, nazýváme *nulová matice* a značíme $\mathcal{O}$.
- Čtvercovou matici, která má na hlavní diagonále jedničky a všude jinde nuly, nazýváme *jednotkovou maticí* a značíme I.
- Matici, jejíž každý řádek začíná větším počtem nul než řádek přecházející, nazýváme *schodovitou maticí*.
- Matici
$$A^T = (a_{ji}) \in Mat_{n\times m}(\mathbb{R})$$
nazýváme *transponovaná matice* k matici A. (Transponovaná matice vznikne záměnou řádků a sloupců původní matice.)

Příklad 8. *Jsou dány matice*

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\\ 3 & -4\end{pmatrix}.$$

- *Matice A je čtvercovou maticí řádu 2, je to jednotková matice a je schodovitá.*
- *Matice B je schodovitá.*

- *Matice C je čtvercová řádu 3, není schodovitá.*
- *Matice D je transponovaná k matici B, tj. $D = B^T$ a $B = D^T$.*

Definice 10 (Násobení matic).

Nechť matice A je typu $m \times \boxed{p}$ a B je matice typu $\boxed{p} \times n$. *Součinem matic* A a B (v tomto pořadí) rozumíme matici C typu $m \times n$, pro jejíž prvky platí

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots a_{ip}b_{pj} = \\ = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj},$$

pro $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Píšeme $C = AB$

Poznámka. Při násobení matic v předchozí definici vznikl prvek c_{ij} jako skalární součin i-tého řádku matice A a j-tého sloupce matice B.

Příklad 9.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 3\cdot 2 + 0\cdot 0 + (-2)\cdot 5 & 3\cdot 1 + 0\cdot(-4) + (-2)\cdot 9 \\ 1\cdot 2 + 4\cdot 0 + 3\cdot 5 & 1\cdot 1 + 4\cdot(-4) + 3\cdot 9 \\ 2\cdot 2 + 7\cdot 0 + 1\cdot 5 & 2\cdot 1 + 7\cdot(-4) + 1\cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -15 \\ 17 & 12 \\ 9 & -17 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix} = \times$$

Matice nelze násobit, nemají správné rozměry $[(3 \times 2)(3 \times 3)]$.

Věta 1.

Nechť A, B, C jsou matice vhodných rozměrů. Pak platí

$$(AB)C = A(BC), \\ A(B + C) = AB + AC, \\ (A + B)C = AC + BC.$$

Poznámka. Součin matic *není* komutativní, tj. obecně nelze zaměňovat pořadí násobení matic.

Věta 2.

Nechť $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{R})$. Potom platí $A \cdot I_n = A$, $I_m \cdot A = A$.

Definice 11 (EŘO)**.**

Následující úpravy matic nazýváme *ekvivalentní řádkové operace* (úpravy)

- výměna dvou řádků,
- vynásobení řádku nenulovým číslem,
- přičtení jednoho řádku k jinému,
- vynechání nulového řádku.

Řekneme, že matice A a B jsou ekvivalentní a píšeme $A \sim B$, jestliže lze matici A převést konečným počtem ekvivalentních úprav na matici B.

Věta 3.

Každou matici lze konečným počtem ekvivalentních řádkových úprav převést do schodovitého tvaru.

§ 3.2 Gaussova eliminační metoda

Pomocí *Gaussovy eliminační metody* (GEM) lze převést libovolnou matici do schodovitého tvaru.

Postup

(i) V matici najdeme sloupec nejvíce vlevo s alespoň jedním nenulovým prvkem.

(ii) Zvolíme v tomto sloupci jeden z nenulových prvků (tzv. pivota) a přemístíme řádek, ve kterém se nachází, na pozici prvního řádku (pomocí výměny řádků).

(iii) Pomocí EŘO vynulujeme prvky pod pivotem. Vznikne-li nulový řádek, vynecháme ho.

(iv) Kroky (i)–(iii) opakujeme na podmatici vzniklé z původní matice vynecháním řádku s pivotem.

(v) Postup opakujeme, dokud není matice ve schodovitém tvaru

Poznámka. Kdykoliv během postupu můžeme některý řádek vynásobit, nebo vydělit vhodným číslem tak, abychom matici zjednodušili.

Příklad 10.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 6 \\ \boxed{1} & 3 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \overset{I \leftrightarrow II}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \; III - 2 \cdot I$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 2 & 6 \\ 0 & -5 & 10 & 1 \end{pmatrix} \; III - 5 \cdot II \quad \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -29 \end{pmatrix}$$

Definice 12 (Hodnost matice)**.**

Nechť $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{R})$. *Hodností* $h(A)$ matice A rozumíme maximální počet lineárně nezávislých řádků (= počet lineárně nezávislých sloupců).

Věta 4.

- Hodnost matice ve schodovitém tvaru je rovna počtu jejích nenulových řádků.
- Matice transponovaná má stejnou hodnost jako matice původní.
- Ekvivalentní matice mají stejnou hodnost.

Příklad 11. *V předchozím příkladu jsme zjistili, že*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -29 \end{pmatrix},$$

tedy $h(A) = 3$.

Poznámka. Tímto způsobem lze také snadno zjistit, zda jsou dané vektory lineárně závislé, popř. z nich dokonce vybrat maximální počet lineárně nezávislých vektorů.
Vektory naskládáme jako sloupce do matice, tu převedeme do schodovitého tvaru. Lineárně nezávislé vektory jsou ty, které se nacházely ve sloupcích s pivoty.

Definice 13.

Nechť A je čtvercová matice řádu n. Jestliže existuje čtvercová matice A^{-1} řádu n taková, že platí

$$A \cdot A^{-1} = I = A^{-1} \cdot A,$$

nazýváme matici A^{-1} *inverzní maticí* k matici A.

Věta 5.

Nechť je A čtvercová matice řádu n. Potom k ní existuje inverzní matice A^{-1} právě tehdy, když má matice A lineárně nezávislé řádky (říkáme, že je regulární).

Z předchozí věty plyne, že inverzní matici lze najít jen ke čtvercové matici, která má plnou hodnost. To znamená, že ve schodovitém tvaru jsou všichni pivoti na její hlavní diagonále a v průběhu GEM se neobjevil žádný nulový řádek. Jádrem algoritmu pro výpočet inverzní matice je tzv. *úplná Gaussova eliminace*, která spočívá v tom, že po získání schodovitého tvaru pokračujeme stejným způsobem v nulování prvků nad pivoty (se kterými se už nehýbe), a to zprava doleva.

Postup

1. K matici A přidáme jednotkovou matici stejné velikosti. Tím získáme rozšířenou matici $(A|I)$.

2. Pomocí úplné Gaussovy eliminace převedeme matici A na diagonální matici (tj. matici, která má nenulové prvky pouze na hlavní diagonále). Všechny EŘO přitom provádíme s *celými* řádky matice $(A|I)$.

3. Každý řádek matice $(A|I)$ vydělíme diagonálním prvkem matice A, který se v něm nachází.

4. Tím jsme matici A převedli na matici I a matici I na matici A^{-1}. Výsledná rozšířená matice je tedy $(I|A^{-1})$.

Poznámka. Opět jako u „neúplné“ Gaussovy eliminační metody můžeme kdykoliv to jde matici zjednodušit vhodnou úpravou (zvláště vydělení řádku společným dělitelem všech jeho prvků).

Příklad 12. *Najděte inverzní matice k maticím A, B a C.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Matice A není čtvercová, tedy k ní neexistuje inverzní matice.

$$\begin{aligned}
(B|I) = &\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II + I \\ III - 2 \cdot I \end{array} \\
\sim &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & 6 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III + II \end{array} \\
\sim &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot \frac{1}{5} \end{array} \\
\sim &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1/5 & 1/5 & 1/5 \end{array}\right) \begin{array}{l} I - 2 \cdot III \\ II - 6 \cdot III \\ \end{array} \\
\sim &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 7/5 & -2/5 & -2/5 \\ 0 & \boxed{3} & 0 & 11/5 & -1/5 & -6/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 & 1/5 & 1/5 \end{array}\right) \begin{array}{l} I - II \\ \\ \end{array}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sim &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4/5 & -1/5 & 4/5 \\ 0 & 3 & 0 & 11/5 & -1/5 & -6/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 & 1/5 & 1/5 \end{array}\right) \cdot \frac{1}{3} \\
\sim &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4/5 & -1/5 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 & 11/15 & -1/15 & -6/15 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 & 1/5 & 1/5 \end{array}\right) = (I|B^{-1})
\end{aligned}$$

Tedy

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -4/5 & -1/5 & 4/5 \\ 11/15 & -1/15 & -6/15 \\ -1/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} -12 & -3 & 12 \\ 11 & -1 & -6 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(C|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{2} & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II - 2I \\ III - I \end{array}$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-5} & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III - II \end{array}$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Matice C není regulární ($h(C) = 2$), tedy k ní neexistuje inverzní matice.

§ 3.3 Aplikace – Leslieho model růstu

Pomocí Leslieho modelu je možné odhadnout vývoj populace. Popíšeme si pouze její vytvoření a použití. Zkoumáme nějaký systém jednotlivců (zvířata, hmyz, buněčné kultury,…) rozdělený do n skupin (stáří, fáze vývoje,…). Stav v čase k je tedy dán vektorem

$$x_k = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

kde $a_i, i = 1, \ldots, n$, je počet jedinců skupiny i v čase k. (Lineární) model vývoje takového systému je dán maticí $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$, která popisuje změnu z x_k na x_{k+1} (jde o iterovaný proces):

$$x_{k+1} = Ax_k.$$

Leslieho matice má tvar

$$A = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \cdots & f_n \\ \tau_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tau_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \tau_3 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \tau_{n-1} \end{pmatrix},$$

kde f_i je relativní plodnost a τ_i relativní přežití skupiny i.

Příklad 13. *Uvažujme populaci nezmarů, kteří se dožívají tří měsíců. Každý nezmar splodí mezi prvním a druhým měsícem dva malé nezmárky, stejně tak mezi druhým a třetím měsícem života. Mladí nezmaři (do stáří jednoho měsíce) neplodí. Polovina nezmarů po dovršení druhého měsíce umírá, po dovršení třetího měsíce umírají všichni. Napište Leslieho matici nezmařího modelu a určete složení populace, o složení* $(17, 102, 191)$ *po třech měsících.*

Řešení: Leslieho matice je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daná populace bude mít po třech měsících složení

$$A^3 \cdot (\text{počáteční složení}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}^3 \cdot \begin{pmatrix} 17 \\ 102 \\ 191 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1189 \\ 136 \\ 293 \end{pmatrix}.$$

Poznámka. Z modelu daného Leslieho maticí lze snadno určit i přírůstek za období a také k jakému složení (vzhledem k “věkovým” skupinám) populace spěje. K obojímu se vrátíme po probrání náležitých matematických nástrojů. Populace z nezmařího příkladu má přírůstek cca 62% a ustálí se na složení cca 52 : 32 : 10. Tedy nejmladších bude (cca) 55, 32%, středního věku 34, 04% a seniorů 10, 64%.

§ 3.4 Příklady k procvičení[1]

Příklad 14. *Jsou dány matice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Spočtěte:

(i) $A + B$,

(ii) $3A - 2B$,

(iii) $A - 3B^T$,

(iv) AB^T,

(v) AB.

Příklad 15. *Jsou dány matice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Určete, v jakém pořadí je lze vynásobit a násobení proveďte.

Příklad 16. *Proveďte totéž, co v příkladu 15, pro transponované matice* A^T, B^T, C^T.

Příklad 17. *Pomocí Gaussovy eliminační metody převeďte matici* D *na schodovitý tvar.*

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

[1] Největší matice v testu bude 3×3 nebo 4×4. Je to test, ne reálný život. (Michael Sand)

Příklad 18. *Určete hodnost matice*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dále určete, které sloupce v matici E jsou lineárně nezávislé.

Příklad 19. *Najděte matici inverzní k zadaným maticím.*

$$F = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -7 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 20. *Jsou dány matice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Spočtěte $3A - 2B, AB^T, A^T B$.

Příklad 21. *Jsou dány vektory*

$$u = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Spočtěte $\langle u, v\rangle, uv^T, u^T v$.

Příklad 22. *Určete hodnost matice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Příklad 23. *Napište příklady matic o hodnosti* $1, 2, 3$ *a* 4 *a hodnost zdůvodněte.*

Příklad 24. *Jsou dány vektory*

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, u_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Vyberte z nich co nejvíce lineárně nezávislých vektorů.

Příklad 25. *Najděte inverzní matici k maticím*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

§ 3.5 Wolfram|Alpha

- Součet matic.

```
{(-1,0,2),(5,4,-6),(1,2,3)} + {(2,1,0),(6,-3,4),(2,2,5)}
```

- Násobení matice konstantou.

```
3 {(5,-3,0),(2,1,-3),(4,0,3)}
```

- Lineární kombinace matic.

```
-2 {(3,3,2),(-2,1,6),(1,5,3)} +5 {(2,2,-2),(3,-6,1),(0,2,7)}
```

- Součin matic.

```
{(-1,1,0,2),(5,4,-4,-6),(3,5,2,-3)}.{(0,1),(3,-3),(2,-1),(5,0)}
```

- Hodnost matice.

```
rank{(5,-4,8),(3,-3,4),(3,-3,4),(2,-1,4)}
```

- Transponovaná matice.

```
transpose{(4,2,-1),(3,9,5),(2,-1,1),(1,6,-2)}
```

- Inverzní matice.

```
inverse{(2,-1,3),(0,-3,2),(2,-1,5)}
```

Kapitola

4 Soustavy lineárních rovnic I

§ 4.1 Definice a pojmy

Definice 14 (Soustava lineárních rovnic)**.**

Nechť $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Soustavou m lineárních rovnic o n neznámých $x_1, x_2, \dots, x_n$ rozumíme soustavu rovnic

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{gathered} \tag{SLR}$$

Věta 6.

Řešení soustavy lineárních rovnic (SLR) rozumíme uspořádanou n-tici reálných čísel $r_1, r_2, \dots, r_n$, po jejichž dosazení za neznámé $x_1, x_2, \dots, x_n$ (v tomto pořadí) do soustavy lineárních rovnic dostaneme ve všech rovnicích identity.

Definice 15 (Matice soustavy).

- Matici
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$
nazýváme *maticí soustavy* (SLR).

- Matici
$$A_r = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$
nazýváme *rozšířenou maticí soustavy* (SLR).

Poznámka. Soustavu (SLR) můžeme zapsat v maticové formě:
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$
po příslušném označení $Ax = b$.

Definice 16 (Homogenní soustava lineárních rovnic).

Jestliže v soustavě (SLR) platí
$$b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0,$$
nazýváme tuto soustavu *homogenní*. V opačném případě se nazývá soustava *nehomogenní*.

Poznámka. Homogenní soustava lineárních rovnic má buď pouze triviální řešení (jestliže $h(A) = n$), nebo nekonečně mnoho řešení (jestliže $h(A) < n$), která lze vyjádřit pomocí $n - h(A)$ nezávislých parametrů.

Věta 7 (Frobeniova).

Soustava lineárních rovnic $Ax = b$ je řešitelná právě tehdy, když matice soustavy A a rozšířená matice soustavy $A_r = (A|b)$ mají stejnou hodnost.

Počet řešení SLR

- Jestliže $h(A) \neq h(A_r)$, soustava *nemá řešení*.
- Jestliže $h(A) = h(A_r) = n$, soustava *má právě jedno řešení*.
- Jestliže $h(A) = h(A_r) < n$, soustava *má nekonečně mnoho řešení*, která lze vyjádřit pomocí $n - h(A)$ nezávislých parametrů.

§ 4.2 Řešení soustav lineárních rovnic

Definice 17 (Ekvivalentní soustavy lineárních rovnic)**.**

Dvě soustavy lineárních rovnic se nazývají *ekvivalentní*, jestliže mají shodné řešení.

Postup

(i) Pomocí GEM převedeme rozšířenou matici soustavy $A_r = (A|b)$ na schodovitý tvar.

(ii) Pomocí Frobeniovy věty rozhodneme, zda má soustava řešení.

(iii) Je-li soustava řešitelná, přiřadíme schodovité matici soustavu lineárních rovnic. Tato je ekvivalentní s původní soustavou.

(iv) Postupně řešíme rovnice od poslední a získané výsledky dosazujeme do následujících rovnic. Má-li soustava nekonečně mnoho řešení, zvolíme vhodné proměnné za nezávislé parametry.

Poznámka. Je-li matice A soustavy $Ax = b$ regulární, pak má tato soustava vždy jediné řešení. Toto řešení je možné získat použitím inverzní matice A^{-1}.

$$\begin{aligned} Ax &= b \quad /\underrightarrow{A^{-1}} \\ A^{-1}Ax &= A^{-1}b \\ Ix &= A^{-1}b \\ x &= A^{-1}b. \end{aligned}$$

Pozor, obě strany rovnice musíme vynásobit maticí ze stejné strany (zde zleva), protože násobení matic není komutativní.

Příklad 26.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 2x + 7y + z &= -2 \\ x + 2y + z &= 4 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -6 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -6 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Řešení je tedy $x = -11$, $y = 1$, $z = 13$.

§ 4.3 Příklady k procvičení

Příklad 27. *Vyřešte soustavu lineárních rovnic:*

(i)

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 9, \\ x - y + z &= -2, \\ -x + 2y - 3z &= 6, \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} x + 3y + 2z &= -1, \\ 2x + 7y + 6z &= 3, \\ x + 5y + 6z &= 13, \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} 2x - 3y - 6z &= -13, \\ x - y - 2z &= -5, \\ -x + 2y + 4z &= 8, \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_4 &= 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 3, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 &= 2, \end{aligned}$$

(v)

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6, \\ x - y + z &= 2, \\ x - 2y - 2z &= -6, \end{aligned}$$

(vi)

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6, \\ x + 2y - 2z &= 4, \\ 2x + 3y - z &= 10, \end{aligned}$$

(vii)

$$\begin{aligned} 2x + 2y + z &= -1, \\ -3x + y &= 0, \\ 2x + 3y - z &= 1, \\ 4x + 5y &= 0, \end{aligned}$$

(viii)

$$\begin{aligned} -3x + y - 2z &= 4, \\ -3x + y - z &= 2, \\ x + 3y - 5z &= -2, \\ 4x + 5y - 3z &= 1, \end{aligned}$$

(ix)

$$\begin{aligned} x + y - 2z - w &= 2, \\ -2x + 3y - z + 2w &= 1, \\ 3x + 2y - z - 3w &= -2, \\ 4x - 2y - 3z - 2w &= 1. \end{aligned}$$

(x)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 &= 2, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3, \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 1, \\ 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 6. \end{aligned}$$

§ 4.4 Wolfram|Alpha

- Řešení soustavy lineárních rovnic.

```
solve 2x+3y-z=2,5x-y-4z=7,x-y+6z=1
```

```
solve x1+3x2-5x3+x4=12,2x1-x2+x3-x4=-5,x3-5x4=1
```

Kapitola

5 Determinanty

§ 5.1 Definice a determinanty do řádu 3

Definice 18 (Permutace)**.**

Nechť jsou dána čísla $1, 2, \dots, n$. *Permutací* těchto prvků rozumíme uspořádanou n-tici, která vznikla jejich přeskládáním. *Inverzí* rozumíme záměnu i-tého a j-tého prvku v permutaci.

Poznámka. Počet permutací n-prvkové množiny je $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$. Např. permutací prvků $1, 2, 3$ je $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, konkrétně:

$$(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1).$$

Definice 19 (Determinant)**.**

Nechť A je čtvercová matice řádu n. *Determinant* matice A je číslo $\det A = |A| \in \mathbb{R}$,

$$\det A = \sum (-1)^p a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n},$$

kde sčítáme přes všechny permutace $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ sloupcových indexů. Číslo p značí počet inverzí příslušné permutace.

Poznámka. Podle definice tedy „stačí“ vzít po jednom prvku z každého řádku tak, aby žádné dva nebyly ze stejného sloupce. Tyto prvky mezi sebou vynásobit. Determinant je právě součtem všech těchto součinů. Z toho je vidět, že definice není vhodná pro počítání determinantů matic větších rozměrů.

Výpočet determinantů nižších řádů

- Determinant řádu 1:
$$\det(a_{11}) = a_{11}.$$

- Determinant řádu 2 – křížové pravidlo:
$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

- Determinant řádu 3 – Sarrusovo pravidlo
$$\det A = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{array}{ccc} \left| a_{11} \right. & a_{12} & \left. a_{13} \right| \\ \left| a_{21} \right. & a_{22} & \left. a_{23} \right| \\ \left| a_{31} \right. & a_{32} & \left. a_{33} \right| \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

§ 5.2 Determinanty vyšších řádů

Definice 20.

Nechť A je čtvercová matice řádu n. Vynecháme-li v matici A i-tý řádek j-tý sloupec, označujeme derminant vzniklé submatice M_{ij} a nazýváme jej *minor* příslušný prvku a_{ij}. Číslo
$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$
nazýváme *algebraický doplněk* prvku a_{ij}.

Věta 8 (Laplaceův rozvoj)**.**

Nechť A je čtvercová matice řádu n. Pro libovolný řádek (sloupec) determinantu $\det A$ platí

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

$$\left(\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}\right).$$

Příklad 28. *Je dán determinant*

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix}.$$

Protože druhý řádek a třetí sloupec obsahuje nulu, je vhodné zvolit pro Laplaceův rozvoj jeden z nich. Zvolme druhý řádek a počítejme:

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ \boxed{4} & 5 & 0 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix}, \quad a_{21} = 4, \quad M_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix},$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = (-1) \cdot [-12 - (-1)] = 11$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & \boxed{5} & 0 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix}, \quad a_{22} = 5, \quad M_{22} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix},$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = 1 \cdot [8 - 3] = 5$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & \boxed{0} \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix}, \quad a_{23} = 0, \quad M_{23} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix},$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = (-1) \cdot [2 - 9] = 7.$$

Odtud

$$\det A = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = 4 \cdot 11 + 5 \cdot 5 + 0 \cdot 7 = 69.$$

Poznámka. Determinant řádu n se pomocí Laplaceova rozvoje převede na nejvýše n determinantů řádu $n-1$. Přitom cílem je převést determinant vyššího řádu na determinanty řádu 2 nebo 3, které lze snadno spočítat křížovým, resp. Sarrusovým pravidlem. Např. determinant řádu 5 vede na nejvýše 5 determinantů řádu 4. Z nich každý vede na nejvýše 4 determinanty řádu 3. Celkem tedy determinant řádu 5 vede na nejvýše 20 determinantů řádu 3, popř. na 60 determinantů řádu 2. Proto je velmi vhodné vybírat pro rozvoj řádek, nebo sloupec obsahující co největší počet nulových prvků.

§ 5.3 Úpravy determinantů

Věta 9 (Operace neměnící hodnotu determinantu)**.**

Ponechání jednoho řádku/sloupce beze změny a přičtení jeho násobku k jinému řádku/sloupci nemění hodnotu determinantu.

Příklad 29.

$$\begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} I \\ II-2I \\ III+3I \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & 8 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-32+40) = 8.$$

Věta 10 (Operace měnící hodnotu determinantu)**.**

- Záměna dvou řádků/sloupců determinantu změní jeho znaménko.
- Vynásobení řádku/sloupce nenulovým číslem α zvětší hodnotu determinantu α-krát. (Tj. z řádků/sloupců lze vytýkat před determinant.)

Příklad 30.

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} \; I \leftrightarrow II \; = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 8 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

Věta 11.

Jsou dány čtvercové matice A, B řádu n.

(i) $|A| = 0 \Leftrightarrow$ řádky nebo sloupce matice A jsou lineárně závislé,

(ii) matice A obsahuje nulový řádek nebo sloupec $\Rightarrow |A| = 0$,

(iii) $|A^T| = |A|$,

(iv) jestliže je $|A| \neq 0$, pak $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$,

(v) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$,

(vi) determinant matice ve schodovitém tvaru je roven součinu prvků na její hlavní diagonále.

§ 5.4 Příklady k procvičení

Příklad 31. *Určete determinanty:*

(i) $\left|-8\right|$,

(ii) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$,

(iii) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$,

(iv) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 8 & -3 \end{vmatrix}$,

(v) $\begin{vmatrix} x^2 & 1-x \\ 5x & 3 \end{vmatrix}$,

(vi) $\begin{vmatrix} a-b & 3 & 2a \\ b-1 & -2a & a+2b \\ b & 3a & ab \end{vmatrix}$,

Příklad 32. *Určete determinanty:*

(i) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$,

(ii) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$,

(iii) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

Příklad 33. *Vypočtěte determinant:*

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

§ 5.5 Wolfram|Alpha

- Výpočet determinantu.

```
det{(2,-1,1,3),(6,2,0,1),(-2,5,3,1),(2,2,0,1)}
```

Kapitola

6 Soustavy lineárních rovnic II

§ 6.1 Cramerovo pravidlo

Uvažujme soustavu n lineárních rovnic o n neznámých $Ax = b$. Matice A takovéto soustavy je tedy čtvercová matice řádu n. Jestliže je determinant matice A nenulový, tedy soustava $Ax = b$ má právě jedno řešení, lze použít k jejímu vyřešení tzv. Cramerovo pavidlo. Jeho výhodou je, že je možné spočítat libovolnou neznámou bez znalosti ostatních.

Věta 12 (Cramerovo pravidlo)**.**

Nechť je A čtvercová regulární matice řádu n. Potom má soustava lineárních rovnic $Ax = b$ jediné řešení x, pro jehož i-tou složku platí

$$x_i = \frac{D_i}{D},$$

kde $D = \det A$ a D_i je determinant matice řádu n vzniklé z matice A náhradou jejího i-tého sloupce za sloupec pravých stran b.

Příklad 34. *Určete hodnotu neznámé proměnné x_2 ze soustavy lineárních rovnic*

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3. \end{aligned}$$

Řešíme tedy soustavu lineárních rovnic $Ax = b$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Pro výpočet neznámé x_2 je nutné určit determinanty D a D_2:

$$D = \det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -5.$$

Protože je $\det A \neq 0$, lze použít Cramerovo pravidlo.

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -11.$$

Tedy $x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-11}{-5} = \frac{11}{5}$.

§ 6.2 Aplikace – Leslieho model růstu II

Příklad 35. *Mějme dán zjednodušený model populace jistého modrého ptáčka (lat. Ptacchus modrus). Populace je rozdělena do čtyř věkových skupin – vajíčko, mládě v hnízdě, létající mládě a dospělý jedinec. Je známo, že bývá zničeno sedm vajíček ze šestnácti, osmina mláďat v hnízdě uhyne a další osmina zemře při pokusu o první let. Z létajících mláďat se dospělosti dožijí tři ze čtyř a pár dospělých ptáčků přivede na svět průměrně 32 vajíček. Napište matici modelu, určete přírůstek populace a výsledný poměr mezi věkovými skupinami.*

Řešení: Leslieho matice je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 16 \\ \frac{9}{16} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

Přírůstek a výsledný poměr populace získáme pomocí tzv. vlastních čísel a vlastních vektorů. Protože nás zajímá jen algoritmické řešení daného problému, nebudeme se zabývat teorií na pozadí. Vlastní čísla získáme tak, že od každého prvku na hlavní diagonále Leslieho matice odečteme neznámou λ a spočítáme determinant. Determinantem je polynom s proměnnou λ a jeho kořeny jsou právě vlastní čísla naší matice. Z nich nás zajímá pouze jediné – největší reálné. To udává přírůstek dané populace.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 16 \\ \frac{9}{16} & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - \left(\frac{3}{2}\right)^4.$$

Tedy řešíme rovnici $\lambda^4 - \left(\frac{3}{2}\right)^4 = 0$. Ta má pouze dva reálné kořeny a to $-\frac{3}{2}$ a $\frac{3}{2}$. Větší je $\frac{3}{2} = 1,5$, takže po jednom období bude mít populace $1,5$ násobek Ptacchusů. Populace tedy roste s přírůstkem 50%.

Nyní zbývá určit výsledné složení populace. To udává vlastní vektor příslušný již použitému (dominantnímu) vlastnímu číslu. Získáme ho jako řešení homogenní soustavy lineárních rovnic dané Leslieho maticí, ve které od každého prvku na hlavní diagonále odečteme příslušné vlastní číslo.

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 16 \\ \frac{9}{16} & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} -\tfrac{3}{2}x_1 + 16x_4 &= 0 \\ \tfrac{9}{16}x_1 - \tfrac{3}{2}x_2 &= 0 \\ \tfrac{3}{4}x_2 - \tfrac{3}{2}x_3 &= 0 \\ \tfrac{3}{4}x_3 - \tfrac{3}{2}x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení závislých na jednom parametru:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{32}{3}p \\ 4p \\ 2p \\ p \end{pmatrix}, \quad p \in \mathbb{R}.$$

Nám stačí kterékoli nenulové z nich. Zvolme tedy např. parametr $p = 1$. Tím získéme jediné řešení (jediný vlastní vektor), jehož složky udávají poměr složení ke kterému populace směřuje, tedy

$$\tfrac{32}{3} : 4 : 2 : 1.$$

Srozumitelnější je samozřejmě udávat výsledné složení v procentech. Nejprve se zbavíme zlomku – celý vektor vynásobíme trojkou $\Rightarrow 32 : 12 : 6 : 3$, poté vydělíme jejich součtem a vynásobíme stovkou (tj. krát $\frac{100}{53}$). Odtud po zaokrouklení získáme složení populace v procentech:

$$60 : 23 : 11 : 6.$$

Tedy na 60 vajíček připadá 23 mláďat v hnízdě, 11 mláďat letců a 6 dospělých.

§ 6.3 Příklady k procvičení

Příklad 36. *Najděte řešení následujících soustav lineárních rovnic pomocí Cramerova pravidla (je-li to možné):*

(i)

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 9, \\ x - y + z &= -2, \\ -x + 2y - 3z &= 6, \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} x + 3y + 2z &= -1, \\ 2x + 7y + 6z &= 3, \\ x + 5y + 6z &= 13, \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} 2x - 3y - 6z &= -13, \\ x - y - 2z &= -5, \\ -x + 2y + 4z &= 8, \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6, \\ x - y + z &= 2, \\ x - 2y - 2z &= -6. \end{aligned}$$

Příklad 37. *Vyřešte soustavu lineárních rovnic.*

$$\begin{aligned} x + 3y + z &= 2, \\ 2x + 2y - z &= -1, \\ 2x + 5y + 3z &= 8. \end{aligned}$$

Příklad 38. *Vyřešte soustavu lineárních rovnic.*

$$\begin{aligned} x + 3y + z &= 2, \\ 2x + 2y + 6z &= -1, \\ 2x + 5y + 3z &= 8. \end{aligned}$$

Příklad 39. *Vyřešte soustavu lineárních rovnic.*

$$\begin{aligned} x + 3y + z &= 2, \\ 2x + 2y + 6z &= 20, \\ 2x + 5y + 3z &= 8. \end{aligned}$$

Příklad 40. *Určete neznámou x_2 ze SLR.*

$$\begin{aligned} -2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 &= 1, \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 3, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_4 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_4 &= 1. \end{aligned}$$

§ 6.4 Wolfram|Alpha

- Výpočet vlastních čísel matice.

```
eigenvalues{(0,0,0,16),(9/16,0,0,0),(0,3/4,0,0),(0,0,3/4,0)}
```

- Výpočet vlastních vektorů matice.

```
eigenvectors{(0,0,0,16),(9/16,0,0,0),(0,3/4,0,0),(0,0,3/4,0)}
```

Kapitola

7 Úvod k funkcím

§ 7.1 Definice a pojmy

Definice 21.

Nechť $D \neq \emptyset, D \subseteq \mathbb{R}$. Pravidlo f, které každému prvku $x \in D$ přiřadí právě jedno reálné číslo $y \in \mathbb{R}$, se nazývá *reálná funkce reálné proměnné*. Zapisujeme $y = f(x)$.

- Množina $D = D(f)$ se nazývá *definiční obor* funkce f.
- Množina všech $y \in \mathbb{R}$, pro která existuje $x \in D$ takové, že $f(x) = y$ se nazývá *obor hodnot* funkce f a značíme jej $H(f)$.
- x se nazývá *nezávisle proměnná* (argument) funkce f.
- y se nazývá *závisle proměnná* funkce f.
- Číslo $f(x_0) \in \mathbb{R}$ se nazývá *funkční hodnota* funkce f v bodě x_0.

Poznámka. Není-li definiční obor funkce zadán, jedná se o množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro která má daná funkce smysl.

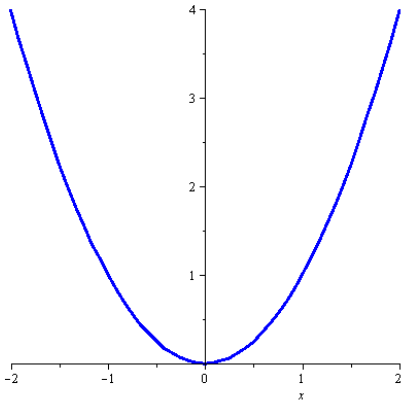
Příklad 41.

- *Definiční obor funkce* $f(x) = \frac{1}{x-1}$ *je* $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- *Definiční obor funkce* $g(x) = \sqrt{-x}$ *je* $D(g) = (-\infty, 0]$.

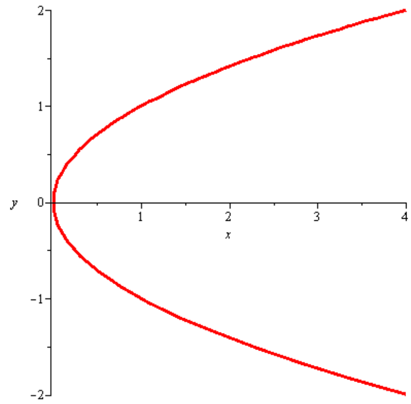
Definice 22.

Množina všech bodů roviny daných souřadnicemi $[x, f(x)]$ se nazývá *graf funkce* f.

Příklad 42. *Křivka na obr. 7.1 je grafem funkce, křivka na obr. 7.2 ne.*



Obr. 7.1: Funkce $f(x) = x^2$.



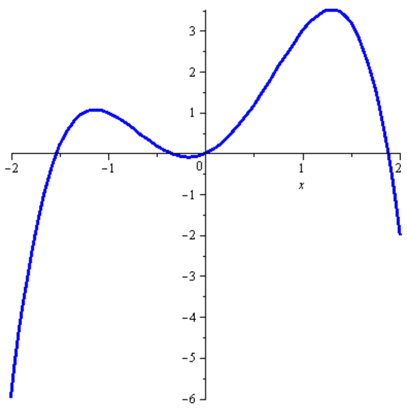
Obr. 7.2: Nejde o graf funkce.

Definice 23 (Ohraničenost)**.**

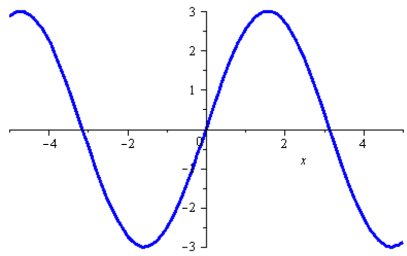
Buď f funkce a $M \subseteq D(f)$. Řekneme, že funkce f je na množině M

- zdola ohraničená, jestliže existuje $d \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí $f(x) \geq d$,
- shora ohraničená, jestliže existuje $h \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí $f(x) \leq h$,
- ohraničená, jestliže existují $d, h \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí $d \leq f(x) \leq h$.

Příklad 43. *Funkce na obr. 7.3 je ohraničená shora, na obr. 7.4 je ohraničené funkce.*



Obr. 7.3: Funkce ohraničená shora.



Obr. 7.4: Ohraničená funkce.

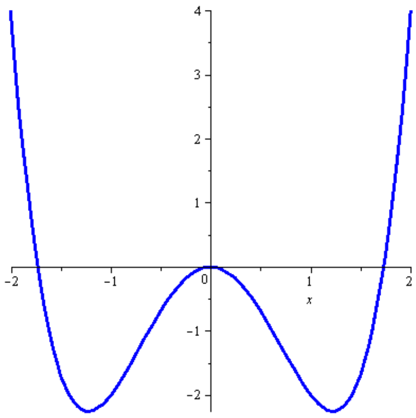
Definice 24 (Parita)**.**

Buď f taková funkce, že pro její definiční obor platí

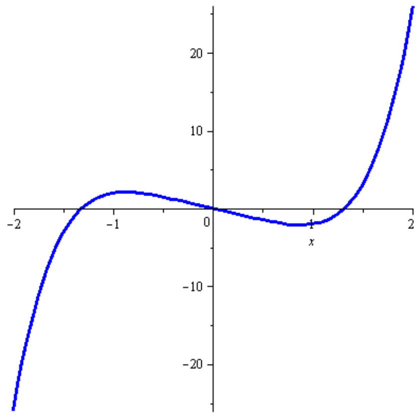
$$x \in D(f) \quad \Rightarrow \quad -x \in D(f).$$

- Řekneme, že funkce f je sudá, jestliže pro $\forall x \in D(f)$ platí, že
$$f(-x) = f(x).$$
- Řekneme, že funkce f je lichá, jestliže pro $\forall x \in D(f)$ platí, že
$$f(-x) = -f(x).$$

Příklad 44. *Funkce na obr. 7.5 je sudá, funkce na obr. 7.6 je lichá.*



Obr. 7.5: Graf sudé funkce je symetrický podle osy y.



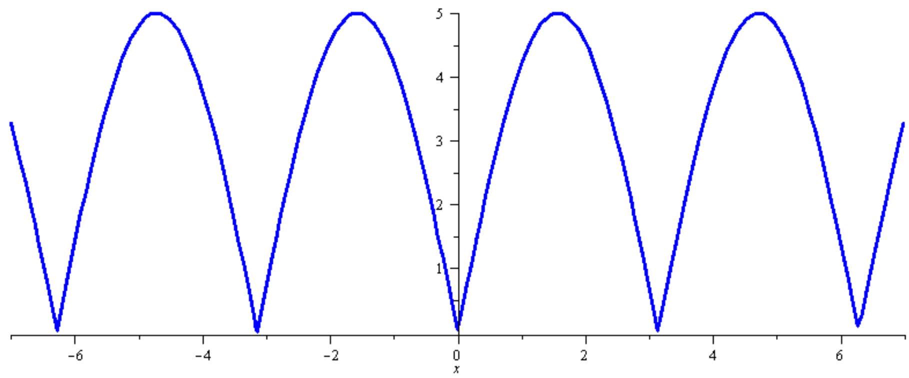
Obr. 7.6: Graf liché funkce je symetrický podle počátku.

Definice 25 (Periodičnost)**.**

Nechť $p \in \mathbb{R}, p > 0$. Řekneme, že funkce f je periodická s periodou p, jestliže pro $\forall x \in D(f)$ platí

$$x \pm p \in D(f), \qquad f(x \pm p) = f(x).$$

Příklad 45. *Funkce na obr. 7.7 je periodická s periodou π.*



Obr. 7.7: Periodická funkce.

Definice 26.

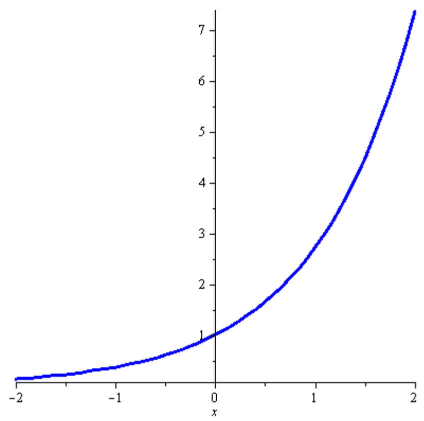
Buď f funkce a $M \subseteq D(f)$. Řekneme, že funkce f je na množině M

- *rostoucí*, jestliže
$$\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2),$$
- *neklesající*, jestliže
$$\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2),$$
- *klesající*, jestliže
$$\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2),$$
- *nerostoucí*, jestliže
$$\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2).$$

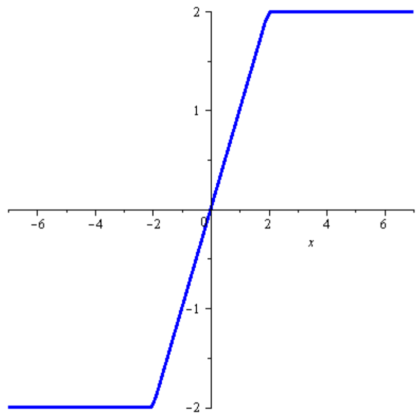
Definice 27.

Je-li funkce f na množině M neklesající, nebo nerostoucí, nazýváme ji *monotónní*. Je-li funkce f na množině M rostoucí, nebo klesající, nazýváme ji *ryze monotónní*.

Příklad 46. *Funkce na obr. 7.8 je rostoucí, funkce na obr. 7.9 je neklesající.*



Obr. 7.8: Rostoucí funkce.



Obr. 7.9: Neklesající funkce.

Další pojmy

Buď f funkce a $M \subseteq D(f)$.

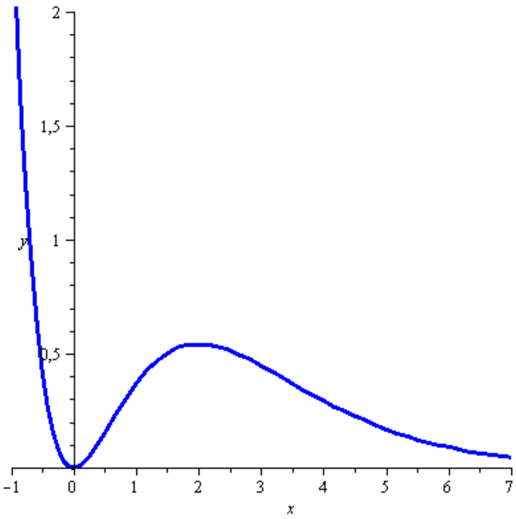
- Je-li $f(x) > 0$ pro $\forall x \in M$, řekneme, že f je na množině M *kladná*.
- Je-li $f(x) \geq 0$ pro $\forall x \in M$, řekneme, že f je na množině M *nezáporná*.
- Je-li $f(x) < 0$ pro $\forall x \in M$, řekneme, že f je na množině M *záporná*.
- Je-li $f(x) \leq 0$ pro $\forall x \in M$, řekneme, že f je na množině M *nekladná*.
- Bod $[0, f(0)]$ nazýváme *průsečík funkce f s osou y*.
- Je-li $f(x_0) = 0$, pak nazýváme bod $[x_0, 0]$ *průsečík funkce f s osou x*.

Následující pojmy budou přesněji definovány později

Buď f funkce a $M \subseteq D(f)$.

- Je-li graf funkce f pro $\forall x \in M$ nad tečnou sestrojenou v libovolném bodě $x_0 \in M$, řekneme, že f je na množině M *konvexní*.
- Je-li graf funkce f pro $\forall x \in M$ pod tečnou sestrojenou v libovolném bodě $x_0 \in M$, řekneme, že f je na množině M *konkávní*.
- Přímku nazýváme *asymptotou* grafu funkce f, jestliže se její vzdálenost od grafu funkce s rostoucí souřadnicí neustále zmenšuje.

Příklad 47. *Popište zobrazenou funkci pomocí výše uvedených pojmů.*

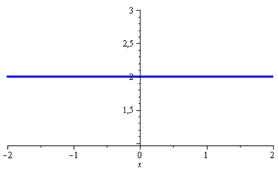


Kapitola 8 Polynomy

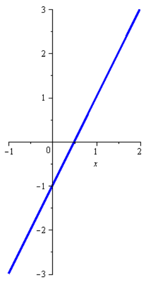
§ 8.1 Definice a operace s polynomy

Definice 28 (Polynom)**.**

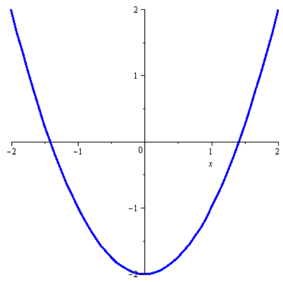
Funkci
$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
kde $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$ nazýváme *polynom stupně n*. Čísla $a_0, \ldots, a_n$ nazýváme koeficienty polynomu P. Koeficient a_n nazýváme vedoucí koeficient, koeficient a_0 nazýváme absolutní člen. Je-li $a_n = 1$ říkáme, že polynom P je normovaný.



Obr. 8.1: $P(x) = 2$.



Obr. 8.2: $P(x) = 2x - 1$.



Obr. 8.3: $P(x) = x^2 - 2$.

Protože základní operace s polynomy jsou dobře známé ze střední školy, připomeňme si je jen na příkladech. (Pro vzorce týkající se násobení a dělení mocninných funkcí viz § B.1.)

Příklad 48 (Sčítání a násobení konstantou)**.**

$$\begin{aligned}
&(3x^2 - 2x + 4) - 2(x^3 + x^2 + 2x - 1) \\
&= 3x^2 - 2x + 4 - 2x^3 - 2x^2 - 4x + 2 \\
&= -2x^3 + x^2 - 6x + 6
\end{aligned}$$

Příklad 49 (Násobení).

$$
\begin{aligned}
&(2x^2-3)(x^3+2x+3)\\
&=2x^2(x^3+2x+3)-3(x^3+2x+3)\\
&=2x^5+4x^3+6x^2-3x^3-6x-9\\
&=2x^5+x^3+6x^2-6x-9
\end{aligned}
$$

Příklad 50 (Dělení).

$$
\begin{array}{l}
(4x^4-x^3+x^2-3x+7):(x^2+2)=4x^2-x-7+\frac{-x+21}{x^2+2}\\
-\underline{(4x^4+8x^2)}\\
0-x^3-7x^2-3x+7\\
-\underline{(-x^3-2x)}\\
0-7x^2-x+7\\
-\underline{(-7x^2-14)}\\
0-x+21
\end{array}
$$

§ 8.2 Kořeny polynomu

Definice 29 (Kořen polynomu).

Číslo $x_0 \in \mathbb{C}$, pro které platí $P(x_0)=0$ nazýváme kořen polynomu P.

Věta 13.

Je-li číslo $x_0 \in \mathbb{C}$ kořen polynomu P, pak existuje polynom $Q(x)$ takový, že

$$P(x)=(x-x_0)Q(x).$$

Definice 30 (Kořenový činitel a násobný kořen).

Je-li číslo $x_0 \in \mathbb{C}$ kořen polynomu P, nazýváme lineární polynom $x-x_0$ *kořenový činitel* příslušný ke kořenu x_0. Číslo x_0 je k-násobným kořenem polynomu P, jestliže existuje polynom $G(x)$ takový, že

$$P(x)=(x-x_0)^kG(x), \quad G(x_0)\neq 0.$$

Věta 14 (Základní věta algebry)**.**

Polynom stupně n má právě n komplexních kořenů.

Poznámka.

- Je-li komplexní číslo $a+bi, a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$ kořenem polynomu P, pak je jeho kořenem i číslo komplexně sdružené $a - bi$.
- Počet reálných kořenů polynomu stupně n je buď n, nebo o sudý počet menší.
- Polynom lichého stupně má aspoň jeden reálný kořen.
- Polynomy jsou jediná kapitola, ve které budeme pracovat s komplexními čísly.

Věta 15 (Rozklad na součin kořenových činitelů)**.**

Každý polynom je v reálném oboru možné zapsat jako součin vedoucího koeficientu, kořenových činitelů a kvadratických polynomů s komplexními kořeny .

Věta 16 (Celočíselné kořeny)**.**

Nechť P je polynom s celočíselnými koeficienty. Pak jsou všechny jeho celočíselné kořeny dělitelé jeho absolutního člene.

Příklad 51.

$$P(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 + 21x - 18, \quad \textit{tedy } a_0 = -18.$$

Všechny celočíselné kořeny jsou tedy mezi děliteli čísla -18*:*

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18.$$

Skutečně

$$P(x) = (x-1)(x+2)(x-3)^2.$$

§ 8.3 Hornerovo schéma

Hornerovo schéma je algoritmus používaný při rozkladu polynomu na součin kořenových činitelů.

Věta 17.

Nechť jsou dány polynomy

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$Q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0.$$

Jestliže existují $\alpha, b_{-1} \in \mathbb{R}$ takové, že

$$P(x) = (x-\alpha)Q(x) + b_{-1},$$

pak

$$b_{n-1} = a_n, \qquad b_{k-1} = \alpha b_k + a_k, \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

Poznámka. $P(\alpha) = b_{-1}$, tedy je-li $b_{-1} = 0$, pak je α kořenem polynomu P.

Postup

Koeficienty polynomu $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ spolu s číslem α sepíšeme do tabulky

	a_n	a_{n-1}	$\cdots$	a_1	a_0
α	b_{n-1}	b_{n-2}	$\cdots$	b_0	b_{-1}

A dopočítáme čísla $b_{n-1}, \ldots, b_{-1}$:

$$b_{n-1} = a_n, \qquad b_{k-1} = \alpha b_k + a_k, \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

Tím získáme polynom $Q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0$ a číslo b_{-1} takové, že platí

$$P(x) = (x-\alpha)Q(x) + b_{-1}.$$

Příklad 52. *Rozložte polynom* $P(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 + 21x - 18$ *na součin kořenových činitelů. Celočíselné kořeny jsou mezi čísly* $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm9, \pm18$.

	1	-5	1	21	-18
1	1	-4	-3	18	‖0
1	1	-3	-6	12	–
-1	1	-5	2	16	–
2	1	-2	-7	4	–
-2	1	-6	9	‖0	–
⋮	⋮	⋮	⋮	–	–

✓ Našli jsme kořeny $1, -2$.

✓ $Q(x) = x^2 - 6x + 9$

✓ $P(x) = (x-1)(x+2)Q(x)$

Protože $Q(x)$ je kvadratický polynom, není nutné dál pokračovat v Hornerově schématu. Zbývající kořeny dopočítáme pomocí diskriminantu.

$$Q(x) = x^2 - 6x + 9 \quad \Rightarrow \quad D = 36 - 36 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{6 \pm 0}{2} = 3$$

Tedy polynom P má dva jednoduché kořeny $1, -2$ a jeden dvojnásobný kořen 3. Odtud

$$P(x) = (x-1)(x+2)(x-3)^2.$$

§ 8.4 Racionální lomená funkce

Definice 31.

Nechť je P_n polynom stupně n a Q_m polynom stupně m. Funkci tvaru

$$R(x) = \frac{P_n}{Q_m}$$

nazýváme racionální lomená funkce. Navíc funkci $R(x)$ označujeme jako

- ryze lomenou, jestliže $n < m$,
- neryze lomenou, jestliže $n \geq m$.

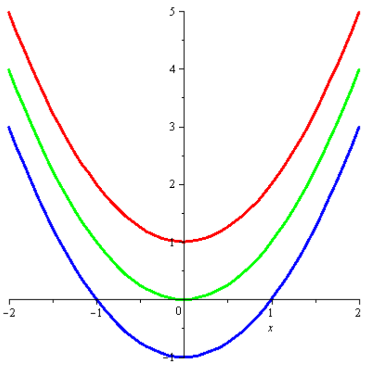
Věta 18.

Každou neryze lomenou funkci je možné (pomocí dělení polynomů) vyjádřit jako součet polynomu a ryze lomené racionální funkce.

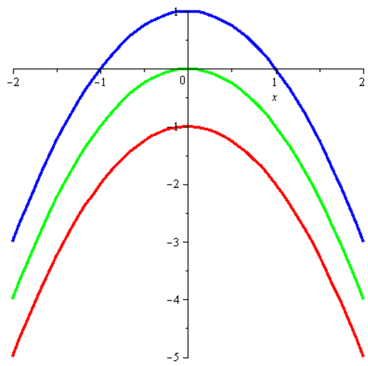
Kvadratický polynom $P(x) = ax^2 + bx + c$

- $D = b^2 - 4ac$,
- $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$,
- $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

- $D > 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 \neq x_2, \quad x_{1,2} \in \mathbb{R}$,
- $D = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2, \quad x_{1,2} \in \mathbb{R}$,
- $D < 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \bar{x}_2, \quad x_{1,2} \in \mathbb{C}$.



Obr. 8.4: $P(x) = ax^2 + bx + c, \ a > 0$.



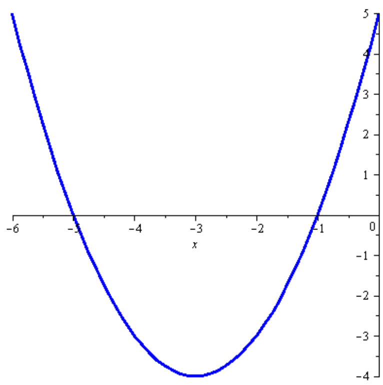
Obr. 8.5: $P(x) = ax^2 + bx + c, \ a < 0$.

Doplnění na čtverec

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + \tfrac{b}{a}x + \tfrac{c}{a}), \qquad x^2 + px + q = (x + \tfrac{p}{2})^2 - \tfrac{p^2}{4} + q.$$

Příklad 53. *Upravme kvadratický polynom $y = x^2 + 6x + 5$ doplněním na čtverec.*

$$\begin{aligned}
y &= x^2 + 6x + 5,\\
y &= (x+3)^2 - 9 + 5,\\
y &= (x+3)^2 - 4,\\
y &= (x+3)^2 - 4,\\
y + 4 &= (x+3)^2.
\end{aligned}$$



Tím jsme získali rovnici paraboly v tzv. vrcholovém tvaru, tedy ve tvaru $y - n = (x - m)^2$, kde bod $[m, n]$ je vrcholem dané paraboly. Naše parabola má tedy vrchol v bodě $[-3, -4]$ a protože koeficient u x^2 v základním tvaru je kladný, je otevřena směrem nahoru.

§ 8.5 Příklady k procvičení

Příklad 54. *Jsou dány polynomy*

$$\begin{aligned} P_1(x) &= 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x + 12, \\ P_2(x) &= 3x^3 - 4x^2 + 5x - 2, \\ P_3(x) &= 2x^2 - 3x + 1, \\ P_4(x) &= -5x^2 + 4x - 4. \end{aligned}$$

Spočtěte:

(i) $P_1(x) + P_2(x)$,

(ii) $3P_1(x) - 2P_2(x)$,

(iii) $P_3(x) \cdot P_4(x)$,

(iv) $2P_1(x) \cdot (3P_4 - P_2(x)) + P_3(x)$.

Příklad 55. *Proveďte dělení polynomů*

(i) $(2x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 10x - 3) : (x^4 - x^3 - x + 1)$,

(ii) $(3x^7 + 2x^3 - x + 5) : (2x^3 - 1)$.

Příklad 56. *Najděte všechny celočíselné kořeny daného polynomu a) dosazováním, b) Hornerovým schématem a rozložte ho na součin kořenových činitelů.*

(i) $P(x) = x^5 - 8x^3 - 6x^2 + 7x + 6$,

(ii) $Q(x) = x^6 - 2x^5 - 2x^4 + 8x^3 - 7x^2 + 2x$.

Příklad 57. *Pomocí Hornerova schématu rozhodněte, kolikanásobným kořenem polynomu*

(i) $P(x) = x^5 - 3x^4 - 9x^3 + 23x^2 + 24x - 36$ *je číslo* 3,

(ii) $G(x) = 3x^5 - 12x^4 + 13x^3 - 12x + 16$ *je číslo* 2.

Příklad 58. *Určete, zda je daná funkce ryze lomená. Pokud ano, zdůvodněte. Pokud ne, převeďte ji na součet polynomu a ryze lomené funkce.*

(i) $\frac{12x^6-3x^5-6x^2+x-2}{x^9+5x^2-4}$, *(ii)* $\frac{x^6+2x^5-2x^4+7x^2+2x}{x^3+1}$, *(iii)* $\frac{2x^9+12x^6-4x^2+5}{9x^9+2x^8-1}$.

Příklad 59. *Vyřešte kvadratickou rovnici a) v* $\mathbb{R}$, *b) v* $\mathbb{C}$.

(i) $2x^2 - x - 3 = 0$, *(ii)* $x^2 + 4x + 4 = 0$, *(iii)* $x^2 - 4x + 29 = 0$.

Příklad 60. *Určete, pro která* $x \in \mathbb{R}$ *je daný výraz a) kladný, b) nezáporný.*

(i) $2x^2 - x - 3$,

(ii) $x^2 + 4x + 4$,

(iii) $x^2 - 4x + 29$,

(iv) $\frac{1-x}{x+2}$,

(v) $\frac{1}{x}(x+1)^2(x-3)$,

(vi) $\frac{x^2+x-6}{2x^2+3x+1}$,

(vii) $\frac{x^2+x-6}{2x^2+3x-1}$.

Příklad 61. *Najděte průsečíky grafu funkce f se souřadnými osami.*

$$f(x) = \frac{(x-3)(x+5)}{x-1}.$$

Příklad 62. *Zjistěte, pro která x je daná funkce nezáporná.*

$$f(x) = \frac{x^2-2x-3}{1-3x}.$$

Příklad 63. *Rozhodněte, zda je daná RLF ryze lomená, či nikoli. Pokud není, převeďte ji na součet polynomu a ryze lomené RLF.*

$$R(x) = \frac{2x^4+3x^3-4x^2+x-5}{3x^3-2x+1}.$$

§ 8.6 Wolfram|Alpha

- Lineární kombinace polynomů.

```
4(2x^3-x^2+5x+7)-5(x^4+3x^3-6x^2-x+15)
```

- Násobení polynomů.

```
expand (x-3)(x+2)^2(x^2-x+1)
```

- Dělení polynomů.

```
quotient and remainder of (x^5+3x^4-2x^3-5x^2+4x-1)/(2x^2+x-3)
```

- Rozklad na součin.

```
factor x^5-8x^3-3x^2+4x-12
```

- Dosazení do polynomu.

```
{x^4+3x^3-6x^2-x+15, x=2}
```

- Kořeny polynomu.

```
roots of x^5+4x^4+x^3-2x^2-12x-72

solve x^5+4x^4+x^3-2x^2-12x-72=0
```

- Rovnice.

```
solve x^4-3x^4+2(x^3-x+1)=5(x-4)(x^2-2)
```

- Nerovnice.

```
solve (x^2+2x-3)/(x+1)>=0
```

Kapitola

9 Funkce

§ 9.1 Elementární funkce

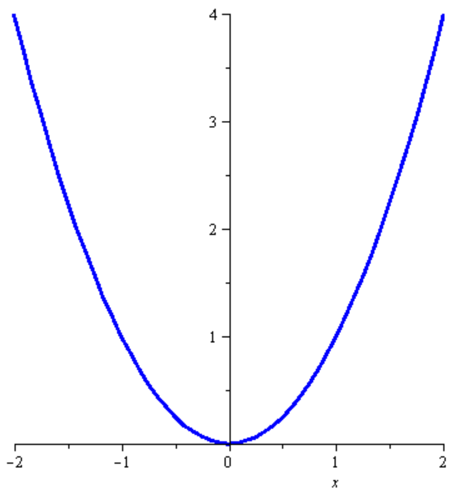
Definice 32 (Základní elementární funkce)**.**

Obecná mocnina, mnohočleny, goniometrické, cyklometrické, exponenciální a logaritmické (a hyperbolické a hyperbolometrické) funkce se nazývají *základní elementární funkce*.

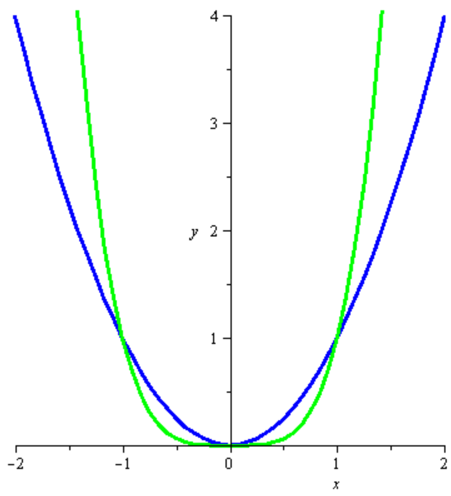
Definice 33 (Elementární funkce)**.**

Funkce, které lze získat konečným počtem sečtení, odečtení, vynásobení, podělení a složení základních elementárních funkcí se nazývají *elementární funkce*.

Grafem funkce $y = x^2$ je *parabola* (viz obr. 9.1), $\mathrm{D}(x^2) = \mathbb{R}$, $\mathrm{H}(x^2) = \mathbb{R}_0^+$, jde o sudou funkci. Jak se mění tvar grafu při zvyšující se mocnině je znázorněno na obr. 9.2.

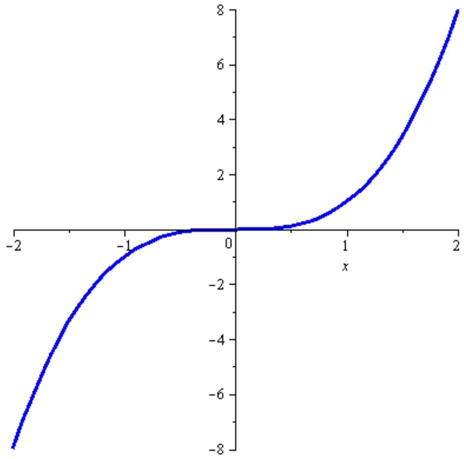


Obr. 9.1: x^2

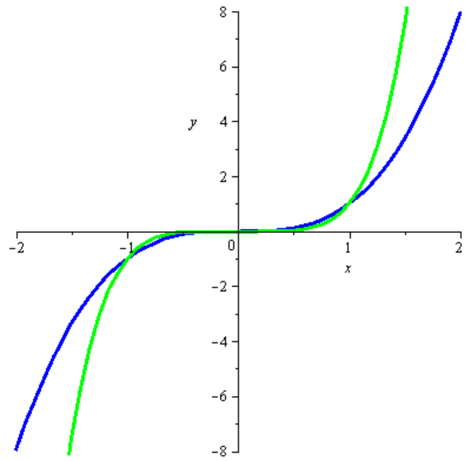


Obr. 9.2: x^2, x^4

Podobně jsou na obr. 9.3 a 9.4 znázorněny liché mocniny, které jsou typickými zástupci lichých funkcí. Dále je vidět, že $\mathrm{D}(x^3) = \mathbb{R}$ a $\mathrm{H}(x^3) = \mathbb{R}$.

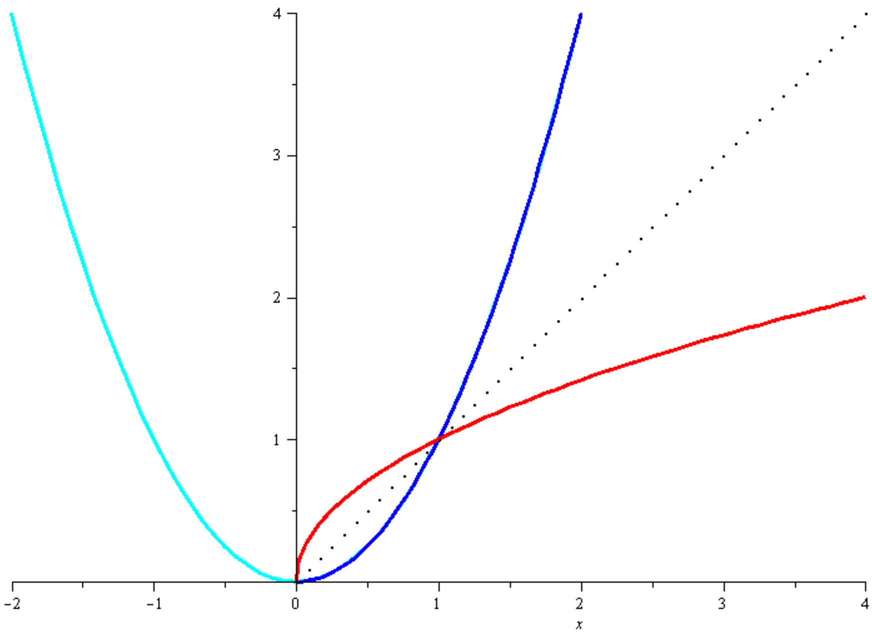


Obr. 9.3: x^3



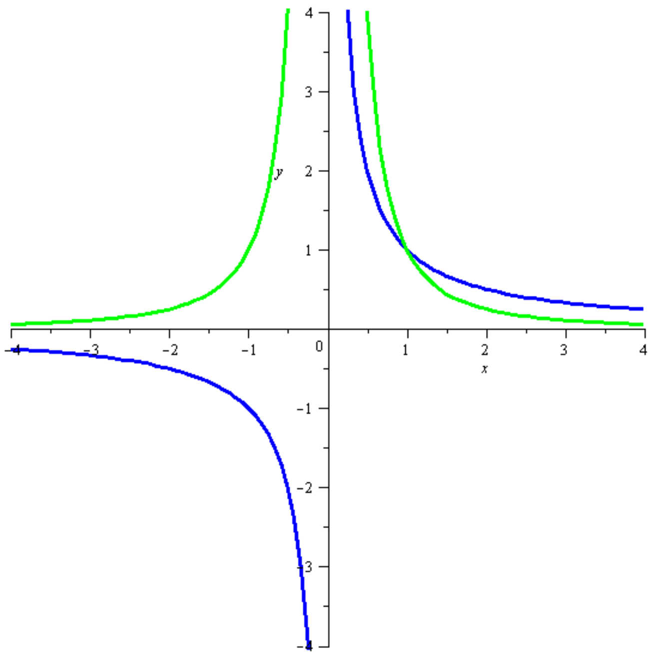
Obr. 9.4: x^3, x^5

Vznik odmocniny z prosté části grafu mocniny, jakožto její inverze, je zobrazen na obr. 9.5, kde je také vidět, že $\mathrm{D}(\sqrt{x}) = \mathrm{H}(\sqrt{x}) = \mathbb{R}_0^+$.



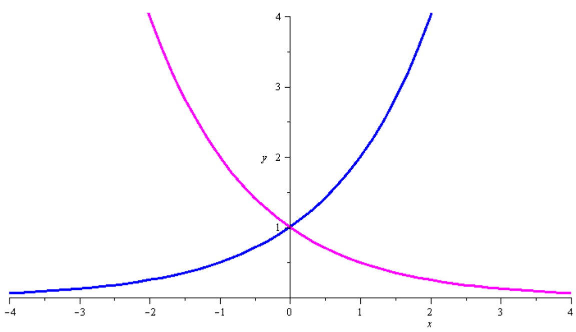
Obr. 9.5: x^2, $\sqrt{x}$

Grafem funkce $y = x^{-1}$ je *hyperbola*, je to funkce lichá, $\mathrm{D}(x^{-1}) = \mathrm{H}(x^{-1}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Oproti tomu je funkce $y = x^{-2}$ sudá, $\mathrm{D}(x^{-2}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a $\mathrm{H}(x^{-1}) = \mathbb{R}^+$ (viz obr. 9.6). Podobně pro vyšší mocniny.

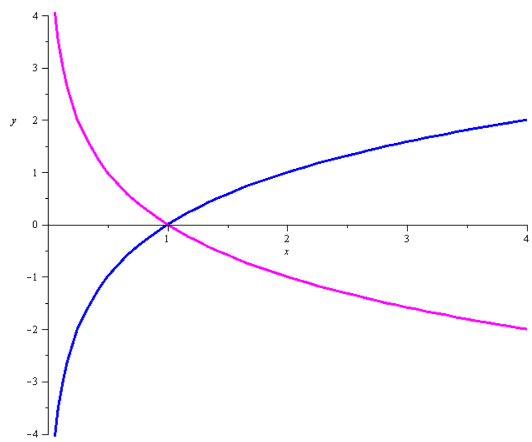


Obr. 9.6: $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$

Grafem exponenciální funkce $y = a^x, a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ (pro $a = 1$ funkce degeneruje na konstantní funkci) je *exponenciála*, $\mathrm{D}(a^x) = \mathbb{R}$ a $\mathrm{H}(a^x) = \mathbb{R}^+$. Funkce je na celém svém definičním oboru rostoucí jestliže $a > 1$ a klesající jestliže $a < 1$ (viz obr. 9.7).

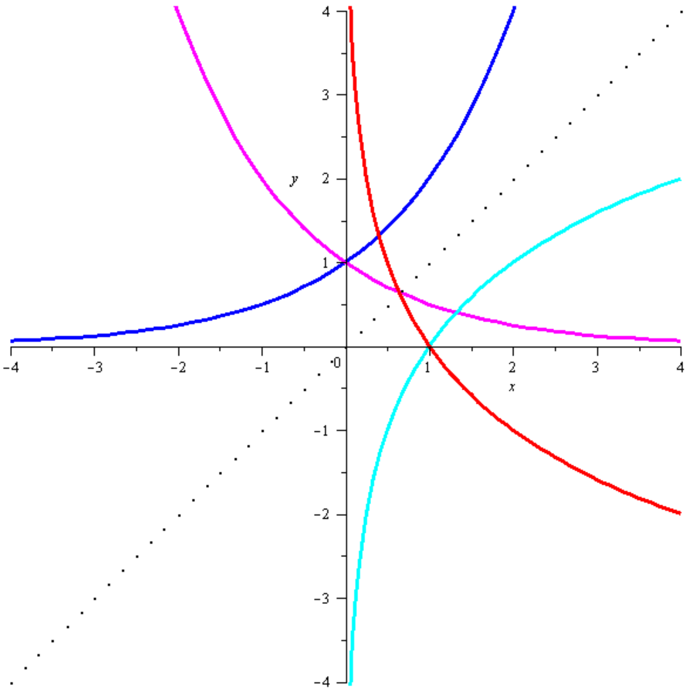


Obr. 9.7: 2^x, $\left(\frac{1}{2}\right)^x$



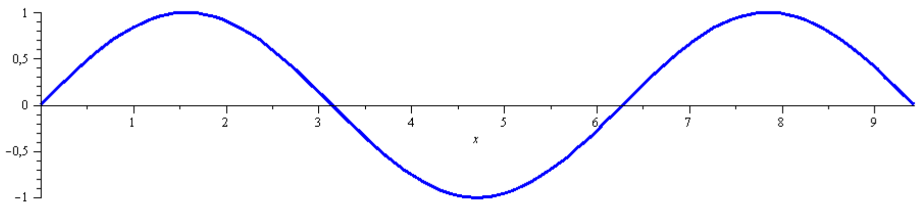
Obr. 9.8: $\log_2 x$, $\log_{\frac{1}{2}} x$

Inverzní funkcí k funkci exponenciální je logaritmus $y = \log_a x, a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, jehož grafem je *logaritmická křivka*, $\mathrm{D}(\log_a x) = \mathbb{R}^+$ a $\mathrm{H}(\log_a x) = \mathbb{R}$. Logaritmus je, stejně jako exponenciála, rostoucí, jestliže je jeho základ $a > 1$ a klesající jestliže $a < 1$. (Viz obr. 9.8 a 9.9). Připomeňme, že logaritmus o základu e (Eulerovo číslo) se nazývá přirozený logaritmus (logaritmus naturalis) a značí se $\ln x$.

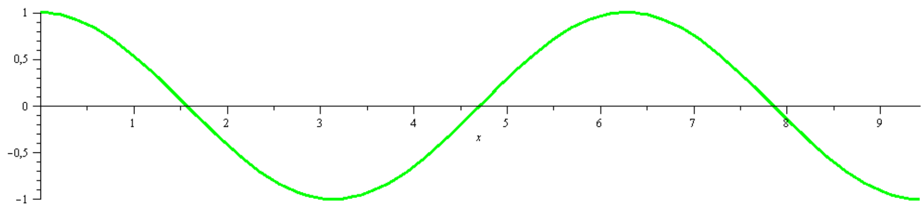


Obr. 9.9: 2^x, $\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $\log_2 x$, $\log_{\frac{1}{2}} x$

Mezi goniometrické funkce patří sinus, kosinus, tangens a kotangens. Všechny tyto funkce jsou periodické, přičemž sinus a kosinus s periodou 2π, tangens a kotangens s periodou π. Sinus, tangens a kotangens jsou funkce liché, kosinus je funkce sudá. Na obr. 9.10 a 9.11 vidíme,že $\mathrm{D}(\sin x) = \mathrm{D}(\cos x) = \mathbb{R}$ a $\mathrm{H}(\sin x) = \mathrm{H}(\cos x) = [-1, 1]$.

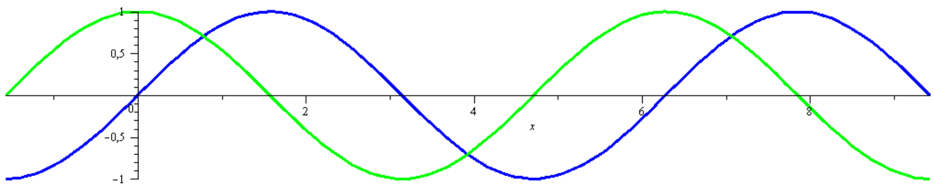


Obr. 9.10: $\sin x$



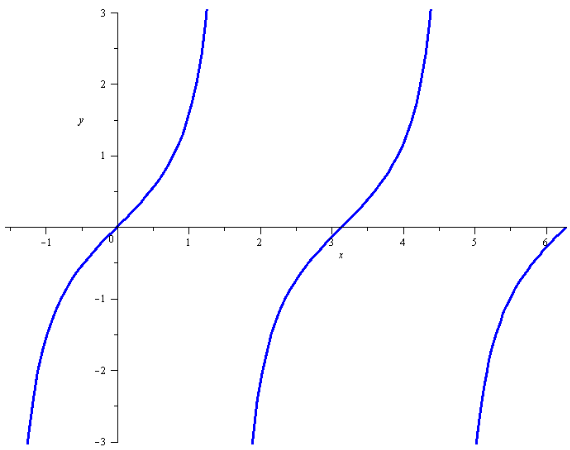
Obr. 9.11: $\cos x$

Dále na obr. 9.12 je vidět, že grafy sinu a kosinu jsou až na posunutí $\pi/2$ totožné.

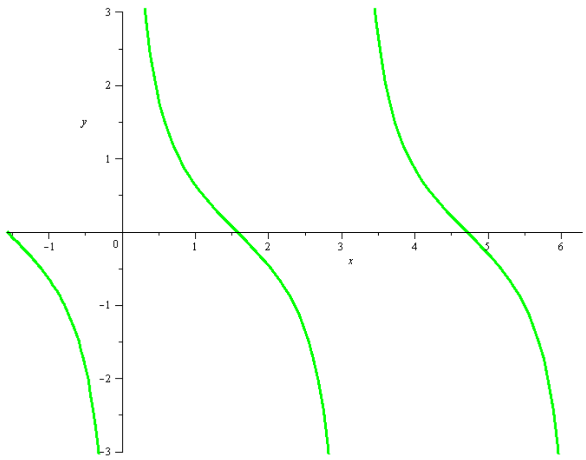


Obr. 9.12: $\sin x$, $\cos x$

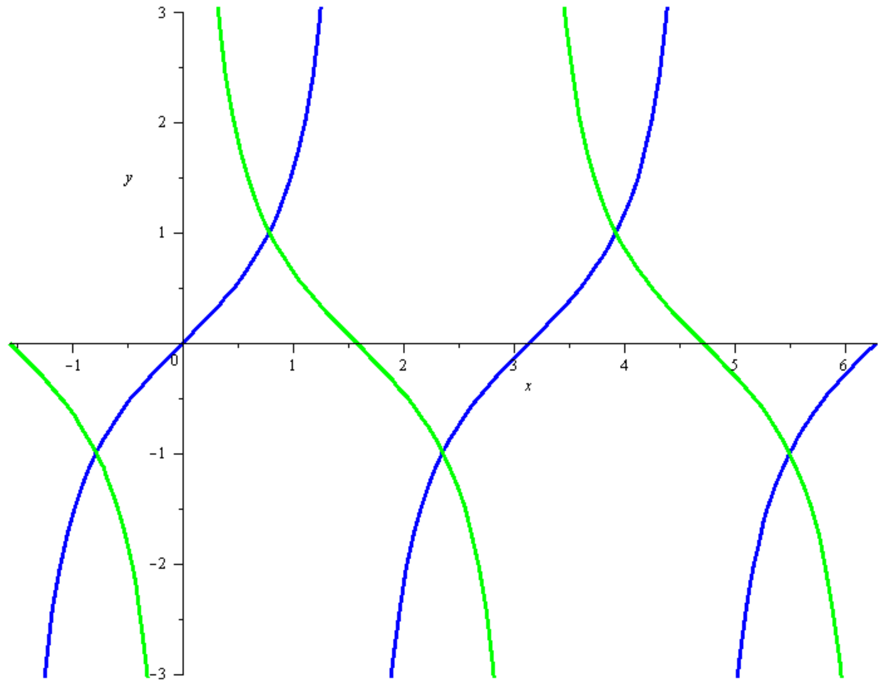
Funkce tangens a kotangens jsou zobrazeny na obr. 9.13 a 9.14 a podobnost jejich grafů je dobře patrná z obr. 9.15 (až na posunutí o $\pi/2$ a zrcadlení jsou totožné). Dále je vidět, že $\mathrm{D}(\operatorname{tg} x) = \mathbb{R}\setminus\{(2k+1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$ (všechna reálná čísla bez lichých násobků $\pi/2$), $\mathrm{D}(\operatorname{cotg} x) = \mathbb{R}\setminus\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ (všechna reálná čísla bez celočíselných násobků π) a $\mathrm{H}(\operatorname{tg} x) = \mathrm{H}(\operatorname{cotg} x) = \mathbb{R}$.



Obr. 9.13: $\operatorname{tg} x$

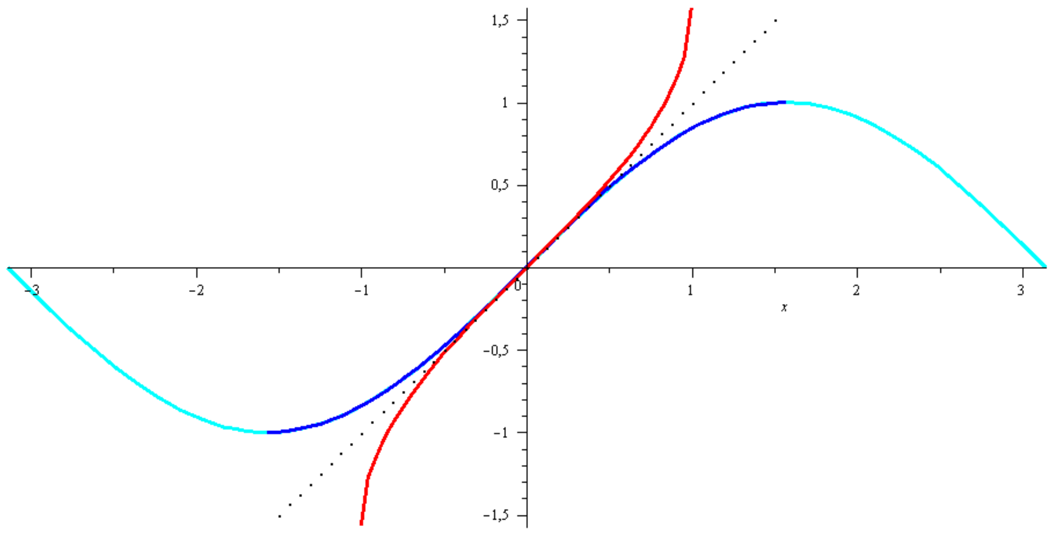


Obr. 9.14: $\operatorname{cotg} x$



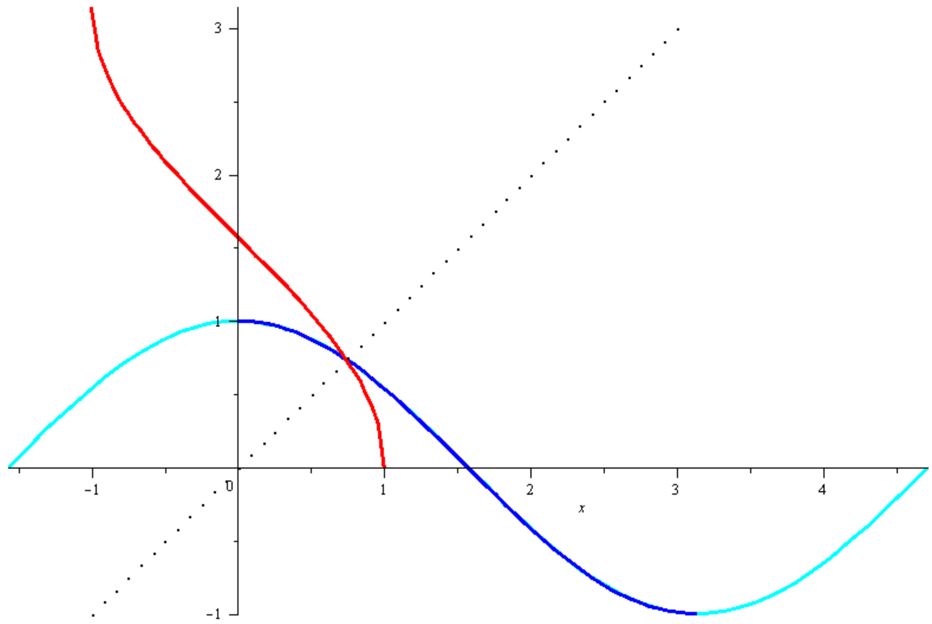
Obr. 9.15: $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$

Inverzní funkce k funkcím goniometrickým se nazývají cyklometrické a patří sem arkussinus, arkuskosinus, arkustangens a arkuskotangens. Jejich graf a vznik z příslušné prosté části grafu goniometrické funkce je zobrazen na obr. 9.16, 9.17, 9.18 a 9.19. Zdůrazněme, že funkce arkussinus je lichá, rostoucí a $\mathrm{D}(\arcsin x) = [-1, 1], \mathrm{H}(\arcsin x) = [-\pi/2, \pi/2]$.



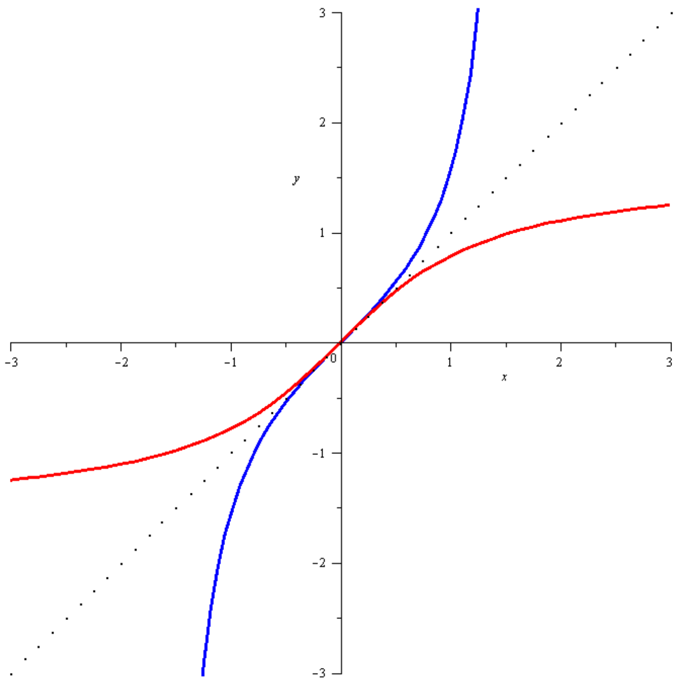
Obr. 9.16: $\sin x$, $\arcsin x$

Funkce arkuskosinus není ani lichá, ani sudá, je klesající a $\mathrm{D}(\arccos x) = [-1, 1], \mathrm{H}(\arccos x) = [0, \pi]$.



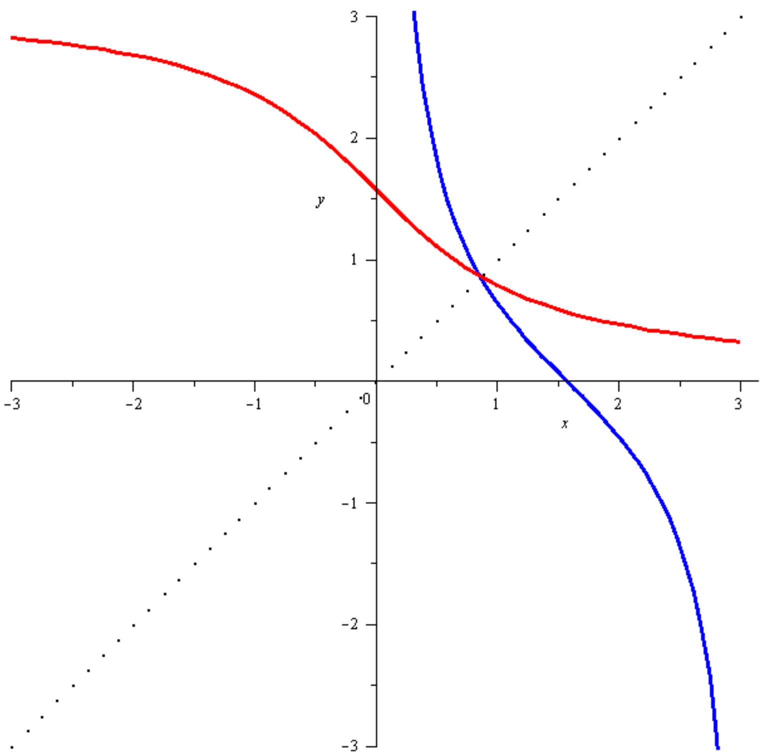
Obr. 9.17: $\cos x$, $\arccos x$

Funkce arkustangens je lichá, rostoucí a $\mathrm{D}(\operatorname{arctg} x) = \mathbb{R}, \mathrm{H}(\operatorname{arctg} x) = [-\pi/2, \pi/2]$.



Obr. 9.18: $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{arctg} x$

Funkce arkuskotangens není ani lichá, ani sudá, je klesající a $D(\operatorname{arccotg} x) = \mathbb{R}$, $H(\operatorname{arccotg} x) = [0, \pi]$.



Obr. 9.19: $\operatorname{cotg} x$, $\operatorname{arccotg} x$

§ 9.2 Operace s funkcemi

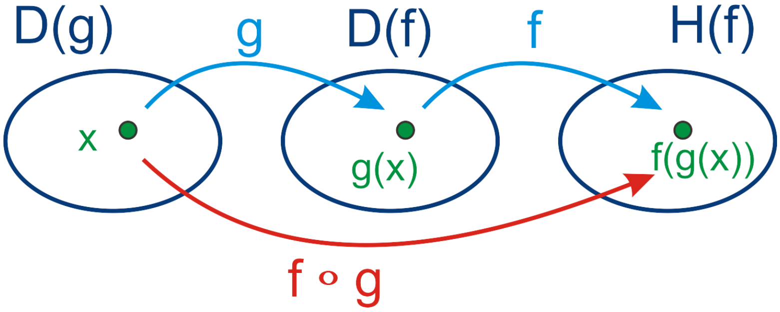
Operace s funkcemi

- Platí
$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x),$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$
Definiční obor těchto funkcí je průnikem definičních oborů původních funkcí, tj. $D(f \pm g) = D(f) \cap D(g) = D(f \cdot g)$.
- Platí
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$
Definiční obor nové funkce je průnikem definičních oborů funkcí f a g zmenšený o body, v nichž je $g(x) = 0$, tj.
$$D\left(\frac{f}{g}\right) = D(f) \cap D(g) \setminus \{x : g(x) = 0\}.$$

Další operací je skládání funkcí.

Definice 34 (Složená funkce)**.**

Nechť $u = g(x)$ je funkce s definičním oborem $D(g)$ a oborem hodnot $H(g)$. Nechť $y = f(u)$ je funkce s definičním oborem $D(f) \supseteq H(g)$.
Složenou funkcí $(f \circ g)(x)$ rozumíme přiřazení, které $\forall x \in D(g)$ přiřadí $y = f(u) = f\big(g(x)\big)$. Funkci g nazýváme vnitřní složkou a funkci f vnější složkou složené funkce.



Obr. 9.20: Složená funkce.

Příklad 64. • *Funkce*

$$F(x) = \sin x^2$$

je složena z funkcí $f(x) = \sin x$ *a* $g(x) = x^2$ *tak, že*

$$F(x) = (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big).$$

- *Funkce*

$$G(x) = \sqrt[3]{\mathrm{e}^{2x-4}}$$

je složena z funkcí $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = \mathrm{e}^x$, $h(x) = 2x - 4$ *tak, že*

$$G(x) = (f \circ g \circ h)(x) = f\Big(g\big(h(x)\big)\Big).$$

Poznámka. Při určování definičních oborů složených funkcí je vhodné postupovat zevnitř. Každý definiční obor je průnikem všech získaných podmínek. Např. je-li $F(x) = \sqrt{f(x)}$, najdeme nejprve $D(f)$, poté zjistíme, ve kterých bodech je $f(x) < 0$ a ty odstraníme, tj.

$$D(F) = D(f) \setminus \{x : f(x) < 0\}.$$

Tedy mimo definiční obory základních funkcí musíme brát v úvahu např. u funkce

- $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, že $g(x) \neq 0$,
- $F(x) = \sqrt{f(x)}$, že $f(x) \geq 0$,
- $F(x) = \log_a f(x)$, že $f(x) > 0$,
- $F(x) = \operatorname{tg} f(x)$, že $f(x) \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$,
- $F(x) = \operatorname{cotg} f(x)$, že $f(x) \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,
- $F(x) = \arcsin f(x)$, že $f(x) \in [-1, 1]$,
- $F(x) = \arccos f(x)$, že $f(x) \in [-1, 1]$.

§ 9.3 Inverzní funkce

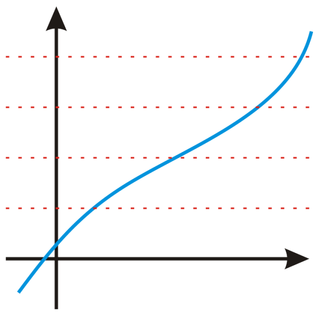
Definice 35 (Prostá funkce)**.**

Nechť f je funkce a $M \subseteq D(f)$. Řekneme, že funkce f je na množině M *prostá*, jestliže pro každou dvojici $x_1, x_2 \in M$ platí

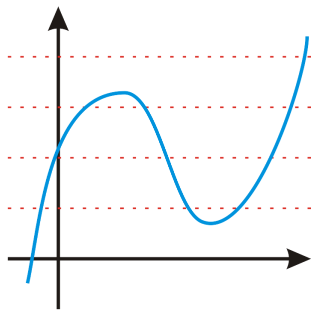
$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Poznámka. Platí následující tvrzení.

- Graf prosté funkce protíná všechny vodorovné přímky nejvýše jednou.



Obr. 9.21: Zobrazená funkce je prostá.

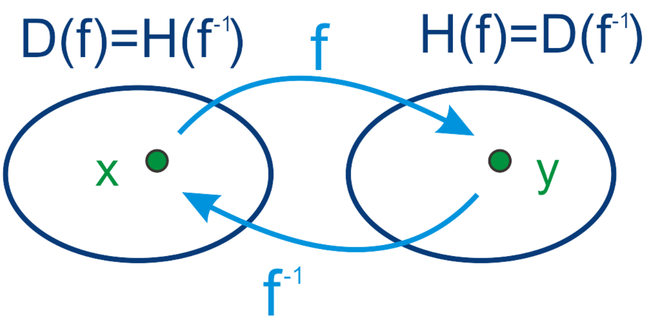


Obr. 9.22: Zobrazená funkce není prostá.

- Je-li funkce na množině M ryze monotónní, pak je na ní prostá.

Definice 36 (Inverzní funkce)**.**

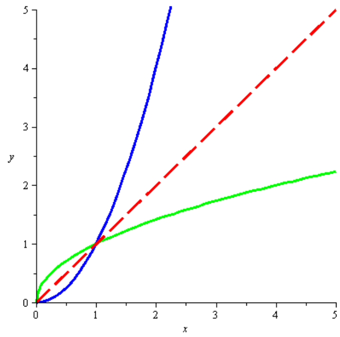
Nechť f je prostá funkce. Funkci f^{-1}, která každému $y \in H(f)$ přiřazuje právě to x, pro které platí $y = f(x)$, se nazývá inverzní funkcí k funkci f. Píšeme $x = f^{-1}(y)$.



Obr. 9.23: Inverzní funkce.

Platí

- $D(f^{-1}) = H(f)$, $H(f^{-1}) = D(f)$,
- $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.
- Grafy funkcí f a f^{-1} jsou symetrické podle osy I. a III. kvadrantu (přímky $y = x$).
- Je-li funkce f rostoucí/klesající, je také funkce f^{-1} rostoucí/klesající.



Obr. 9.24: Graf inverzní funkce.

Výpočet inverzní funkce

Iverzní funkci k funkci f určíme tak, že v předpisu $y = f(x)$ zaměníme proměnné x a y, tím dostaneme $x = f(y)$. Z této rovnice pak vyjádříme, je-li to možné, proměnnou y.

K elementární funkci je inverzní funkcí jiná elementární funkce:

$f(x)$	$f^{-1}(x)$
$x^2 \quad (x \geq 0)$	$\sqrt{x}$
$x^2 \quad (x \leq 0)$	$-\sqrt{x}$
x^3	$\sqrt[3]{x}$
e^x	$\ln x$
$a^x \quad (a \neq 1)$	$\log_a x$
$\sin x \quad (x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$	$\arcsin x$
$\cos x \quad (x \in [0, \pi])$	$\arccos x$
$\operatorname{tg} x \quad (x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))$	$\operatorname{arctg} x$
$\operatorname{cotg} x \quad (x \in (0, \pi))$	$\operatorname{arccotg} x$

Poznámka. Pro všechna x, pro která má zápis smysl, platí

$$(f \circ f^{-1})(x) = x = (f^{-1} \circ f)(x).$$

Příklad 65. *Určete inverzní funkci k funkci f a určete $D(f)$, $H(f)$, $D(f^{-1})$ a $H(f^{-1})$.*

a) $f(x) = \frac{3x-4}{2}$, b) $f(x) = \mathrm{e}^{\sin x}$.

a) $f(x) = \frac{3x-4}{2}$

$$y = \frac{3x-4}{2} \quad \rightsquigarrow \quad x = \frac{3y-4}{2}$$

$$2x = 3y - 4$$

$$3y = 2x + 4$$

$$y = \frac{2x+4}{3} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x) = \frac{2x+4}{3}.$$

$D(f) = H(f) = D(f^{-1}) = H(f^{-1}) = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \mathrm{e}^{\sin x}$

$$y = \mathrm{e}^{\sin x} \quad \rightsquigarrow \quad x = \mathrm{e}^{\sin y} \quad / \ln(\cdot)$$
$$\ln x = \sin y \quad / \arcsin(\cdot)$$
$$\arcsin \ln x = y \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x) = \arcsin \ln x.$$

$D(f) = \mathbb{R}$, funkce f je prostá pro $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] = H(f^{-1})$
$D(f^{-1})$:

- ▷ $\ln x \Rightarrow x > 0 \Rightarrow x \in (0, \infty)$
- ▷ $\arcsin \ln x \quad \Rightarrow \quad \ln x \in [-1, 1]$

$$-1 \le \ln x \le 1 \quad / \, \mathrm{e}^{(\cdot)} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{-1} \le x \le \mathrm{e} \quad \Rightarrow \quad x \in \left[\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}\right]$$

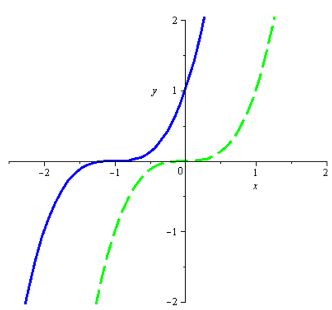
$D(f^{-1}) = (0, \infty) \cap \left[\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}\right] = \left[\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}\right]$.
Celkem tedy $H(f) = D(f^{-1}) = \left[\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}\right]$.

§ 9.4 Transformace grafu funkce

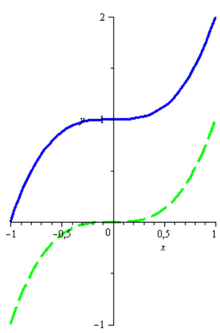
Transformace grafu funkce

Nechť je dána funkce $y = f(x)$ a nenulová reálná čísla a, b.

- Uvažujme funkci $\tilde{y} = f(x + a)$. Tato funkce má vůči původní funkci graf posunutý buď doleva (je-li $a > 0$), nebo doprava (pro $a < 0$), a to o velikost čísla a.
- Uvažujme funkci $\hat{y} = f(x) + b$. Tato funkce má vůči původní funkci graf posunutý buď nahoru (je-li $b > 0$), nebo dolů (pro $b < 0$), a to o velikost čísla b.



Obr. 9.25: $f(x) = (x + 1)^3$



Obr. 9.26: $f(x) = x^3 + 1$

§ 9.5 Příklady k procvičení

Příklad 66. *Načrtněte graf funkce.*

(i) $y = x^2$,

(ii) $y = -x^2$,

(iii) $y = (-x)^2$,

(iv) $y = (x+1)^2$,

(v) $y = x^2 + 1$,

(vi) $y = (1-x)^3$.

Příklad 67. *Načrtněte graf funkce.*

(i) $y = 2 - \sqrt{x}$,

(ii) $y = \frac{1}{3-x} - 1$,

(iii) $y = \ln(x-3)$,

(iv) $y = 2 + \mathrm{e}^{1-\mathrm{x}}$.

Příklad 68. *Načrtněte graf funkce.*

(i) $y = \sin x$,

‡*(ii)* $y = \sin(3x)$,

‡*(iii)* $y = \sin \frac{x}{5}$,

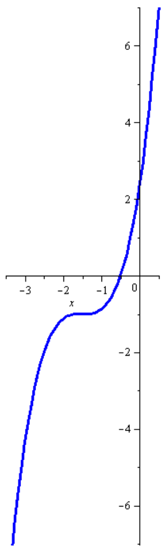
‡*(iv)* $y = 2\sin x$,

(v) $y = \sin(x-1)$,

(vi) $y = 3 + \sin x$,

‡*(vii)* $y = \mathrm{tg}(3x)$.

Příklad 69. *K danému grafu vyberte správný funkční předpis.*



a) $\mathrm{tg}(x + \frac{\pi}{2}) - 1$,

b) $(x + 1,5)^3 - 1$,

c) $\frac{1}{x+1,5} - 1$,

d) $-\mathrm{cotg}(x + \frac{\pi}{2}) + 1$,

e) $(x - 1,5)^3 + 1$.

Příklad 70. *Určete definiční obor funkce.*

(i) $f(x) = \frac{1}{x+2}$,

(ii) $f(x) = \sqrt{3-x}$,

(iii) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+3}}$,

(iv) $f(x) = \frac{3}{\mathrm{e}^{1-x}}$,

(v) $f(x) = \frac{\ln x}{2x^2+3x-2}$,

(vi) $f(x) = \frac{1}{\sin x}$,

(vii) $f(x) = \mathrm{tg}(x-1)$,

(viii) $f(x) = \frac{3x}{2x-8} + \sqrt{10-x} - \ln(x+2)$.

Příklad 71. *Jsou dány funkce* $f(x) = x^2, g(x) = \frac{2x}{1-x}$ *a* $h(x) = \ln x$*. Určete složené funkce*

(i) $f \circ g$, *(ii)* $g \circ f$, *(iii)* $f \circ g \circ h$, *(iv)* $f \circ h \circ f$.

Příklad 72. *Určete složky dané funkce.*

(i) $y = \operatorname{cotg}^5 x$, *(iii)* $y = \cos x^7$,

(ii) $y = \sqrt[3]{\sin(x^3+3)}$, *(iv)* $y = \log_2 \sqrt{\operatorname{tg}(2+x)}$.

Příklad 73. *Funkci* $y = \sin \frac{1}{5^x}$ *lze považovat za složeninu dvou, nebo tří základních funkcí. Kterých? (Popište obě možnosti.)*

Příklad 74. *K dané funkci* f *určete funkci inverzní a načrtněte grafy obou funkcí.*

(i) $f(x) = 2x + 1$, *(iii)* $f(x) = \log_3(x-2)$,

(ii) $f(x) = \frac{2x^2-1}{3}$, *(iv)* $f(x) = \frac{1}{5^x}$.

Příklad 75. *Popište vlastnosti cyklometrických funkcí (*arcsin, arccos, arctg *a* arccotg*) a jejich vznik jakožto inverzí.*

Příklad 76. *Určete a nakreslete funkci inverzní k funkci* $f:\ y = 2x^3 - 1$.

Příklad 77. *Určete definiční obor dané funkce.*

(i) $f(x) = \ln(x^2+4x-5) + \frac{2x^2}{\sqrt{2x+6}}$, *(ii)* $g(x) = \arcsin \frac{x+3}{2} + \sqrt{\frac{x+4}{x-2}}$.

Příklad 78. *Určete definiční obor funkce*

$$f:\ y = \operatorname{arccotg} \frac{x-1}{\sqrt{1-x}} + \log_{\frac{1}{3}}^{-2}(2x+21).$$

Příklad 79. *Načrtněte graf funkce*

$$f(x) = 2 - \arcsin(x+1).$$

Příklad 80. *Určete definiční obor funkce*

$$f(x) = \ln \frac{x-1}{2+x} - \arcsin \frac{x}{4}.$$

Příklad 81. *Určete definiční obor dané funkce.*

$$f(x) = \sqrt{1-x} + \frac{1}{x}, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} - \ln x.$$

Příklad 82. *Rozhodněte, zda je daná funkce sudá, nebo lichá.*

$$f(x) = \frac{3x^2-2}{x^3}, \quad g(x) = \cos x - \sin x^2 - 2\sin^2 x,$$

$$h_1(x) = x^3 + 2x^2 - x + 4, \quad h_2(x) = \ln(x-3).$$

§ 9.6 Wolfram|Alpha

- Definiční obor funkce.

```
domain of sqrt(x+2)/(x-1)
```

- Obor hodnot funkce.

```
range of x^2-5x+3
```

- Graf funkce.

```
plot y=x^3-1 for x from -2 to 2.5
```

```
plot y=tan(x) for x from -pi to 2pi and y from -10 to 10
```

- Inverzní funkce.

```
inverse of x^5
```

- Průsečíky grafů funkcí.

```
intersections of y=3x^2+x-4 and y=2x+6
```

Kapitola

10 Limita funkce

§ 10.1 Okolí bodu

Definice 37 (Okolí bodu)**.**

Libovolný otevřený interval $I \in \mathbb{R}$ obsahující bod $x_0 \in \mathbb{R}$ nazýváme *okolí bodu* x_0 označíme jej $\mathcal{O}(x_0)$.

Speciální typy okolí bodu

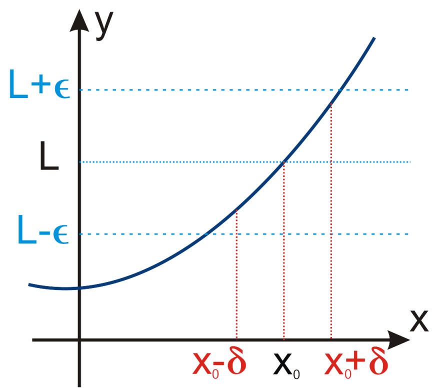
- δ-okolí bodu x_0
$$\mathcal{O}_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$
- Prstencové (ryzí) δ-okolí bodu x_0
$$\widehat{\mathcal{O}}_\delta(x_0) = \mathcal{O}_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta).$$
- Levé a pravé δ-okolí bodu x_0
$$\mathcal{O}_\delta^-(x_0) = (x_0 - \delta, x_0], \qquad \mathcal{O}_\delta^+(x_0) = [x_0, x_0 + \delta).$$
- Levé a pravé prstencové δ-okolí bodu x_0
$$\widehat{\mathcal{O}}_\delta^-(x_0) = (x_0 - \delta, x_0), \qquad \widehat{\mathcal{O}}_\delta^+(x_0) = (x_0, x_0 + \delta).$$

§ 10.2 Limita funkce

Definice 38 (Limita funkce)**.**

Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 *limitu* rovnu číslu L, jestliže pro $\forall \varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro $\forall x \in \widehat{\mathcal{O}}_\delta(x_0)$ platí $f(x) \in \mathcal{O}_\varepsilon(L)$. Píšeme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L, \qquad \text{popř.} \qquad f(x) \xrightarrow{x \to x_0} L.$$



Obr. 10.1: Limita funkce.

Nepřesně, ale ilustrativně:

"Je-li x blízko x_0, pak je $f(x)$ blízko L."

Definice 39 (Jednostranné limity)**.**

Použijeme-li v definici limity $\widehat{\mathcal{O}}_\delta^+(x_0)$ místo $\widehat{\mathcal{O}}_\delta(x_0)$, získáme definici *limity zprava*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L.$$

Podobně, použijeme-li v definici limity $\widehat{\mathcal{O}}_\delta^-(x_0)$ místo $\widehat{\mathcal{O}}_\delta(x_0)$, získáme definici *limity zleva*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L.$$

Věta 19 (Jednoznačnost)**.**

Funkce má v každém bodě nejvýše jednu limitu / limitu zprava / limitu zleva.

Definice 40 (Rozšířená množina reálných čísel).

Rozšířenou množinou reálných čísel $\mathbb{R}^*$ rozumíme množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ rozšířenou o body $-\infty$ a $+\infty$, tj

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Body $\pm\infty$ nazýváme nevlastní body, zatímco body množiny $\mathbb{R}$ nazýváme vlastní body.

Pro $a \in \mathbb{R}$ definujeme:

- $a + \infty = \infty$,
- $a - \infty = -\infty$,
- $\infty + \infty = \infty$,
- $-\infty - \infty = -\infty$,
- $\infty \cdot \infty = \infty$,
- $(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$,
- $\infty \cdot (-\infty) = -\infty$,
- $|\pm\infty| = \infty$,
- $\frac{a}{\pm\infty} = 0$.

- Je-li $a > 0$, pak $a \cdot \infty = \infty, a \cdot (-\infty) = -\infty$.
- Je-li $a < 0$, pak $a \cdot \infty = -\infty, a \cdot (-\infty) = \infty$.

Poznámka. Nejsou definovány výrazy

$$\infty - \infty, \quad \pm\infty \cdot 0, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}.$$

Tyto výrazy nazýváme *neurčité výrazy*.
Samozřejmě není definováno dělení nulou.

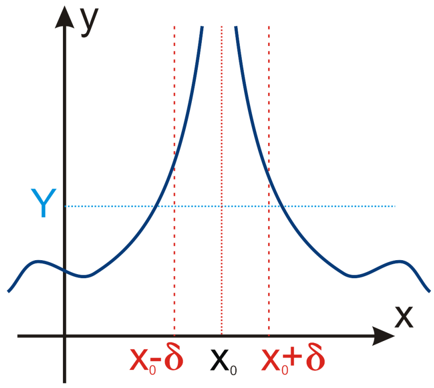
Definice 41 (Okolí nevlastního bodu).

Okolím $\mathcal{O}(\infty)$ bodu ∞ rozumíme libovolný interval tvaru $(a, \infty), a \in \mathbb{R}$, a podobně okolím bodu $-\infty$ interval tvaru $(-\infty, a)$. Ryzím okolím nevlastních bodů rozumíme totéž, co okolím těchto bodů.

Použitím okolí nevlastních bodů v definici limity získáme definici tzv. *nevlastní* limity a limity *v nevlastním bodě*. Definice limity se pak pro tyto speciální případy zjednoduší.

Definice 42 (Nevlastní limita).

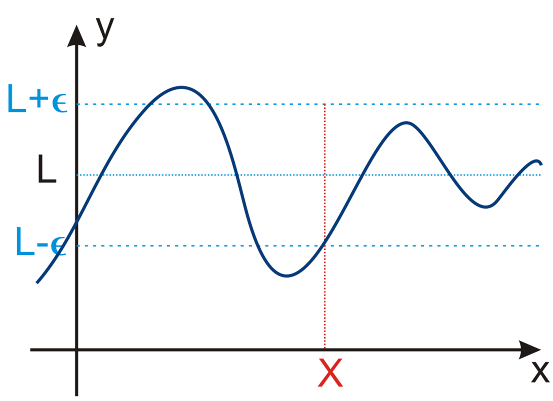
Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 *nevlastní limitu* $+\infty \quad (-\infty)$, jestliže pro $\forall Y > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro $\forall x \in \widehat{\mathcal{O}}_\delta(x_0)$ platí $f(x) > Y \quad (f(x) < -Y)$.



Obr. 10.2: Nevlastní limita.

Definice 43 (Limita v nevlastním bodě)**.**

Řekneme, že funkce f má limitu L v nevlastním bodě $+\infty \quad (-\infty)$, jestliže pro $\forall \varepsilon > 0$ existuje $X > 0$ takové, že pro $\forall x > X \quad (\forall x < -X)$ platí $f(x) \in \mathcal{O}_\varepsilon(L)$.



Obr. 10.3: Limita v nevlastním bodě.

Použité pojmy

Limitu

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

nazýváme

- *vlastní limita ve vlastním bodě*, jestliže $x_0, L \in \mathbb{R}$,
- *nevlastní limita ve vlastním bodě*, jestliže $x_0 \in \mathbb{R}, L \in \{\pm\infty\}$,
- *vlastní limita v nevlastním bodě*, jestliže $x_0 \in \{\pm\infty\}, L \in \mathbb{R}$,
- *nevlastní limita v nevlastním bodě*, jestliže $x_0, L \in \{\pm\infty\}$.

Věta 20 (Existence limity)**.**

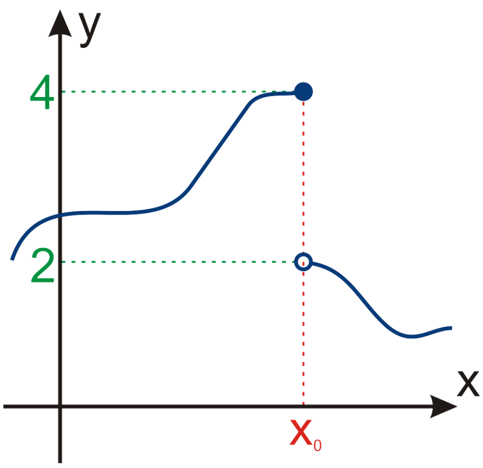
Funkce f má ve vlastním bodě x_0 limitu právě tehdy, když má v tomto bodě obě jednostranné limity a ty si jsou rovny, tj.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L.$$

Poznámka. Limita neexistuje, jestliže

- ▷ neexistuje některá (nebo obě) jednostranné limity,
- ▷ jednostranné limity jsou různé.

Toho lze výhodně využít při důkazu neexistence limity.

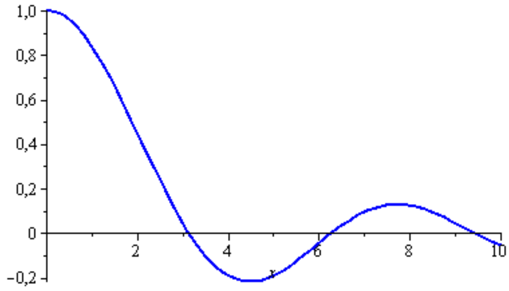


Obr. 10.4: Limita v x_0 neexistuje.

Není-li možné číslo do funkce dosadit jinak než “limitně”, můžeme představu o limitním chování funkce získat i empiricky a to dosazováním blízkých čísel. Podívejme se na chování funkce $\frac{\sin x}{x}$ pro $x \to 0^+$.

x	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$\frac{\sin x}{x}$	0,841470985	0,998334167	0,999983333	0,999999833	0,999999998

Z tabulky vidíme, že hodnoty se blíží jedničce. A skutečně $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$.

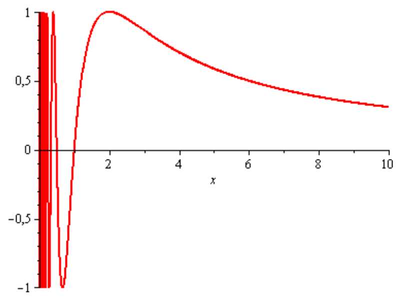


Obr. 10.5: Graf funkce $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

POZOR – nejde o neprůstřelnou metodu:

x	1	0,1	0,01	0,001	0,0001	$\cdots$
$\sin \frac{\pi}{x}$	0	0	0	0	0	$\cdots$

Přitom $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin \frac{\pi}{x}$ neexistuje.



Obr. 10.6: Graf funkce $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$.

(Zkuste dosazovat *náhodná* čísla blížící se k nule zprava.
Např. $\sin \frac{\pi}{0{,}003} \doteq -0,8660253055$.)

§ 10.3 Spojitost funkce

Definice 44 (Spojitost)**.**

- Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže
$$x_0 \in D(f) \quad \text{a} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$
- Řekneme, že funkce f je spojitá zleva v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže
$$x_0 \in D(f) \quad \text{a} \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$
- Řekneme, že funkce f je spojitá zprava v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže
$$x_0 \in D(f) \quad \text{a} \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Definice 45 (Spojitost na intervalu)**.**

Řekneme, že funkce je spojitá na intervalu I, je-li spojitá v každém jeho vnitřním bodě a v krajních bodech (pokud patří do I) je spojitá zleva, resp. zprava.

Definice 46 (Body nespojitosti)**.**

Body, ve kterých není funkce f spojitá, nazýváme *body nespojistosti*.

Poznámka. Elementární funkce jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru.

Věta 21 (Weierstrassova věta)**.**

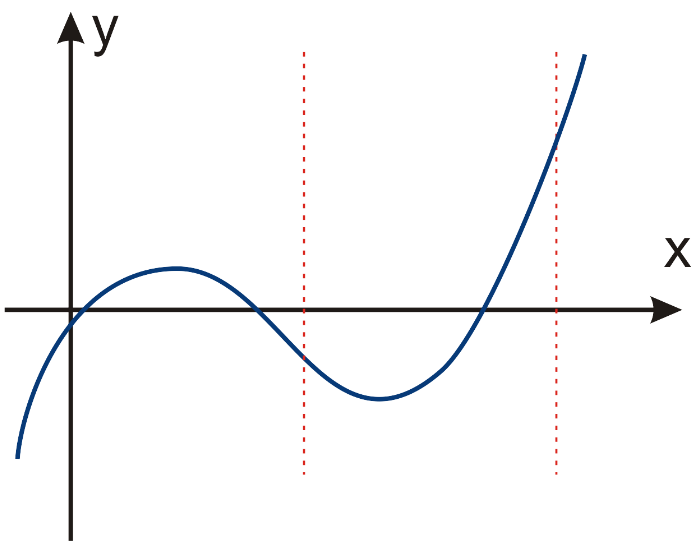
Nechť je funkce f spojitá na uzavřeném intervalu I. Pak je f na I ohraničená a nabývá zde své největší a nejmenší hodnoty.

Věta 22 (První Bolzanova věta)**.**

Nechť je funkce f spojitá na uzavřeném intervalu $I = [a, b]$ a nechť platí $f(a) \cdot f(b) < 0$. Pak existuje alespoň jedno číslo $c \in (a, b)$ takové, že $f(c) = 0$.

Věta 23 (Druhá Bolzanova věta)**.**

Nechť je funkce f spojitá na uzavřeném intervalu I. Pak f nabývá všech hodnot mezi svou největší a nejmenší hodnotou.



Obr. 10.7: Funkce spojitá na uzavřeném intervalu.

Věta 24 (Pravidla pro počítání s limitami)**.**

Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, $k \in \mathbb{R}$ a nechť $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Jestliže mají funkce f a g v bodě a limitu, pak platí

- $\lim\limits_{x \to a} k = k$,
- $\lim\limits_{x \to a} \bigl[f(x) \pm g(x)\bigr] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$,
- $\lim\limits_{x \to a} \bigl[f(x) \cdot g(x)\bigr] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$,
- $\lim\limits_{x \to a} \bigl[k \cdot f(x)\bigr] = k \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x)$,
- $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$, $\quad$ pro $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$.

Příklad 83.

- $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 + 3x) = 4 + 3 \cdot 2 = 10$,
- $\lim\limits_{x \to \infty} (\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$,
- $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} \cos x = -\infty \cdot 1 = -\infty$,
- $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x \cdot \mathrm{e}^x} = \frac{1}{\infty \cdot \infty} = 0$,
- $\lim\limits_{x \to 0^+} (\frac{1}{x} + \ln x) = \infty - \infty =$ *neurčitý výraz.*

Věta 25 (Limita složené funkce)**.**

Je-li funkce f spojitá, pak platí

$$\lim_{x \to x_0} f\bigl(g(x)\bigr) = f\bigl(\lim_{x \to x_0} g(x)\bigr).$$

Poznámka. Při výpočtech limit vždy nejprve dosadíme $x = x_0$.

Příklad 84.

- $\lim_{x \to 0^+} \ln \frac{1}{x} = \bigl\|\ln \infty\bigr\| = \infty$,
- $\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} \mathrm{e}^{-x} = \bigl\|\operatorname{arctg} \mathrm{e}^{+\infty} = \operatorname{arctg} \infty\bigr\| = \frac{\pi}{2}$,
- $\lim_{x \to 0^+} \ln \sin x = \bigl\|\ln 0^+\bigr\| = -\infty$,
- $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{\sin x} = \bigl\|\frac{1}{\sin 0^-} = \frac{1}{0^-}\bigr\| = -\infty$,
- $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sin x} = \bigl\|\frac{1}{\sin 0^+} = \frac{1}{0^+}\bigr\| = \infty$.

§ 10.4 Výpočet limit

Věta 26.

Jestliže pro všechna $x \in \widehat{O}_\delta(x_0)$ platí $f(x) = g(x)$ a existuje limita $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L$, pak

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L.$$

Odtud plyne, že funkci lze při výpočtu limity vhodně upravovat.

Příklad 85.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \left\| \tfrac{0}{0} \right\| = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+1) = 3.$$

Následující věta již byla použita v některých příkladech.

Věta 27.

Nechť $\lim_{x\to x_0} f(x) = k \neq 0$ a $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$. Existuje-li prstencové okolí bodu x_0, takové, že pro každé x z tohoto okolí platí

- $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$, pak $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$,
- $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$, pak $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$.

→ Věta platí i pro jednostranné okolí a limity.

→ Při výpočtu limity typu $\left\| \frac{k}{0} \right\|$, kde $k \neq 0$, $k \in \mathbb{R}$ je potřeba určit obě jednostranné limity a zjisit, zda jsou si rovny. Pokud ne, limita neexistuje.[1]

Příklad 86. • *Limita*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1} = \left\| \tfrac{1}{0} \right\|$$

neexistuje, neboť

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x-1} = \left\| \tfrac{1}{0^+} \right\| = +\infty, \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{x}{x-1} = \left\| \tfrac{1}{0^-} \right\| = -\infty.$$

[1] Matematika učí: nepřehlížejte nuly. (Gabriel Laub)

- *Limita*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x}{(x-1)^2} = \left\| \tfrac{1}{0} \right\| = +\infty,$$

neboť

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{(x-1)^2} = \left\| \tfrac{1}{0^+} \right\| = +\infty, \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{x}{(x-1)^2} = \left\| \tfrac{1}{0^+} \right\| = +\infty.$$

Poznámka. $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left\| \frac{k}{\pm\infty}, k \in \mathbb{R} \right\| = 0.$

Věta 28 (Limita polynomu a rac. lom. funkce v $\pm\infty$)**.**

Platí

- $$\lim_{x\to\pm\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n,$$
- $$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + \cdots + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_0} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}.$$

Příklad 87. • $\lim_{x\to-\infty} (-2x^5 + 3x^4 - 2x + 8) = \lim_{x\to-\infty} (-2x^5)$
$= \left\| -2 \cdot (-\infty) \right\| = +\infty$

- $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+3x^2-1}{x^4-2x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3}{x^4} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} = \left\| \frac{2}{\infty} \right\| = 0$

- $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2+2x-1}{-x^2-8x+5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{-x^2} = \lim_{x\to-\infty} (-3) = -3$

- $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+3x^2+2x-1}{-4x^2+3x+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{-4x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{-4} = \frac{1}{-4} \cdot \lim_{x\to\infty} x^2 = -\infty.$

Poznámka. Neurčité výrazy typu $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ lze řešit pomocí derivací, použitím tzv. L'Hospitalova pravidla.

§ 10.5 Příklady k procvičení

Příklad 88. *Určete limitu z grafu funkce.*

(i) $\lim_{x\to 5} 3x + 1$,
(ii) $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x$,
(iii) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$,
(iv) $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}$,
(v) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$,
(vi) $\lim_{x\to -3^+} \ln(x+3)$.

Příklad 89. *Určete limitu.*

(i) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sin x}{x}$,

(ii) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\sin x}{x}$,

(iii) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^3-2x^2+3+\log_3(1-x)}{x-\sin\frac{\pi x}{4}+2}$,

(iv) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{2x^2-5x+5}{x^2-x-2}$,

(v) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x-3}{\sin x}$,

(vi) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-1}{\cos x-1}$.

Příklad 90. *Určete limitu.*

(i) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^3-3x^2+2}{2x^3-3x-4}$,

(ii) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{2^x+x^4+1}{3\cdot 2^x+x^2-1}$,

(iii) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^3+2x-2}{4x^3+4x^2+x+3}$,

(iv) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{7x^2-2x+12}{x^3-4x^2+2}$,

(v) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{-2x^7-x+1}{x^2+1}$,

‡(vi) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{2\log_6 x-3^{x+1}+15x^6}{3\log_6 x+3^x-5x^6}$.

Příklad 91. *Z grafů základních funkcí a nebo výpočtem určete limitu.*

(i) $\lim\limits_{x\to \infty} (5^{\frac{1}{x}}+2)$,

(ii) $\lim\limits_{x\to 2\pi^-} \mathrm{e}^{\operatorname{cotg} x}$.

§ 10.6 Wolfram|Alpha

- Výpočet limity.

```
limit (x+3)/(2-x^2) as x->1

limit 3^(1/x)-7 as x->-infinity
```

- Jednostranná limita.

```
limit e^(cot(x)) as x->2pi from left

lim_(x->(2 pi)^-) e^(cot(x))
```

Kapitola

11 Derivace

§ 11.1 Definice a geometrický význam derivace

Definice 47 (Derivace v bodě)**.**

Buď f funkce a $x_0 \in D(f)$. Existuje-li

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \qquad \left(= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)$$

nazýváme tuto limitu *derivace* funkce f v bodě x_0 a značíme ji $f'(x_0)$. Je-li tato limita vlastní, nazýváme ji *vlastní derivace*, je-li nevlastní, nazýváme ji *nevlastní derivace*. Jestliže tato limita neexistuje řekneme, že funkce f v bodě x_0 derivaci nemá.

Geometrický význam derivace

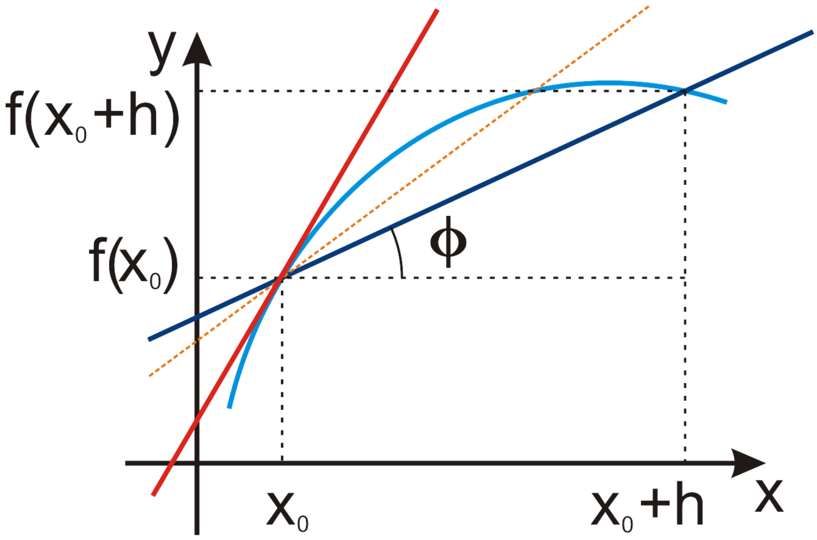
Sečna grafu funkce f procházející body $[x_0, f(x_0)]$ a $[x_0+h, f(x_0+h)]$ má směrnici

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Jestliže se s bodem x_0+h blížíme k bodu x_0 (tj. provádíme limitní přechod $h \to 0$), přejde tato sečna v tečnu v bodě $[x_0, f(x_0)]$. Směrnice tečny ke grafu funkce f v bodě x_0 je tedy

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

což je přesně derivace funkce f v bodě x_0.

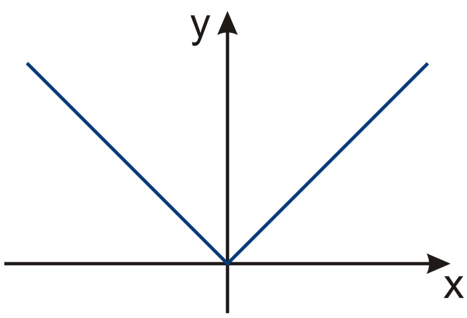


Obr. 11.1: Geometrický význam derivace.

Věta 29.

Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci, pak je v tomto bodě spojitá.

Poznámka. Obrácená věta neplatí. Např. funkce $f(x) = |x|$ je spojitá na celém $\mathbb{R}$, ale v $x_0 = 0$ nemá derivaci.



Obr. 11.2: Graf funkce $f(x) = |x|$.

Definice 48 (Derivace na intervalu)**.**

Nechť má funkce f derivaci v každém bodě otevřeného intervalu I. Předpisem, který každému bodu x z intervalu I přiřadí derivaci funkce f v bodě x, je definována funkce, kterou nazýváme *derivace* funkce f na intervalu I a označujeme ji f'.

Poznámka.
- Derivaci funkce $y = f(x)$ se mimo f' také značívá y', $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.
- Výraz $\mathrm{d}f(x) = f'(x)\mathrm{d}x$ nazýváme diferenciál funkce f v bodě x.
- Funkce f má v bodě x_0 diferenciál (je diferencovatelná v bodě x_0) $\Leftrightarrow$ existuje vlastní derivace $f'(x_0)$.

§ 11.2 Pravidla a vzorce[1]

Pravidla

Nechť f a g jsou funkce, $c \in \mathbb{R}$.

- $(f \pm g)' = f' \pm g'$,
- $(c \cdot f)' = c \cdot f'$,
- $(f \cdot g)' = f'g + fg'$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Vzorce

Nechť $a, b, c, \alpha \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, $\alpha \neq 0$, $b \neq 1$.

- $(c)' = 0$,
- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$,
- $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$,
- $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$,
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$,
- $(\log_b x)' = \frac{1}{x \cdot \ln b}$,
- $(\sin x)' = \cos x$,
- $(\cos x)' = -\sin x$.
- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$,
- $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$,
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
- $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$,
- $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

[1] Pro derivování je potřeba jen slabá mysl a silná pravačka. (Ron Getoor)

Věta 30.

Pro složenou funkci platí

$$(f \circ g)'(x) = [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x),$$

kde existence derivace vlevo (a uprostřed) plyne z existence derivací vpravo.

Poznámka.

- Výraz $f'(g(x))$ znamená derivaci funkce f vypočtenou v bodě $g(x)$.
- Při derivování složené funkce je vhodné začít od vnější složky a pokračovat dovnitř (jako loupání cibule), tj.

$$(f \circ g \circ h)'(x) = [f(g(h(x)))]' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x).$$

Definice 49 (Derivace vyšších řádů)**.**

Nechť f je funkce a f' její derivace. Existuje-li derivace $(f')'$ funkce f', nazýváme ji *druhá derivace* funkce f a značíme ji f''.
Obecně n-tou derivací, $n \in \mathbb{N}$, funkce f rozumíme funkci $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$.

Poznámka.

- Pro derivace vyšších řádů budeme používat značení

$$f', f'', f''', f^{(4)}, f^{(5)}, \dots, f^{(n)}.$$

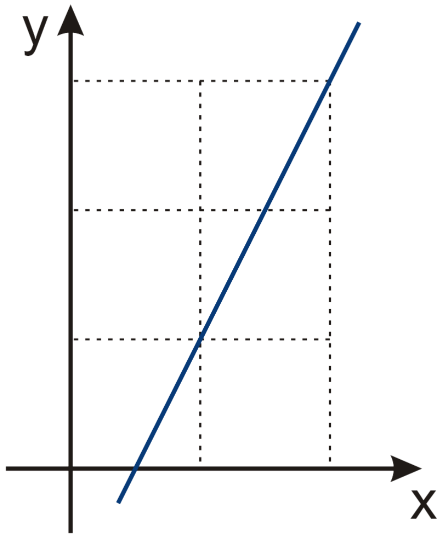
- V ostatních typech značení se n-tá derivace píše jako

$$y^{(n)}, \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}, \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}.$$

§ 11.3 Fyzikální význam

Fyzikální význam derivace

- Derivace $f'(x_0)$ vyjadřuje okamžitou rychlost změny funkční hodnoty funkce f v bodě x_0. Tj. je-li $f'(x_0) = c \in \mathbb{R}$, potom na jednu jednotku změny hodnoty nezávisle proměnné x připadá c jednotek změny závisle proměnné y.
- Zejména z toho plyne, že je-li $c > 0$, pak s rostoucím x roste i y, a je-li $c < 0$, pak s rostoucím x y klesá.



Obr. 11.3: Rychlost změny.

Snadno můžeme pomocí derivací odvodit zákony klasické mechaniky:

- Rychlost je změna polohy v čase $v = \frac{s}{t}$. Potom okamžitá rychlost v čase t je
$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}.$$
- Zrychlení je změna rychlosti v čase, tedy podobně obdržíme
$$a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}.$$
- Hybnost p je rovna rychlosti na jednotku hmotnosti, tedy $p = mv$.
- Síla je derivací hybnosti dle času
$$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} v + m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0 + m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = ma.$$

Tím jsme odvodili 2. Newtonův pohybový zákon ($a = \frac{F}{m}$):

Zákon síly

Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundam lineam rectam qua vis illa imprimitur.
(= Jestliže na těleso působí síla, pak se těleso pohybuje se zrychlením, které je přímo úměrné působící síle a nepřímo úměrné hmotnosti tělesa.)

§ 11.4 Příklady k procvičení

Příklad 92. *Určete derivaci následujících funkcí.*

(i) $f(x) = 0$,

(ii) $f(x) = -18$,

(iii) $f(x) = -2x^3 + x^2 - 4x + 3$,

(iv) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{2}{5x^2} + 6\sqrt[5]{x^3}$,

(v) $f(x) = \frac{5\sqrt{x}+7x^2-3}{2x}$,

(vi) $f(x) = \frac{x+8}{3x^2-1}$,

(vii) $f(x) = 2\sin x + \operatorname{cotg} x$,

(viii) $f(x) = x \operatorname{tg} x$.

Příklad 93. *Určete derivaci funkce f v bodě x_0.*

(i) $f(x) = 3x^2 + 2x - 8,\ x_0 = -1$,

(ii) $f(x) = \ln(\operatorname{tg} x),\ x_0 = \frac{\pi}{4}$.

Příklad 94. *Určete funkční hodnotu a hodnotu první a druhé derivaci funkce f v bodě x_0.*

(i) $f(x) = \sqrt{3x^4 + 1},\ x_0 = -1$,

(ii) $f(x) = x\sin(2x),\ x_0 = \frac{\pi}{4}$.

Příklad 95. *Zderivujte a upravte.*

(i) $f(x) = x^2 e^x \sin x$,

(ii) $f(x) = x^3 6^x$,

(iii) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$,

(iv) $f(x) = \frac{1}{\ln x}$,

(v) $f(x) = \frac{1-x}{x^2+1}$,

(vi) $f(x) = \operatorname{arccotg}(2x)$.

Příklad 96. *Zderivujte a upravte.*

(i) $f(x) = 3x^2 e^x(\sin x - 3\ln x)$,

(ii) $f(x) = (2x + 6)4^x$,

(iii) $f(x) = \sqrt{3x^3 - 2x^2 + 5x - 1}$,

(iv) $f(x) = \frac{7}{\ln(x^2+1)}$,

(v) $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x^2+1}}$,

(vi) $f(x) = \cos^2 x^3$,

(vii) $f(x) = x\sin^2(2x)$,

(viii) $f(x) = \frac{-2}{\ln\cos x}$,

(ix) $f(x) = 7^{2x^3+x-9}$,

(x) $f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2x}{x^2-1}$.

Příklad 97. *Zderivujte a upravte.*

(i) $f(x) = x^5 + 5^x$,

‡(ii) $f(x) = x^x$,

‡(iii) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$,

‡(iv) $f(x) = (\ln x)^{\operatorname{tg} x}$.

Příklad 98. *Zderivujte a upravte. (Nenechte se odradit tím, jak hrozně vypadá zadání. Derivování je čistě mechanická záležitost a stačí se v tom "jen" neztratit.)*

(i) $f(x) = 5x^5 \sqrt[5]{5^x}$,

(ii) $f(x) = \ln^2 \cos^3 x^5$,

(iii) $f(x) = \arccos \log_{\frac{2}{3}} x^2$,

(iv) $f(x) = \ln \ln(x-3) + \arcsin \frac{x-5}{2}$,

(v) $f(x) = \frac{1}{\ln(\sin^2 x)}$,

(vi) $f(x) = \sin x^2 \sin^2 x$.

Příklad 99. *Zderivujte:*

$$f(x) = 5x^3 - 2\cos x + \frac{3}{4x^2}, \quad g(x) = \frac{x^4}{\ln x}, \quad h(x) = \sqrt[3]{\sin(2x)}.$$

Příklad 100. *Určete hodnotu 3. derivace funkce* $f(x) = 5x^5 + 4x^3 - x^2 + 1$ *v bodě* $x_0 = -2$.

§ 11.5 Wolfram|Alpha

- Výpočet derivace.

```
derivative of cos(2x^3)(5x-1)
```

- Derivace vyššího řádu.

```
second derivative of sqrt(ln(x))

third derivative of ln(x^(1/3))

4th derivative of ln(x^(1/3))

5th derivative of sin(2x)

d^5/dx^5(sin(2 x))
```

- Hodnota derivace v daném bodě.

```
7th derivative of sqrt(x) where x=1
```

Kapitola

12 Použití derivací

§ 12.1 L'Hospitalovo pravidlo

Věta 31 (L'Hospitalovo pravidlo)**.**

Nechť $\alpha \in \mathbb{R}^*$ a nechť funkce f a g jsou definované v nějakém ryzím okolí bodu α a mají zde derivaci. Nechť dále platí buď

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} g(x) = 0,$$

nebo

$$\lim_{x\to\alpha} |g(x)| = \infty.$$

Pak platí

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

pokud limita na pravé straně existuje. Stejné tvrzení platí i pro obě jednostranné limity.

Poznámka.

- L'Hospitalovo pravidlo můžeme použít opakovaně.
- Lze ho použít přímo na limity typu $\frac{0}{0}$ a $\frac{\infty}{\infty}$.
- Vhodnou úpravou lze převést neurčité výrazy typu $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞, 0^∞ a ∞^0 na jeden z typů $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$.

Pozor!

Při použití L'Hospitalova pravidla nederivujeme výraz $\frac{f(x)}{g(x)}$ jako podíl, ale derivujeme zvlášť funkci v čitateli a zvlášť funkci ve jmenovateli.

§ 12.2 Tečna a normála ke grafu funkce

Definice 50.

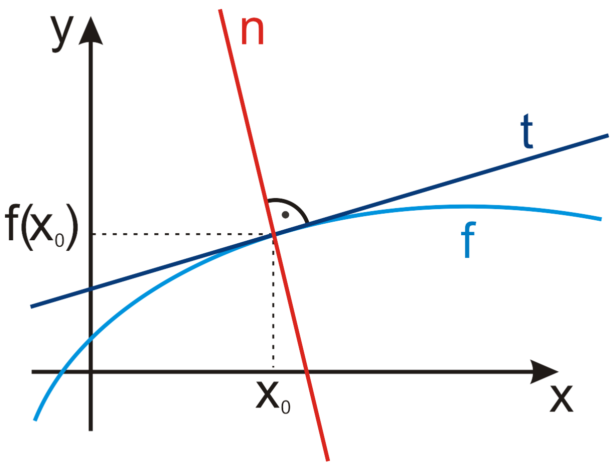
Nechť je $f(x)$ funkce spojitá a má derivaci v bodě $x_0 \in D(f)$. Potom přímku

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

nazýváme *tečna* ke grafu funkce f v bodě x_0 a přímku

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$$

nazýváme *normála* ke grafu funkce f v bodě x_0 (v případě, že $f'(x_0) \neq 0$).



Obr. 12.1: Tečna a normála.

§ 12.3 Příklady k procvičení

Příklad 101. *Určete limity.*

(i) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^3+x^2+4}{x^4+3x^3+8}$,

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$,

(iii) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x}{\ln^2 x}$,

(iv) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 3x}$,

(v) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$,

(vi) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x \arccos x}$.

Příklad 102. *Určete limity.*

‡*(i)* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (1-\sin x)\operatorname{tg} x$,

‡*(ii)* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-} \operatorname{tg} 2x \ln(\operatorname{tg} x)$,

‡*(iii)* $\lim\limits_{x\to 0^+} x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$,

‡*(iv)* $\lim\limits_{x\to 0^-} x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

Příklad 103. *Určete rovnici tečny funkce f v bodě x_0.*

(i) $f(x) = \frac{1-x}{x^2-3}$, $\quad x_0 = -2$,

(ii) $f(x) = 2x + \sin x$, $\quad x_0 = \pi$.

Příklad 104. *Určete rovnici normály funkce f v bodě x_0.*

(i) $f(x) = x^2 + \ln x$, $\quad x_0 = 1$,

(ii) $f(x) = \sqrt[3]{1-x}$, $\quad x_0 = 9$.

§ 12.4 Wolfram|Alpha

- Tečna.

```
tangent to y=x^2 at 2
```

- Normála.

```
normal to y=x^(2/3) at 8
```

- Limita.

```
limit (ln^5(x))/(x-3) as x->infinity
```

Kapitola 13 Průběh funkce

§ 13.1 Monotonie a lokální extrémy

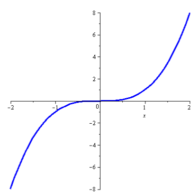
Věta 32.

Nechť je funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$ a má derivaci na intervalu (a, b). Pak platí

- Funkce f je v $[a, b]$ *konstantní* právě tehdy, když $\forall x \in (a, b) : f'(x) = 0$.
- Je-li $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a, b)$, pak je funkce f na intervalu $[a, b]$ *rostoucí*.
- Je-li $f'(x) < 0$, $\forall x \in (a, b)$, pak je funkce f na intervalu $[a, b]$ *klesající*.

Pozor!

Obrácené tvrzení neplatí. Např. funkce $f(x) = x^3$ je na celém $\mathbb{R}$ rostoucí, ale v bodě $x = 0$ má nulovou derivaci.



Definice 51.

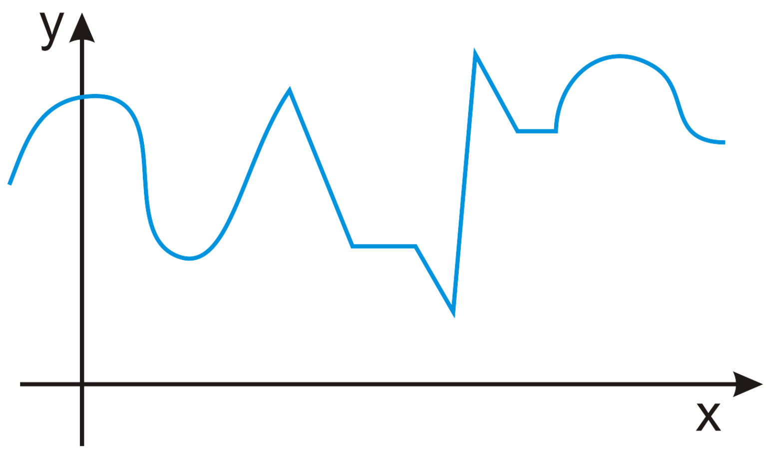
Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 *lokální maximum (minimum)*, jestliže pro každé x v nějakém okolí bodu x_0 platí

$$f(x) \leq f(x_0), \qquad \big(f(x) \geq f(x_0)\big).$$

Pokud pro $x \neq x_0$ platí předchozí nerovnosti ostře, mluvíme o ostrém lokálním maximu (minimu). Souhrnně nazýváme (ostré) lokální maximum a minimum *(ostré) lokální extrémy*.

Věta 33.

Má-li funkce f v bodě x_0 lokální extrém, pak $f'(x_0) = 0$, nebo $f'(x_0)$ neexistuje.



Obr. 13.1: Najděte všechny extrémy zobrazené funkce a rozhodněte, které z nich jsou ostré.

Definice 52.

Je-li $f'(x_0) = 0$, pak bod x_0 nazýváme *stacionární bod* funkce f.

Věta 34.

Nechť je funkce f spojitá v bodě x_0 a nechť existuje její derivace v nějakém prstencovém okolí tohoto bodu. Označme L levé prstencové okolí bodu x_0 a R pravé prstencové okolí bodu x_0.

- Jestliže platí
$$f'(x) > 0 \text{ pro } x \in L \text{ a } f'(x) < 0 \text{ pro } x \in R,$$
pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum.

- Jestliže platí
$$f'(x) < 0 \text{ pro } x \in L \text{ a } f'(x) > 0 \text{ pro } x \in R,$$
pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum.

Věta 35.

Nechť $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) \neq 0$. Pak má funkce f v bodě x_0 lokální extrém a to

- lokální maximum, jestliže $f''(x_0) < 0$,
- lokální minimum, jestliže $f''(x_0) > 0$.

Příklad 105. *Najděte lokální extrémy funkce* $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.

Řešení:

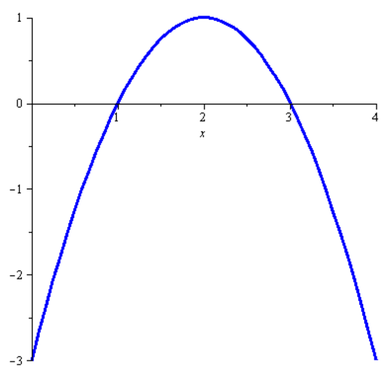
(i) $f'(x) = -2x + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2.$

x	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
$\operatorname{sgn} f'$	$+$	$-$
f	$\nearrow$	$\searrow$

Funkce f má tedy v $x = 2$ lokální maximum s hodnotou $f(2) = 1$.

(ii) $f'(x) = -2x + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2.$
$f''(x) = -2 \quad \Rightarrow f''(2) = -2 < 0.$

Funkce f má tedy v $x = 2$ lokální maximum s hodnotou $f(2) = 1$.



Obr. 13.2: Graf funkce $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.

§ 13.2 Konvexnost, konkávnost a inflexní body

Definice 53.

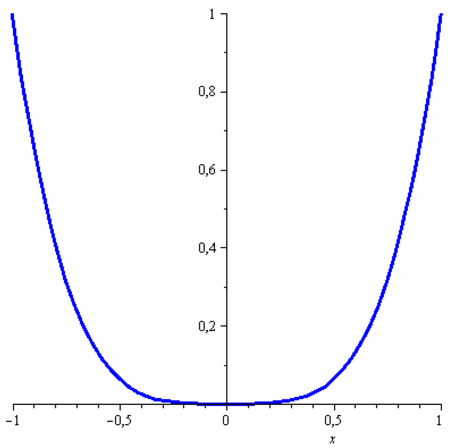
Funkci nazveme *konvexní (konkávní)* v bodě x_0, jestliže její graf leží v prstencovém okolí bodu x_0 nad (pod) tečnou v tomto bodě.
Funkci nazveme konvexní (konkávní) na intervalu I, jestliže je konvexní (konkávní) v každém bodě tohoto intervalu.

Věta 36.

Nechť funkce $f(x)$ má derivaci na intervalu (a, b). Pak platí

- jestliže $\forall x \in (a, b)$ platí $f''(x) > 0$, pak je funkce f konvexní na intervalu (a, b),
- jestliže $\forall x \in (a, b)$ platí $f''(x) < 0$, pak je funkce f konkávní na intervalu (a, b).

Poznámka. Opačné tvrzení neplatí. Např. funkce $f(x) = x^4$ je konvexní na $\mathbb{R}$, ale $f''(0) = 0$.



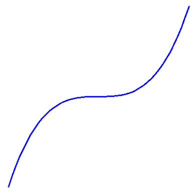
Obr. 13.3: Graf funkce $f(x) = x^4$.

Definice 54.

Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 *inflexní bod*, jestliže v bodě x_0 existuje tečna ke grafu funkce a f'' zde mění znaménko (tj. graf funkce se mění z konvexního na konkávní, nebo opačně).

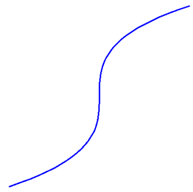
Poznámka. Funkce f může mít inflexní bod v bodě x_0, ve kterém:

- $f''(x_0) = 0$,



Obr. 13.4: Graf funkce $f(x) = x^3$ s inflexním bodem.

- $f''(x_0)$ neexistuje.



Obr. 13.5: $f(x) = \sqrt[3]{x}$ s inflexním bodem.

Věta 37.

Nechť má funkce f v bodě x_0 spojitou první derivaci a nechť existuje ryzí okolí bodu x_0, v němž existuje druhá derivace funkce f. Označme L levé ryzí okolí bodu x_0 a R pravé ryzí okolí bodu x_0. Pak jestliže

$$f''(x) > 0 \; \forall x \in L \text{ a } f''(x) < 0 \quad \forall x \in R \qquad \text{nebo naopak,}$$

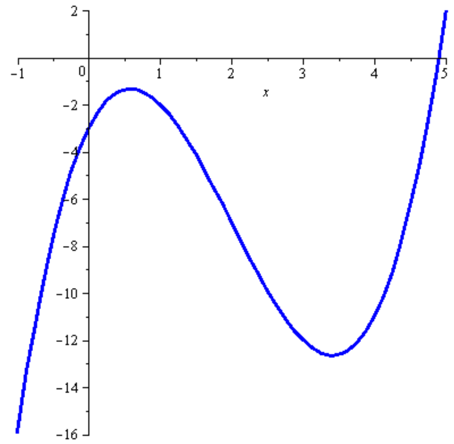
pak má funkce f v bodě x_0 inflexní bod.

Příklad 106. *Zjistěte, pro která $x \in \mathbb{R}$ je funkce $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6x - 3$ konkávní/konvexní a najděte její inflexní body.*

Řešení: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 6, \quad f''(x) = 6x - 12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2.$

x	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
$\operatorname{sgn} f''$	$-$	$+$
f	$\cap$	$\cup$

Funkce je konkávní pro $x \in (-\infty, 2)$ konvexní pro $x \in (2, \infty)$ a v $x = 2$ má inflexní bod s hodnotou $f(2) = -7$.



Obr. 13.6: Graf funkce $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6x - 3$.

§ 13.3 Asymptoty

Definice 55.

Přímku, která je tečnou ke grafu funkce f v některém nevlastním bodě, nazýváme *asymptota* funkce f.

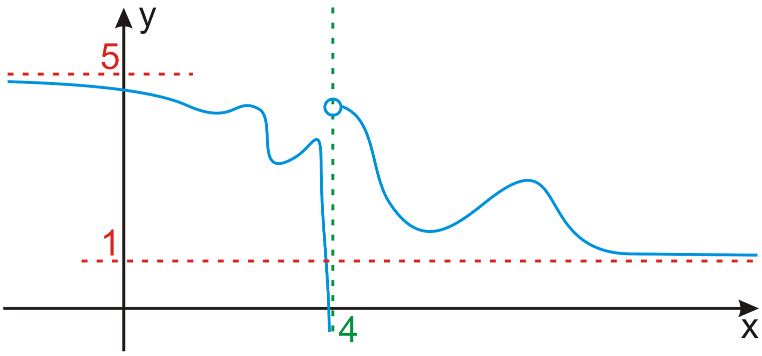
Věta 38.

Funkce má

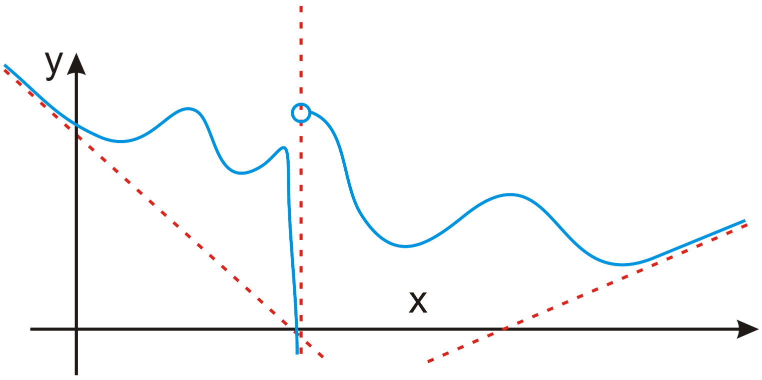
- *asymptotu bez směrnice* $x = x_0$ právě tehdy, když má v bodě x_0 nevlastní limitu zleva nebo zprava,
- *asymptotu se směrnicí* $y = ax + b$ pro $x \to \pm\infty$ právě tehdy, když

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) \in \mathbb{R}.$$

Poznámka. Je-li limita $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ nebo $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty$, pak je svislá přímka $x = x_0$ asymptotou bez směrnice funkce f v bodě x_0. Tedy asymptoty bez směrnice hledáme "v dírách"nebo na okraji definičního oboru.



Obr. 13.7: Jedna asymptota bez směrnice, dvě vodorovné se směrnicí.



Obr. 13.8: Jedna asymptota bez směrnice, dvě šikmé se směrnicí.

§ 13.4 Průběh funkce – shrnutí

Postup při vyšetřování průběhu funkce

(i) *Přímo z funkce*:

- $D(f)$, sudost/lichost, periodičnost, průsečíky s osami, kladnost/zápornost,
- asymptoty (se směrnicí, bez směrnice).

(ii) *Z první derivace*: rostoucí/klesající, lokální extrémy.

(iii) *Z druhé derivace*: konvexní/konkávní, inflexní body.

(iv) *Načrtnutí grafu*: ke všem výše zmíněným bodům dopočítáme funkční hodnoty a zkombinujeme zjištěné informace.

Postupně tedy plníme následující body:

a) definiční obor,
b) sudost/lichost (periodičnost),
c) asymptoty bez směrnice,
d) asymptoty se směrnicí,
e) průsečíky s osami,
f) kladnost/zápornost,

j) druhou derivaci,
k) kde je f konvexní/konkávní,
l) inflexní body,

g) první derivaci,
h) kde je f rostoucí/klesající,
i) lokální extrémy,

m) funkční hodnoty ve významných bodech,
n) načrtneme graf.

Příklad 107. *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = -\frac{x^2}{x+1}$$

Řešení:

a) Funkčnímu předpisu vyhovují všechna reálná čísla taková, že $x+1 \neq 0$. Proto máme

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

b) O sudosti/lichosti funkce snadno rozhodneme dosazením $-x$. Poněvadž platí

$$f(-x) = -\frac{x^2}{-x+1} \neq \pm f(x),$$

není zadaná funkce ani lichá, ani sudá (což je vidět už z nesymetrie definičního oboru). Vzhledem k definičnímu oboru je zřejmé, že funkce nemůže být periodická.

c) Asymptoty bez směrnice popisují limitní chování funkce v bodech nespojitosti (nebo na okraji definičního oboru), proto přímým výpočtem ihned dostaneme

$$\lim_{x\to -1^+} -\frac{x^2}{x+1} = -\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2}{x+1} = -(+\infty) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to -1^-} -\frac{x^2}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} -\frac{x^2}{x+1} = -(-\infty) = \infty.$$

Funkce má jednu svislou asymptotu $x = -1$.

d) Pomocí vzorců určíme asymptoty se směrnicí (pokud existují).

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} -\frac{x^2}{x^2+x} = -1,$$
$$b = \lim_{x\to\pm\infty} -\frac{x^2}{x+1} + x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x+1} = 1.$$

Funkce $f(x)$ má tedy v $+\infty$ i $-\infty$ asymptotu se směrnicí, která je dána rovnicí $y = -x + 1$.

e) Určíme průsečíky s osou x ($\Rightarrow y = 0$):

$$f(x) = 0 \iff x^2 = 0 \iff x = 0,$$

tedy $P_x = [0, 0]$,

a s osou y ($\Rightarrow x = 0$):

$$y = -\frac{0^2}{0+1} = 0 \iff y = 0,$$

tedy $P_y = [0, 0] = P_x$.

f) Nyní získáme intervaly, kde je funkce $f(x)$ kladná a záporná:

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, \infty)$
sgn f	$+$	$-$	$-$
f	kladná	záporná	záporná

g) Spočítáme první derivaci a její definiční obor, tj.

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 2x}{(x+1)^2}, \quad D(f') = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

h) Nyní určíme stacionární body a intervaly monotonie, tj.

$$f'(x) = 0 \iff -x(x+2) = 0 \iff x_1 = 0,\ x_2 = -2.$$

x	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, \infty)$
sgn f'	$-$	$+$	$+$	$-$
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$

i) Z tabulky vidíme, že funkce má v $x = -2$ lokální minimum a v $x = 0$ lokální maximum.

j) Spočítáme druhou derivaci a určíme její definiční obor

$$f''(x) = \frac{-2x-2}{(x+1)^4} = \frac{-2}{(x+1)^3},$$
$$D(f'') = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

k) Určíme kritické body a intervaly konvexnosti a konkávnosti, tj.

$$f''(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -2 = 0,$$

což je nesmysl. Druhá derivace tedy nemá žádný nulový bod. Nesmíme ovšem zapomenout, že její znaménko se může změnit i v bodech, ve kterých není definována (tj. v „dírách“ jejího definičního oboru).

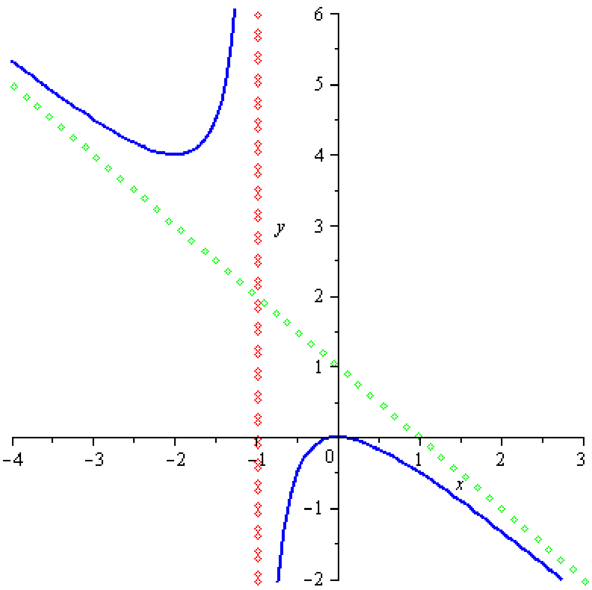
x	$(-\infty, -1)$	$(-1, \infty)$
sgn f''	$+$	$-$
f	$\cup$	$\cap$

l) Funkce nemá žádný inflexní bod ($-1 \notin D(f)$).

m) Zrekapitulujme význačné body a spočtěme v nich funkční hodnoty.

- Průsečíky s osami $P_x = P_y = [0, 0]$.
- Lokální minimum v $x = -2$, $f(-2) = 4$, tedy jde o bod $[-2, 4]$.
- Lokální maximum v $x = 0$, $f(0) = 0$, tedy jde o bod $[0, 0]$.

n) Nyní zkombinujeme všechny získané informace a obdržíme graf funkce



Obr. 13.9: Graf funkce $f(x) = -\frac{x^2}{x+1}$.

§ 13.5 Příklady k procvičení

Příklad 108. *Určete průběh funkce.*

(i) $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$,

(ii) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$,

(iii) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$,

(iv) $f(x) = \frac{x^2+1}{2x}$,

(v) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$,

(vi) $f(x) = \frac{x-3}{x^2}$,

(vii) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$,

(viii) $f(x) = \frac{1-2x}{3x^2}$,

‡*(ix)* $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$,

‡*(x)* $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$.

Příklad 109. *Je dána funkce* $f(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-x}$. *Určete:*

(i) *Pro která x je tato funkce klesající.*

(ii) *Pro která x je tato funkce konkávní.*

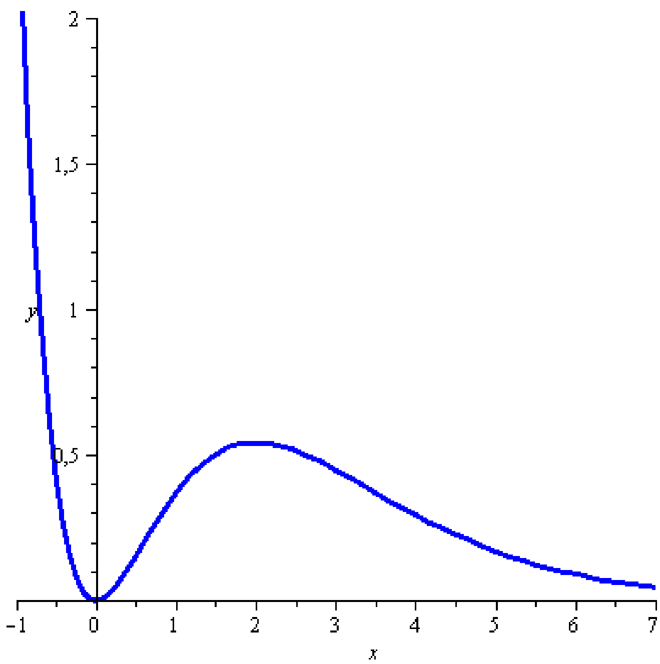
(iii) *Asymptoty bez směrnice.*

(iv) *Vodorovné asymptoty.*

(v) *Najděte lokální maxima.*

(vi) *Najděte inflexní body.*

Poznámka. Vyzkoušejte dopočítat vše k dokončení vyšetřování průběhu funkce z příkladu 109. Její graf vypadá takto:



Obr. 13.10: Graf funkce $f(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-x}$.

Příklad 110. *Určete inflexní body funkce* $f(x) = \ln(2x^2 - 3x + 4)$.

Příklad 111. *Které tvrzení NEPLATÍ pro funkci* $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$.

a) je sudá, *b) její derivace má v bodě* 3 *hodnotu* $-\frac{3}{32}$, *c) je klesající pro* $x > 8$, *d) v bodě* 2 *je konkávní,* *e) má lokální maximum v* $x = 0$.

§ 13.6 Wolfram|Alpha

- Lokální extrémy.

```
local extrema of (x-1)/(x^2+1)
```

- Inflexní body.

```
inflection points of (x-1)/(x^2+1)
```

- Asymptoty.

```
asymptotes y=(x^2-1)/(5-x)
```

- Graf funkce.

```
plot y=(x^2-3)/(x^2+9)

plot y=(x-1)/(x^2+1) for x from -3 to 4 and y from -1 to 0.5
```

Kapitola

14 Neurčitý integrál

§ 14.1 Definice a vlastnosti

Definice 56 (Neurčitý integrál)**.**

Nechť jsou F a f funkce definované na otevřeném intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Jestliže platí

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in I,$$

pak funkci F nazýváme *primitivní funkce* k funkci f, nebo *neurčitý integrál* funkce f na intervalu I. Píšeme

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x).$$

Existuje-li k funkce f primitivní funkce na intervalu I, pak říkáme, že funkce f je na I *integrovatelná*.

Z definice je vidět, že integrál je jakási antiderivace, tj. integrováním získáme ze známé derivace zpět původní funkci. Proto je také většina vzorců pro integrování elementárních funkcí shodná se vzorci pro derivace, jen čteno zprava doleva (a upraveno).

Věta 39.

Je-li funkce f spojitá v intervalu I, pak je zde integrovatelná.

Poznámka. Primitivní funkce (tedy výsledek po integraci) je vždy spojitá, neboť k ní existuje derivace (je diferencovatelná).

Věta 40 (Jednoznačnost)**.**

Primitivní funkce je určena jednoznačně až na aditivní konstantu.

Např. protože platí $\left(x^2\right)' = 2x$, je funkce x^2 primitivní funkcí k funkci $2x$. Podobně ale také $\left(x^2+4\right)' = \left(x^2-8\right)' = 2x$. Tedy $x^2 + c$ je primitivní funkce k funkci $2x$ pro libovolné $c \in \mathbb{R}$. Konstantu c nazýváme *aditivní (integrační) konstanta*. Z toho je zřejmé, že primitivní funkce není jediná funkce, ale celá množina funkcí lišících se o konstantu.

Vzorce

Nechť $A, B, a, c, k, n \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $n \neq -1$.

1. $\int k\,dx = kx + c$,
2. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$,
3. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$,
4. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$,
5. $\int \mathrm{e}^x\,dx = \mathrm{e}^x + c$,
6. $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$,
7. $\int \cos x\,dx = \sin x + c$,
8. $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + c$,
9. $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{cotg} x + c$,
10. $\int \frac{1}{\sqrt{A^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{A} + c$,
11. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm B}}\,dx = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm B}| + c$,
12. $\int \frac{1}{A^2+x^2}\,dx = \frac{1}{A}\operatorname{arctg}\frac{x}{A} + c$,
13. $\int \frac{1}{A^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2A}\ln\left|\frac{A+x}{A-x}\right| + c$.

Věta 41 (Linearita)**.**

Nechť f a g jsou funkce integrovatelné na intervalu I a a, b jsou reálná čísla. Pak na I platí

$$\int af(x) + bg(x)\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x + b\int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 112.

$$\begin{aligned}\int\left(3x^3 - \sin x + \sqrt[5]{x}\right)\mathrm{d}x &= 3\int x^3\,\mathrm{d}x - \int \sin x\,\mathrm{d}x + \int x^{1/5}\,\mathrm{d}x\\ &= 3\frac{x^4}{4} + c_1 + \cos x + c_2 + \frac{x^{6/5}}{6/5} + c_3\\ &= \frac{3}{4}x^4 + \cos x + \frac{5}{6}\sqrt[5]{x^6} + c.\end{aligned}$$

Poznámka. Při derivování šlo jen o správné použití vzorců a jejich znalost. Integrace je často mnohem obtížnější. Především proto, že neexistují vzorce pro integrál součinu, podílu a složené funkce.

§ 14.2 Metoda per partes

Metoda per partes částečně nahrazuje chybějící pravidlo pro integraci součinu.

Věta 42.

Nechť jsou funkce u a v diferencovatelné na intervalu I. Pak na I platí

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x,$$

jestliže integrály na pravé straně rovnosti existují.

Poznámka. Jako funkci u, tedy tu, kterou při použití věty derivujeme, volíme zpravidla funkci, která se při derivování "více zlepší". Protože nás budou zajímat výhradně integrandy typu polynom krát jiná funkce, volba bude vypadat následovně. Je dán integrál

$$\int P(x)f(x)\,\mathrm{d}x,$$

kde $P(x)$ je polynom, řešíme pomocí metody per partes takto:

- ▷ Je-li $f(x)$ jedna z funkcí $\mathrm{e}^{kx}, \sin(kx), \cos(kx)$, pak volíme $u = P(x)$.
- ▷ Je-li $f(x)$ jedna z funkcí $\ln x, \arcsin x, \arccos x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arccotg} x$, pak volíme $u = f(x)$.

Metodu per partes lze použít opakovaně.

Příklad 113.

$$\begin{aligned}
\int x\sin x\,\mathrm{d}x &= \begin{vmatrix} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{vmatrix} \\
&= x\cdot(-\cos x) - \int 1\cdot(-\cos x)\,\mathrm{d}x = -x\cos x + \int \cos x\,\mathrm{d}x \\
&= -x\cos x + \sin x + c.
\end{aligned}$$

Poznámka. Zkoušku provedeme zderivováním výsledku.

Příklad 114.

$$
\begin{aligned}
\int 3x^2 \ln^2 x \, \mathrm{d}x &= \left| \begin{matrix} u = \ln^2 x & u' = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} \\ v' = 3x^2 & v = x^3 \end{matrix} \right| \\
&= x^3 \ln^2 x - \int 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x^3 \, \mathrm{d}x \\
&= x^3 \cdot \ln^2 x - 2 \int x^2 \ln x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = x^2 & v = \frac{x^3}{3} \end{matrix} \right| \\
&= x^3 \cdot \ln^2 x - 2 \left[\ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \right] \\
&= x^3 \cdot \ln^2 x - 2\frac{x^3}{3} \ln x + \frac{2}{3} \int x^2 \, \mathrm{d}x \\
&= x^3 \cdot \ln^2 x - \frac{2}{3} x^3 \ln x + \frac{2}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + c \\
&= x^3 \cdot \ln^2 x - \frac{2}{3} x^3 \ln x + \frac{2}{9} x^3 + c.
\end{aligned}
$$

§ 14.3 Substituční metoda

Substituční metoda se používá pro výpočet některých integrálů ze složených funkcí a také pro výpočet některých integrálů ze součinu či podílu funkcí.

Věta 43 (Substituční metoda I)**.**

Nechť $f(t)$ je funkce spojitá na intervalu I, nechť má funkce $\varphi(x)$ derivaci na intervalu J a nechť platí $\varphi(J) = I$. Potom na J platí

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \, \mathrm{d}x = \int f(t) \, \mathrm{d}t,$$

dosadíme-li do výrazu na pravé straně $t = \varphi(x)$.

Poznámka. Za novou proměnnou t volíme vnitřní složku složené funkce $f(\varphi(x))$, tedy $t = \varphi(x)$. Odtud diferenciací dostáváme $\mathrm{d}t = \varphi'(x) \, \mathrm{d}x$ (porovnejte se vzorcem ve znění věty).

Příklad 115.

$$
\begin{aligned}
\int \sin(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x &= \left| \begin{matrix} t = \ln x \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \end{matrix} \right| \\
&= \int \sin t \, \mathrm{d}t = -\cos t + c = -\cos(\ln x) + c.
\end{aligned}
$$

Věta 44 (Substituční metoda II)**.**

Nechť $f(x)$ je funkce spojitá na intervalu I, nechť má funkce $\varphi(t)$ na intervalu J nenulovou derivaci a nechť platí $\varphi(J) = I$. Potom na I platí

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t,$$

dosadíme-li do výrazu na pravé straně $t = \varphi^{-1}(x)$, kde $\varphi^{-1}(x)$ je funkce inverzní k funkci $\varphi(x)$.

Poznámka. • Přestože pravá strana vztahu pro substituci vypadá složitěji než levá strana, vhodnou volbou substituce dodjde často naopak k výraznému zjednodušení.

- Porovnáme-li obě uvedené substituční metody, zjistíme, že jde o jediný vztah, který lze využít zprava doleva, nebo naopak.

Příklad 116. *Přímé použití věty:*

$$\begin{aligned}
&\int \sin(2x+1)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x = \frac{t-1}{2} \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| \\
&= \int \sin\Bigl(2 \cdot \frac{t-1}{2} + 1\Bigr) \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \sin t\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{2}\cos t + c = \left| \begin{array}{c} x = \frac{t-1}{2} \\ t = 2x+1 \end{array} \right| = -\frac{1}{2}\cos(2x+1) + c.
\end{aligned}$$

V tomto případě snadněji:

$$\begin{aligned}
&\int \sin(2x+1)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = 2x+1 \\ \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| \\
&= \int \sin t \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\cos t + c = -\frac{1}{2}\cos(2x+1) + c.
\end{aligned}$$

Je užitečné mít na paměti i následující dva důsledky substituční metody, protože mohou výrazně ušetřit čas při výpočtu složitějších integrálů.

Důsledek. Je-li F primitivní funkce k funkci f, pak platí

$$\int f(\alpha x + \beta)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x + \beta) + c.$$

Příklad 117.

$$\begin{aligned}
&\int \sqrt{4x+5}\,\mathrm{d}x = \int (4x+5)^{1/2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\frac{(4x+5)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{6}\sqrt{(4x+5)^3} + c.
\end{aligned}$$

Důsledek. Platí
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c.$$

Příklad 118.
$$\int \frac{5x}{3x^2+5}\,\mathrm{d}x = 5\int \frac{x}{3x^2+5}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{6}\int \frac{6x}{3x^2+5}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{5}{6}\ln|3x^2+5| + c = \frac{5}{6}\ln(3x^2+5) + c.$$

§ 14.4 Racionální lomená funkce

Poznámka. Již víme, že každou racionální lomenou funkci, která není ryze lomená, lze pomocí dělení polynomů převést na součet polynomu a ryze lomené racionální funkce.

Budeme se tedy zajímat pouze o integrály z ryze lomených racionálních funkcí.

Zaměříme se na 4 typy integrálů:

1. $\int \frac{A}{ax+b}\,\mathrm{d}x$,
2. $\int \frac{A}{(ax+b)^n}\,\mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}$,
3. $\int \frac{A}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$,
4. $\int \frac{Ax+B}{ax^2+px+q}\,\mathrm{d}x$,

kde A, B, a, b, c, p, q jsou reálná čísla.

Typ 1 a 2 řešíme substitucí $t = ax + b$.

Příklad 119 (Typ 1)**.**
$$\int \frac{3}{2x-8}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = 2x-8 \\ \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{3}{t}\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{3}{2}\ln|t| + c = \frac{3}{2}\ln|2x-8| + c.$$

Příklad 120 (Typ 2)**.**
$$\int \frac{3}{(2x-8)^3}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = 2x-8 \\ \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{3}{t^3}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\int \frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{3}{2}\int t^{-3}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\frac{t^{-2}}{-2} + c$$
$$= \frac{3}{-4}\frac{1}{t^2} + c = \frac{-3}{4(2x-8)^2} + c.$$

Typ 3 řešíme doplněním jmenovatele na čtverec a použitím vzorce pro $\int \frac{1}{A^2+x^2}\,\mathrm{d}x$, nebo $\int \frac{1}{A^2-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Příklad 121 (Typ 3)**.**

$$\int \frac{3}{2x^2-4x+10}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x-1)^2+4}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left| \begin{matrix} t = x-1 \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{matrix} \right| = \frac{3}{2}\int \frac{1}{t^2+2^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot \operatorname{arctg}\frac{t}{2} + c = \frac{3}{4}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2} + c.$$

Typ 4 řešíme převedením na součet integrálu typu $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$ a integrálu typu 3.

Příklad 122 (Typ 4)**.**

$$\int \frac{3x-6}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}x = 3\int \frac{x-2}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}x = 3\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2x-4}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x+2-2-4}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x-3} + \frac{-6}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}x$$

$$I_1 = \int \frac{2x+2}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}x = \ln|x^2+2x-3| + c$$

$$I_2 = -6\int \frac{1}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}x = -6\int \frac{1}{(x+1)^2-4}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} t = x+1 \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{matrix} \right|$$

$$= -6\int \frac{1}{t^2-4}\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{1}{4-t^2}\,\mathrm{d}t = 6\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right| + c$$

$$= \frac{3}{2}\ln\left|\frac{x+3}{1-x}\right| + c$$

Celkem

$$\int \frac{3x-6}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\left(\ln|x^2+2x-3| + \frac{3}{2}\ln\left|\frac{x+3}{1-x}\right|\right) + c$$

§ 14.5 Značení

Racionální lomenou funkci v proměnných $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ budeme značit $R(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$, tj. $R(\alpha, \beta)$ je podíl dvou polynomů, ve kterých místo x vystupují α, β. Např. $R(x, \sin x)$ jsou funkce $\frac{x^2-2\sin^3 x}{\sin^2 x}$, $2x + \sin x$, $\frac{\sin x - x^4}{x^2-2\sin^3 x}$ apod.

§ 14.6 Goniometrické funkce

Volba substituce

Nechť je integrand (integrovaná funkce) typu $R(\sin x, \cos x)$. Je-li integrand lichá funkce vůči sinu, volíme substituci $t = \cos x$. Je-li lichá vůči kosinu, volíme $t = \sin x$.

Poznámka. Připomeňme

$$\begin{aligned}
&\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \\
&\quad \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \\
&\quad \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x.
\end{aligned}$$

Tedy např. $\cos^6 x = (1 - \sin^2 x)^3$.

Příklad 123.

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^5 x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \sin x \\ \mathrm{d}t = \cos x \, \mathrm{d}x \end{array} \right| = \int \sin^2 x \cos^4 x \cos x \, \mathrm{d}x$$

$$= \int \sin^2 x (\cos^2 x)^2 \cos x \, \mathrm{d}x = \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x)^2 \cos x \, \mathrm{d}x$$

$$= \int t^2 (1 - t^2)^2 \, \mathrm{d}t = \int t^2 - 2t^4 + t^6 \, \mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} - 2\frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + c$$

$$= \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{2}{5} \sin^5 x + \frac{1}{7} \sin^7 x + c.$$

§ 14.7 Iracionální funkce

Volba substituce I

Je-li je integrand typu $R(x, \sqrt[n]{ax+b})$, $n \in \mathbb{N}$, volíme substituci

$$t^n = ax + b, \qquad \bigl(t = \sqrt[n]{ax+b}\bigr).$$

Tím převedeme integrál na integrál z racionální lomené funkce.

Příklad 124.

$$\int \frac{2x}{\sqrt[3]{4x-1}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t^3 = 4x - 1 \Rightarrow x = \frac{t^3+1}{4} \\ 3t^2\,\mathrm{d}t = 4\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{3}{4}t^2\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{2 \cdot \frac{t^3+1}{4}}{t} \cdot \frac{3}{4}t^2\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{4} \int \frac{(t^3+1)t^2}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{8} \int (t^3+1)t\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{3}{8} \int t^4 + t\,\mathrm{d}t = \frac{3}{8}\left(\frac{t^5}{5} + \frac{t^2}{2}\right) + c$$

$$= \frac{3}{8}\left[\frac{1}{5}\Bigl(\sqrt[3]{4x-1}\Bigr)^5 + \frac{1}{2}\Bigl(\sqrt[3]{4x-1}\Bigr)^2\right] + c$$

$$= \frac{3}{80}\sqrt[3]{(4x-1)^2}\Bigl[2(4x-1) + 5 \cdot 1\Bigr] + c$$

$$= \frac{3}{80}\sqrt[3]{(4x-1)^2} \cdot (8x+3) + c.$$

Volba substituce II

Je-li je integrand typu $R(x, \sqrt[n_1]{x}, \sqrt[n_2]{x}, \ldots, \sqrt[n_k]{x})$, $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, volíme substituci

$$t^s = x, \qquad \bigl(t = \sqrt[s]{x}\bigr),$$

kde s je nejmenším společným násobkem čísel $n_1, \ldots, n_k$. Tím převedeme integrál z iracionální funkce na integrál z racionální lomené funkce.

Příklad 125.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt[5]{x} - 3\sqrt{x}}{x}\,\mathrm{d}x &= \left| \begin{array}{c} t^{10} = x \Rightarrow t = \sqrt[10]{x} \\ 10t^9\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x \end{array} \right| \\
&= \int \frac{t^{10/5} - 3 \cdot t^{10/2}}{t^{10}} \cdot 10t^9\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{t^2 - 3t^5}{t^{10}} 10t^9\,\mathrm{d}t = 10 \int t - 3t^4\,\mathrm{d}t \\
&= 10\left(\frac{t^2}{2} - 3\frac{t^5}{5}\right) + c \\
&= 5\sqrt[10]{x^2} - 6\sqrt[10]{x^5} + c = 5\sqrt[5]{x} - 6\sqrt{x} + c.
\end{aligned}
$$

§ 14.8 Příklady k procvičení

Příklad 126. *Spočtěte integrály:*

(i) $\int 6x^2 - \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x$,

(ii) $\int \sqrt[3]{x^2} \cdot (x^2+1)\,\mathrm{d}x$,

(iii) $\int \dfrac{2x^3 + 4x - 8}{x^2}\,\mathrm{d}x$,

(iv) $\int \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x - 3}\,\mathrm{d}x$.

Příklad 127. *Integrujte pomocí substituce*

(i) $\int \cos\left(\frac{3}{2}x\right)\mathrm{d}x$,

(ii) $\int \frac{3}{\sqrt{2-8x}}\,\mathrm{d}x$,

(iii) $\int \frac{4}{2x-1}\,\mathrm{d}x$,

(iv) $\int 5^{3x}\,\mathrm{d}x$,

(v) $\int \frac{1}{4x^2+1}\,\mathrm{d}x$

Příklad 128. *Pomocí metody per partes integrujte*

(i) $\int x^2\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$,

(ii) $\int x^2 \ln x\,\mathrm{d}x$.

Příklad 129. *S použitím vzorce*

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c$$

spočítejte integrály

(i) $\int \frac{4x}{2x^2-8}\,\mathrm{d}x$,

(ii) $\int \frac{x}{2x^2-8}\,\mathrm{d}x$,

(iii) $\int \mathrm{tg}\, x\,\mathrm{d}x$.

Příklad 130. *S použitím vzorce*

$$\int \frac{1}{A^2 + x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{A}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{A} + c$$

spočítejte integrál

$$\int \frac{1}{16+9x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 131. *S použitím vzorce*

$$\int \frac{1}{A^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2A}\ln\left|\frac{A+x}{A-x}\right| + c$$

spočítejte integrál

$$\int \frac{3}{16-9x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 132. *S použitím vzorce*

$$\int \frac{1}{\sqrt{A^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{A} + c$$

spočítejte integrál

$$\int \frac{-7}{\sqrt{16-3x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 133. *S použitím vzorce*

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm B}}\,\mathrm{d}x = \ln|x+\sqrt{x^2\pm B}| + c$$

spočítejte integrál

$$\int \frac{2}{\sqrt{4x^2-3}}\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 134. *Použitím doplnění na čtverec spočítejte integrál*

$$\int \frac{3}{2x^2+8x-10}\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 135. *Integrujte.*

(i) $\int 8x^3-2x^2+x-1\,\mathrm{d}x$,

(ii) $\int (x+3)(2x-7)\,\mathrm{d}x$,

(iii) $\int \frac{2x^6-3x^3+6x-2}{4x^2}\,\mathrm{d}x$,

(iv) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[4]{x^3}}\,\mathrm{d}x$,

(v) $\int \frac{-2}{\sqrt{5-5x^2}}\,\mathrm{d}x$,

(vi) $\int \frac{14^x-5\cdot 7^x}{4\cdot 7^x}\,\mathrm{d}x$.

Příklad 136. *Integrujte.*

(i) $\int (2x+3)\sin x\,\mathrm{d}x$,

(ii) $\int (x^2+3x-1)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$,

(iii) $\int \ln x\,\mathrm{d}x$,

(iv) $\int x\ln x\,\mathrm{d}x$,

(v) $\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,\mathrm{d}x$,

‡*(vi)* $\int \mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x$.

Příklad 137. *Integrujte.*

(i) $\int \frac{7}{3x}\,\mathrm{d}x$,

(ii) $\int \frac{2}{5-9x}\,\mathrm{d}x$,

(iii) $\int \sqrt{3-4x}\,\mathrm{d}x$,

(iv) $\int \sqrt[5]{2x-3}\,\mathrm{d}x$,

(v) $\int \frac{\sqrt{x}}{2x+3}\,\mathrm{d}x$, $\quad$ [*subst.* $x = t^2$]

(vi) $\int (12x+3)^{-4}\,\mathrm{d}x$,

(vii) $\int \frac{3x}{\sqrt{3x^2-5}}\,\mathrm{d}x$,

(viii) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x$,

(ix) $\int \mathrm{tg}\, x\,\mathrm{d}x$,

(x) $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+7}\,\mathrm{d}x$.

Příklad 138. *Integrujte.*

(i) $\int \frac{\mathrm{e}^x}{4-\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$,

(ii) $\int \frac{\mathrm{arctg}^3\, x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$,

(iii) $\int \mathrm{e}^{-x^4}\, x^3\,\mathrm{d}x$,

(iv) $\int \sin x \cos^2 x\,\mathrm{d}x$,

(v) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$,

(vi) $\int \cos x\, \mathrm{cotg}^2\, x\,\mathrm{d}x$.

Příklad 139. *Integrujte.*

(i) $\int \frac{\sqrt[20]{x}-2\sqrt[30]{x}}{2\sqrt[15]{x}-\sqrt[12]{x}}\,\mathrm{d}x$,

(ii) $\int \frac{2}{\sqrt{4-9x^2}}\,\mathrm{d}x$,

(iii) $\int \frac{4}{2x^2+8x+11}\,\mathrm{d}x$,

(iv) $\int \frac{3}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,\mathrm{d}x$,

(v) $\int \frac{\sqrt{3x-1}}{2x}\,\mathrm{d}x$,

(vi) $\int 7x\sqrt[4]{2x+1}\,\mathrm{d}x$.

Příklad 140. *Integrujte.*

(i) $\int \frac{2}{3x-4}\,\mathrm{d}x$,

(ii) $\int \frac{2}{(3x-4)^3}\,\mathrm{d}x$,

(iii) $\int \frac{2}{x^2-2x+3}\,\mathrm{d}x$,

(iv) $\int \frac{2x-2}{x^2-2x+3}\,\mathrm{d}x$,

(v) $\int \frac{4x+3}{x^2-2x+3}\,\mathrm{d}x$,

(vi) $\int \frac{3x-1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$.

§ 14.9 Wolfram|Alpha

- Neurčitý integrál.

```
integrate x^5 ln(x)

integrate sqrt(ln(x))/x
```

Kapitola

15 Určitý (Riemannův) integrál

§ 15.1 Definice a vlastnosti

Definice 57 (Dělení intervalu)**.**

Uvažujme uzavřený interval $I = [a, b], -\infty < a < b < \infty$. *Dělením intervalu* I rozumíme konečnou posloupnost $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ bodů z intervalu I takových, že

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

čísla $x_0, x_1, \dots, x_n$ nazýváme *dělící body*.

Normou $\nu(D)$ dělení D rozumíme maximální vzdálenost sousedních dělících bodů, tedy

$$\nu(D) = \max\{x_i - x_{i-1}, i = 1, \dots, n\}.$$

Definice 58 (Integrální součet)**.**

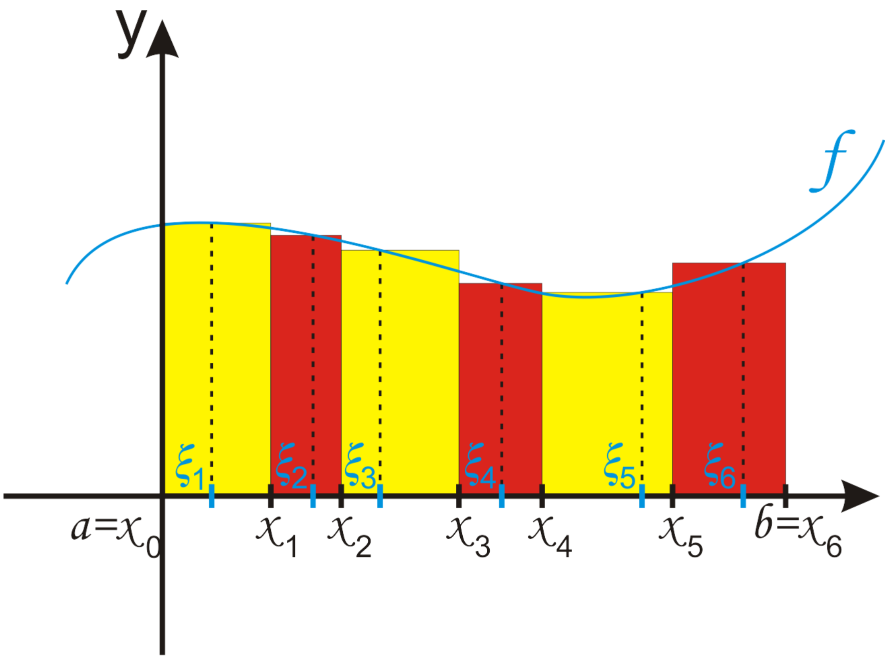
Nechť f je funkce definovaná a ohraničená na uzavřeném intervalu $I = [a, b]$ a nechť $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ je dělení intervalu I a $R = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ je posloupnost čísel z intervalu I takových, že

$$x_{i-1} \le \xi_i \le x_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Potom součet

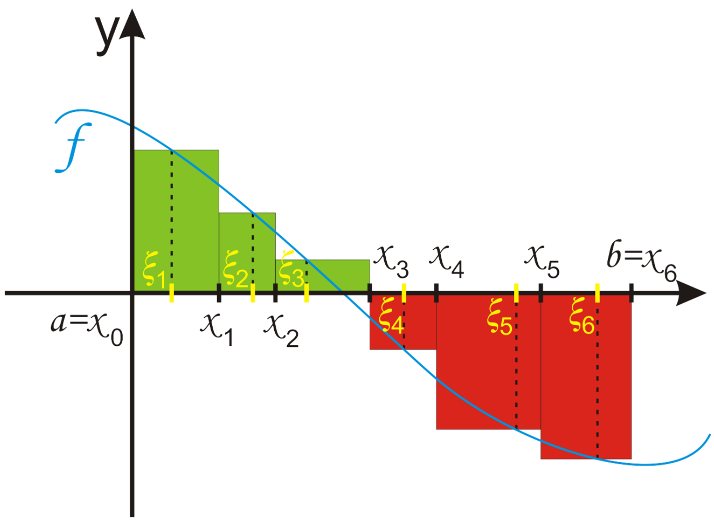
$$\sigma(f, D, R) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

nazýváme *integrální součet* funkce f příslušný dělení D a výběru reprezentantů R.



Obr. 15.1: Integrální součet kladné funkce.

Jak je vidět na obr. 15.1, geometricky je integrální součet kladné funkce roven součtu obsahů obdélníků, jejichž základny mají délku rovnu délce jednotlivých podintervalů v dělení D a jejichž výška je rovna funkční hodnotě v reprezentantu z příslušného podintervalu. Je-li funkční hodnota v reprezentantu záporná, tedy obdélníček je pod osou x, potom je samozřejmě příspěvek tohoto obdélníčku (podintervalu) do integrálního součtu záporný. Obecně je tedy integrální součet roven součtu obsahů obdélníků nad osou x zmenšený o obsah obdélníků pod ní (viz obr. 15.2).



Obr. 15.2: Integrální součet funkce měnící znaménko.

Definice 59 (Určitý (Riemannův) integrál)**.**

Nechť f je funkce definovaná a ohraničená na uzavřeném intervalu $I = [a, b]$. Dále nechť D_n je posloupnost dělení intervalu I taková, že $\lim_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$ a R_n posloupnost reprezentantů z těchto dělení. Řekneme, že funkce f je Riemannovsky integrovatelná na I, jestliže existuje číslo $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(f, D_n, R_n) = \mathcal{R}.$$

Číslo $\mathcal{R}$ nazýváme *Riemannův (určitý) integrál* funkce f na intervalu I a značíme jej

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Číslo a nazýváme *dolní mez* a číslo b *horní mez* Riemannova integrálu.

Riemannův integrál tedy pro funkci f spojitou na intervalu $I = [a, b]$ získáme takto:

- Interval rozdělíme na podintervaly. Z každého podintervalu vybereme reprezentanta určíme integrální součet.
- Dělení zjemníme (vybereme nové dělení s menší normou) a postup opakujeme.
- Dělení zjemňujeme dokud se integrální součty neustálí. Hodnota, na které se ustálí je Riemannův integrál funkce f na intervalu I.

Věta 45 (Aditivita vzhledem k mezím)**.**

Nechť f je funkce integrovatelná na intervalu $[a, b]$ a nechť $c \in (a, b)$. Potom je f integrovatelná na intervalech $[a, c]$ a $[c, b]$ a platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta 46 (Linearita vzhledem k funkci)**.**

Nechť f a g jsou funkce integrovatelné na intervalu $[a, b]$ a nechť $c \in \mathbb{R}$. Pak platí

$$\int_a^b \big[f(x) + g(x)\big]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Meze integrálu

Nechť $a < b$. Platí

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Věta 47 (Monotonie vzhledem k funkci)**.**

Nechť f a g jsou funkce integrovatelné na intervalu $[a, b]$ takové, že pro $x \in (a, b)$ je $f(x) \leq g(x)$. Pak platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důsledek (Integrál z nezáporné funkce)*.* Uvažujeme-li v předchozí větě $f \equiv 0$ dostaneme, že integrál z funkce nezáporné na celém intervalu, přes nejž integrujeme, je nezáporný.

Poznámka. Obdobné tvrzení snadno obdržíme pro funkci nekladnou.

Věta 48 (Postačující podmínky integrovatelnosti)**.**

Funkce f je Riemannovsky integrovatelná na intervalu $I = [a, b]$, jestliže splňuje aspoň jednu z následujících podmínek.

- Funkce f je na I spojitá.
- Funkce f je na I monotonní.
- Funkce f je na I ohraničená a má na I konečný počet bodů nespojitosti.

§ 15.2 Výpočet

Věta 49 (Newton–Leibnizova formule)**.**

Nechť je funkce f Riemannovsky integrovatelná na intervalu $I = [a, b]$. Dále nechť je funkce F na intervalu (a, b) primitivní funkce k funkci f a je spojitá na I. Pak platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a).$$

Příklad 141.

$$\int_{-2}^{5} x^2 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{5} = \frac{5^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3} = \frac{133}{3}.$$

Věta 50 (Metoda per partes pro určitý integrál)**.**

Nechť jsou funkce u, v a jejich derivace spojité na intervalu $[a, b]$. Pak platí

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 142.

$$\int_1^3 x \ln x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = x & v = \frac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^3 - \int_1^3 \frac{1}{x}\frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left(\frac{9}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 1\right) - \frac{1}{2}\int_1^3 x\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{9}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{9}{2}\ln 3 - 2$$

Věta 51 (Substituční metoda pro určitý integrál)**.**

Nechť jsou funkce f, φ a φ' spojité na příslušných intervalech a nechť je funkce φ ryze monotonní. Pak platí

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Příklad 143.

$$\int_1^5 \sqrt{2x-1}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{ll} t = 2x-1 & x = 5 \Rightarrow t = 9 \\ \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x & x = 1 \Rightarrow t = 1 \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t & \end{array}\right|$$

$$= \int_1^9 \sqrt{t}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_1^9 t^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^9$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2}{3}\left[t^{\frac{3}{2}}\right]_1^9 = \frac{1}{3}(27-1) = \frac{26}{3}$$

Příklad 144.

$$\int_0^1 x^2(5-2x^3)^4\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{ll} t = 5-2x^3 & x = 1 \Rightarrow t = 3 \\ \mathrm{d}t = -6x^2\,\mathrm{d}x & x = 0 \Rightarrow t = 5 \\ x^2\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{6}\,\mathrm{d}t & \end{array}\right|$$

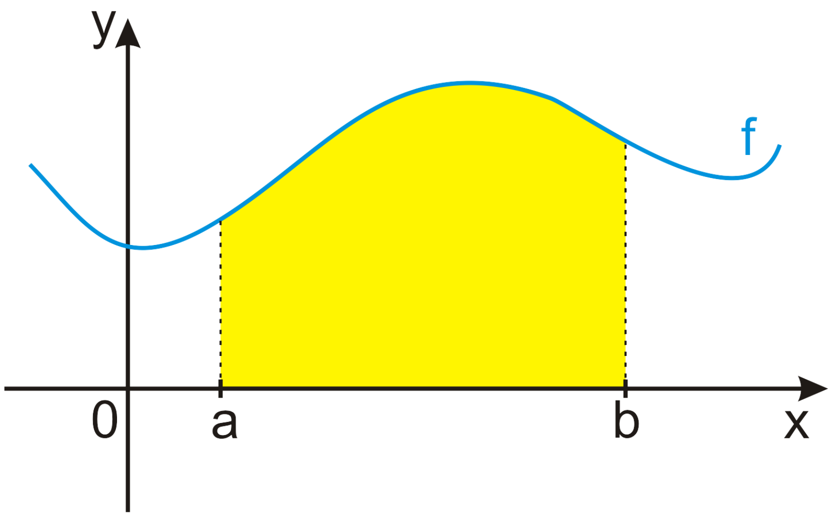
$$= \int_5^3 t^4\left(-\frac{1}{6}\right)\mathrm{d}t = -\frac{1}{6}\int_5^3 t^4\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}\int_3^5 t^4\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{t^5}{5}\right]_3^5 = \frac{1}{30}(5^5-3^5) = \frac{2882}{30} = \frac{1441}{15}$$

§ 15.3 Geometrické aplikace

★ Plocha podgrafu kladné funkce na intervalu $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

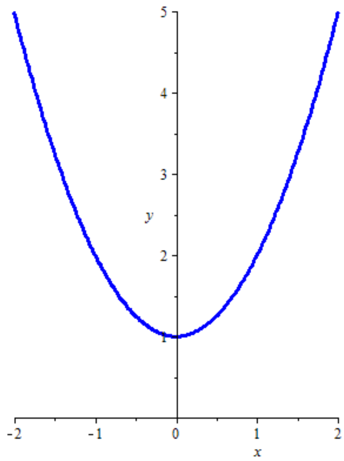


Obr. 15.3: Plocha podgrafu kladné funkce.

Příklad 145. *Určete plochu podgrafu funkce $f(x) = x^2 + 1$ na intervalu $I = [-1, 2]$.*

Protože $x^2 + 1 = 0$ nemá žádné reálné kořeny, je tato funkce buď stále kladná, nebo stále záporná. Dosazením libovolného čísla zjistíme, který z těchto případů nastává. Neboť $f(0) = 1 > 0$, funkce je kladná.

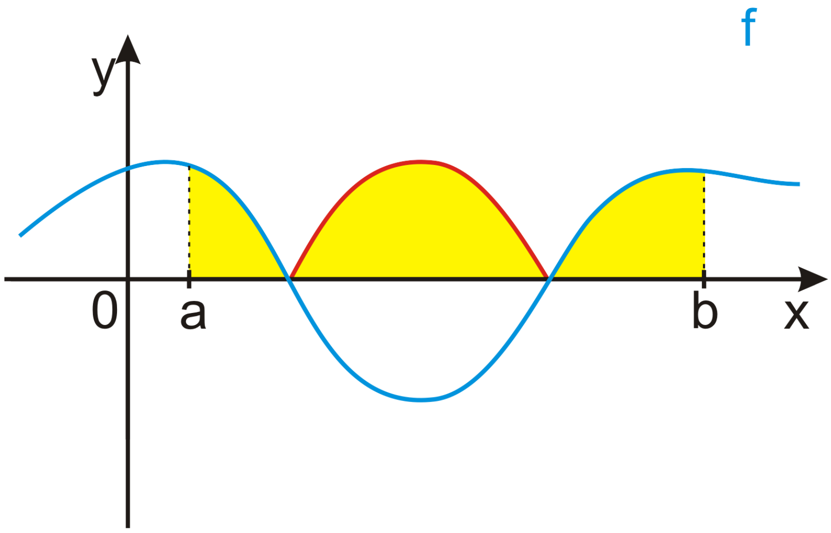
$$\begin{aligned} P &= \int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{2} x^2 + 1\,\mathrm{d}x \\ &= \ldots = 6 \end{aligned}$$



Obr. 15.4: Graf funkce $f(x) = x^2 + 1$.

★ Plocha mezi grafem funkce f a osou x na intervalu $[a, b]$:

$$\int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x.$$

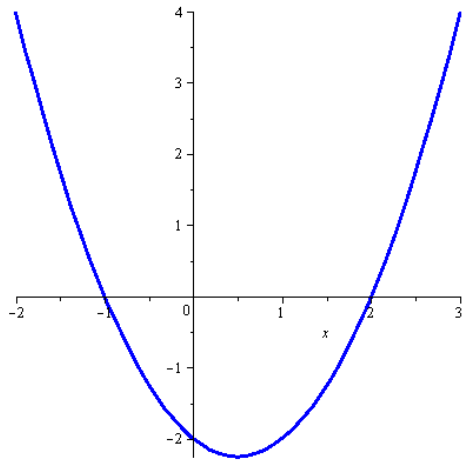


Obr. 15.5: Plocha mezi grafem funkce f měnící znaménko a osou x.

Příklad 146. *Určete plochu ohraničenou grafem funkce $f(x) = x^2 - x - 2$ a osou x na intervalu $I = [-2, 3]$.*

Protože $x^2 - x - 2 = 0$ má kořeny $x_1 = -1$ a $x_2 = 2$, snadno zjistíme, že funkce f je na intervalu I kladná pro $x \in (-2, -1) \cup (2, 3)$ a záporná pro $x \in (-1, 2)$.

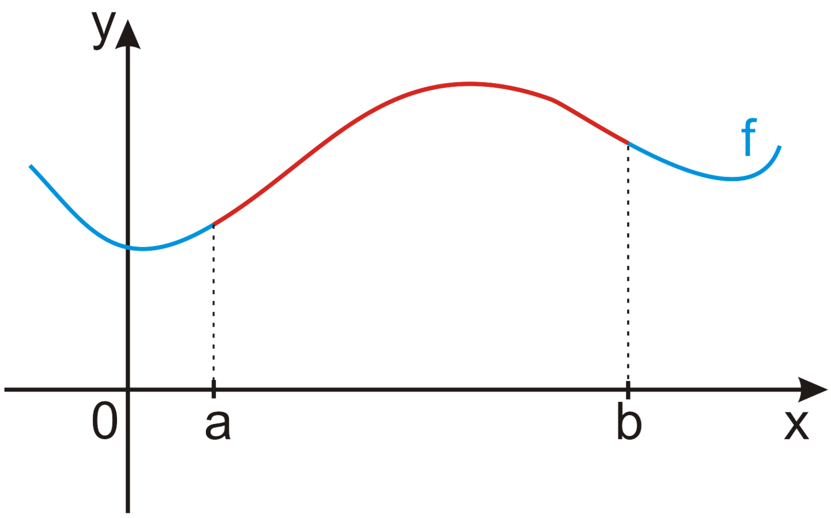
$$\begin{aligned} P &= \int_{-2}^{3} |f(x)| \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{-2}^{-1} f(x) \, \mathrm{d}x + \int_{-1}^{2} (-f(x)) \, \mathrm{d}x \\ &\quad + \int_{2}^{3} f(x) \, \mathrm{d}x \\ &= \ldots = \frac{49}{6} \end{aligned}$$



Obr. 15.6: Graf funkce $f(x) = x^2 - x - 2$.

★ Délka křivky grafu funkce f na intervalu $[a, b]$:

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$



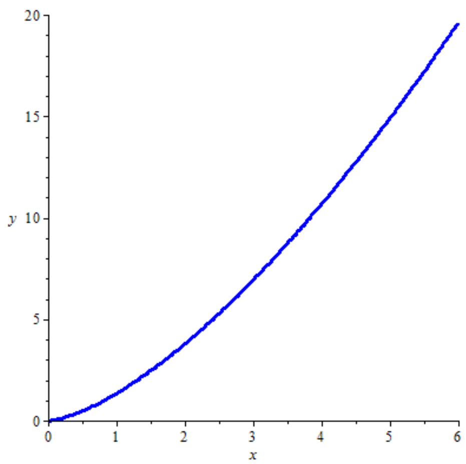
Obr. 15.7: Délka grafu funkce.

Příklad 147. *Určete délka křivky grafu funkce* $f(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}$ *na intervalu* $I = [0, 6]$.

$$\ell = \int_0^6 \sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^6 \sqrt{1 + 4x}\,\mathrm{d}x$$

$$\left| \begin{array}{ll} t = 1 + 4x & x = 6 \Rightarrow t = 25 \\ \mathrm{d}t = 4\,\mathrm{d}x & x = 0 \Rightarrow t = 1 \end{array} \right| = \frac{1}{4}\int_1^{25} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t$$

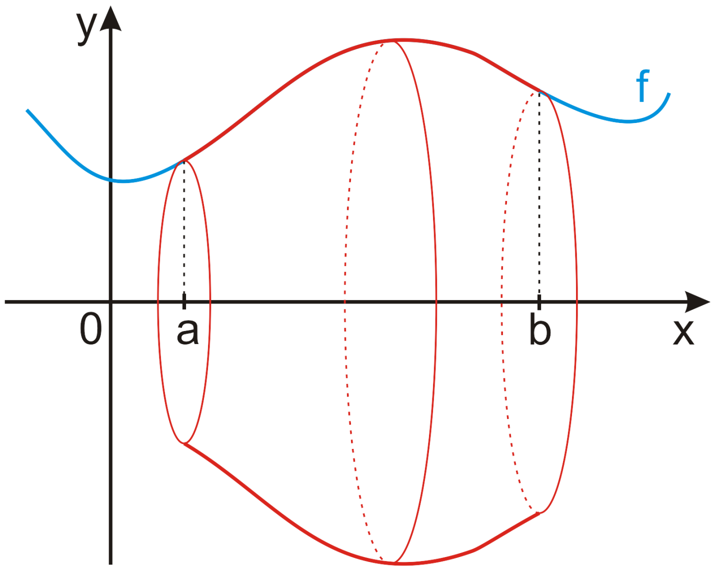
$$= \ldots = \frac{62}{3}$$



Obr. 15.8: Graf funkce $f(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}$.

★ Objem a povrch pláště rotačního tělesa (rotace nezáporné funkce f kolem osy x na intervalu $[a, b]$):

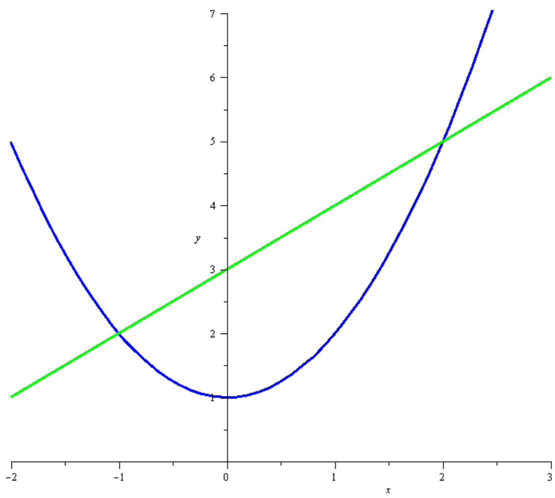
$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x, \quad V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$



Obr. 15.9: Vznik rotačního tělesa.

Příklad 148. *Určete plochu ohraničenou grafy funkcí $f(x) = x^2 + 1$ a $g(x) = x + 3$.*

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ x^2 + 1 &= x + 3 \\ x^2 - x - 2 &= 0 \\ x_1 = -1&, x_2 = 2 \end{aligned}$$

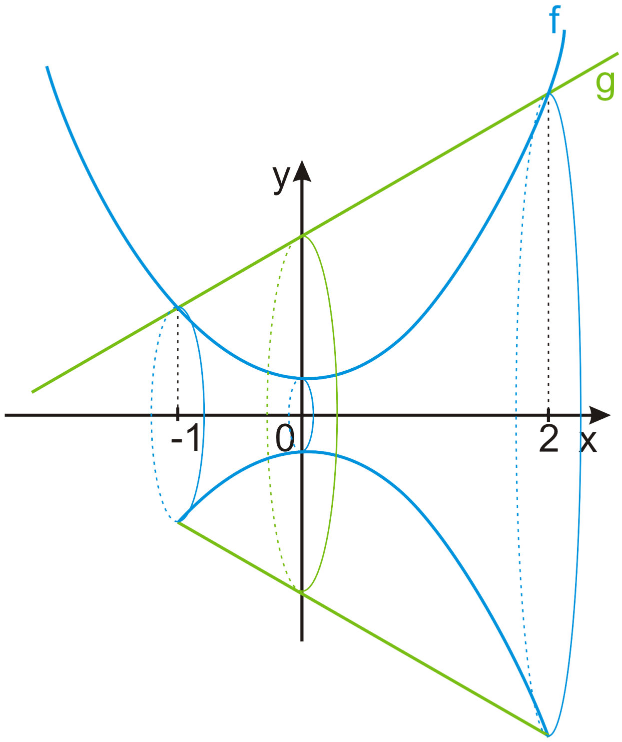


Obr. 15.10: Funkce f a g.

$$\int_{-1}^{2} g(x) - f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} (x+3) - (x^2+1)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} 2 + x - x^2\,\mathrm{d}x = \ldots = \frac{9}{2}.$$

Příklad 149. *Určete objem tělesa vzniklého rotací plochy omezené grafy funkcí $f(x) = x^2+1$ a $g(x) = x+3$ kolem osy x.*

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^{2} g^2(x)\,\mathrm{d}x - \pi \int_{-1}^{2} f^2(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \pi \int_{-1}^{2} (x+3)^2 - (x^2+1)^2\,\mathrm{d}x \\ &= \pi \int_{-1}^{2} 8 + 6x - x^2 - x^4\,\mathrm{d}x \\ &= \ldots = \frac{117}{5}\pi. \end{aligned}$$



Obr. 15.11: Rotace plochy mezi grafy funkcí f a g.

§ 15.4 Příklady k procvičení

Příklad 150. *Integrujte.*

(i) $\int_{-3}^{5} 3x^2 - 5x + 7\,\mathrm{d}x$,

(ii) $\int_{0}^{\pi} x + \sin x\,\mathrm{d}x$,

(iii) $\int_{0}^{1} \frac{3}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$,

(iv) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (2-x)\cos x\,\mathrm{d}x$,

(v) $\int_{-2}^{1} 3x(2x^2-7)^3\,\mathrm{d}x$,

(vi) $\int_{1}^{\mathrm{e}^8} \frac{1}{x\sqrt{\ln x + 1}}\,\mathrm{d}x$,

(vii) $\int_{0}^{2} \frac{5x^2}{\sqrt{2x^3+9}}\,\mathrm{d}x$,

(viii) $\int_{-2}^{0} \frac{x^2}{\mathrm{e}^{x^3}}\,\mathrm{d}x$.

Příklad 151. *Pomocí výše uvedených vzorců:*

(i) Spočtěte objem tělesa vzniklého rotací části sinusoidy na intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$ *kolem osy* x.

(ii) Spočtěte povrch pláště tělesa vzniklého rotací přímky $y = 2x+1$ *kolem osy* x *na intervalu* $[0, 1]$.

(iii) Určete celý povrch tělesa z bodu (ii).

Příklad 152. *Jsou dány funkce $f(x) = 2 - x$ a $g(x) = x^2$. Určete:*

(i) Obsah plochy ohraničený jejich grafy.

(ii) Objem rotačního tělesa vzniklého rotací této plochy kolem osy x.

Příklad 153. *Jsou dány funkce*

$$f(x) = x^2 + 1, \qquad g(x) = 2x + 4.$$

Načrtněte obrázek a počítaný objekt na obrázku vyznačte.

(i) Vypočítejte obsah plochy ohraničené grafy funkcí f a g.

(ii) Přímka g vytíná z paraboly f ohraničený kus. Jaký je objem tělesa, které vznikne rotací tohoto kusu paraboly f kolem osy x?

(iii) Parabola f ohraničuje kus přímky g. Jaký je povrch pláště komolého kužele, který vznikne rotací tohoto kusu přímky g kolem osy x?

(iv) Určete objem tělesa, které vznikne rotací plochy těmito funkcemi omezené kolem osy x.

(v) Přímka g vytíná z paraboly f ohraničený kus. Napište integrál popisující délku tohoto kusu paraboly f.

(vi) Parabola f ohraničuje kus přímky g. Určete délku tohoto kusu přímky g.

§ 15.5 Wolfram|Alpha

- Určitý integrál.

```
integrate (x^3-2)^2 cos(x) for x from 2 to 5

integrate sin(x)/(cos(x)+2) for x from -pi to 0
```

Kapitola

16 Aproximace

§ 16.1 Algebraická rovnice

Algebraická rovnice je rovnice typu

$$P_n(x) = 0,$$

kde $P_n(x)$ je polynom stupně n v proměnné x. Protože řešit algebraickou rovnici je totéž, jako hledat kořeny polynomu P_n, známe již způsob, jak najít všechny celočíselné kořeny takové rovnice (dělitelé absolutního člene, Hornerovo schéma). Připomeňme, že je-li komplexní číslo $z = \alpha + \beta i$ kořenem polynomu P, pak je jeho kořenem i číslo komplexně sdružené $\bar{z} = \alpha - \beta i$. Protože (dle základní věty algebry) má polynom stupně n v $\mathbb{C}$ právě n kořenů (počítáno včetně násobnosti), má polynom lichého stupně aspoň jeden reálný kořen.

Věta 52 (Odhad velikosti kořenů)**.**

Buď

$$P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

normovaný polynom stupně n.
Pak pro kořeny $x_1, \ldots, x_n$ rovnice

$$P_n(x) = 0$$

platí

$$|x_i| \leq 1 + A, \quad (i = 1, \ldots, n),$$

kde

$$A = \max\{|a_{n-1}|, |a_{n-2}|, \ldots, |a_1|, |a_0|\}.$$

Věta 53 (Descartes I)**.**

Počet kladných kořenů polynomu $P_n(x)$ (počítáno s násobností) je roven počtu znaménkových změn v posloupnosti jeho koeficientů nebo o sudé číslo menší.

Věta 54 (Descartes II)**.**

Počet záporných kořenů polynomu $P_n(x)$ (počítáno s násobností) je roven počtu znaménkových změn v posloupnosti koeficientů polynomu $P_n(-x)$ nebo o sudé číslo menší.

Příklad 154. *Použijte předchozí tvrzení na polynom*

$$P(x) = x^7 - 14x^5 + 3x^2 + 1.$$

- st $P = 7 \quad \Rightarrow \quad P$ má (včetně násobnosti) 7 kořenů, nejméně jeden je reálný (použita Věta 14).
- Koeficienty P jsou (nuly pro přehlednost vynecháme) $1, -14, 3, 1 \quad \Rightarrow \quad$ 2 znaménkové změny $\quad \Rightarrow \quad$ 2 nebo 0 kladných kořenů (použita Věta 53).
- $P(-x) = -x^7 + 14x^5 + 3x^2 + 1$. Koeficienty $P(-x)$ jsou (nuly pro přehlednost vynecháme) $-1, 14, 3, 1 \quad \Rightarrow \quad$ 1 znaménková změna $\quad \Rightarrow \quad$ 1 záporný kořen (použita Věta 54).
- $A = \max\{|-14|, |3|, |1|\} = 14 \quad \Rightarrow \quad |x_i| \leq 15, \quad i = 1, \ldots, 7$ (použita Věta 52).

Celkem:
Pro kořeny polynom $P(x) = x^7 - 14x^5 + 3x^2 + 1$ jsou 2 možnosti.

1. 1 záporný $\mathbb{R}$ a 6 $\mathbb{C}$,
2. 1 záporný $\mathbb{R}$, 2 kladné $\mathbb{R}$ a 4 $\mathbb{C}$.

Přičemž všechny reálné kořeny leží v intervalu $[-15, 15]$.
(Velikost všech kořenů, i komplexních, je ≤ 15, $|z| = |\alpha + \beta i| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.)

§ 16.2 Metoda bisekce (půlení)

Definice 60 (Kořen s přesností ε)**.**

Číslo $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ nazýváme *kořen polynomu $P(x)$ s přesností ε* $(0 < \varepsilon \in \mathbb{R})$, jestliže skutečný kořen polynomu $P(x)$ leží v intervalu $(\tilde{x} - \varepsilon, \tilde{x} + \varepsilon)$.

Např.:

$$P(x) = 4x^4 - 31x^3 - 121x^2 + 244x + 660, \quad P(2) = 480, \quad P(3) = -210,$$

tedy (podle první Bolzanovy věty) v intervalu $(2, 3)$ má polynom P kořen. Střed tohoto intervalu, tj. číslo $\tilde{x} = 2,5$, je tedy kořenem polynomu P s přesností $\varepsilon = 0,5$.

(Skutečným kořenem je číslo $2,75$.)

Z předchozího příkladu je zřejmé, že kořen lichého stupně polynomu P lze určit s libovolnou přesností tak, že najdeme interval, ve kterém leží jen tento kořen (např. pomocí věty o odhadu velikosti kořenů a užitím Hornerova schématu).

Označme si tento interval jako (a, b). Střed tohoto intervalu $\tilde{x}_1 = \frac{a+b}{2}$ je prvním odhadem kořene, tedy je kořenem daného polynomu s přesností $\frac{b-a}{2}$. Navíc zřejmě $P(a) \cdot P(b) < 0$ (hodnoty polynomu P v krajních bodech intervalu (a, b) mají opačná znaménka).

Spočteme tedy hodnotu $P(\tilde{x}_1) = P(\frac{a+b}{2})$ a z intervalů $(a, \frac{a+b}{2}), (\frac{a+b}{2}, b)$ vybereme ten, v jehož krajních bodech nabývá polynom P opačná znaménka, protože kořen jistě leží v této polovině intervalu.

Střed tohoto podintervalu označíme jako druhé přiblížení ke kořeni $\tilde{x}_2$, tedy jde o kořen polynomu P s přesností $\frac{b-a}{4}$. Stejně můžeme postupovat libovolně dlouho a získat tak kořen polynomu s libovolnou přesností.

Poznámka.

- Jestliže kdykoli dostaneme $P(\tilde{x}_i) = 0$, pak je číslo $\tilde{x}_i$ (přesným) kořenem polynomu P.
- Metodu bisekce je nejvhodnější používat na aproximaci jednonásobných kořenů. Existují metody, které převedou daný polynom na jiný, který má stejné kořeny, ale všechny jednonásobné.
- Existují také různá vylepšení metody bisekce (např. metoda zlatého řezu), pomocí kterých je možné kořen s danou přesností najít rychleji.

Příklad 155. *Odhadněte nezáporný kořen polynomu $P(x) = x^3 - 3x - 1$ s přesností aspoň $0,02$.*

Nejprve pomocí věty o odhadu velikosti kořenů uděláme základní odhad:

$$\max\{1, 3, 1\} = 3 \qquad \Rightarrow \qquad x_i \in [-4, 4].$$

Nás zajímají jen kladné kořeny, proto se omezíme na interval $[0, 4]$ a na něm provedeme tzv. separaci kořenů — tj. interval rozdělíme na větší počet subintervalů a v dělících bodech určíme hodnotu polynomu P.

x	0	1	2	3	4
$P(x)$	-1	-3	1	17	51

Vzhledem ke znaménkové změně (používáme první Bolzanovu větu) se hledaný kořen nachází v intervalu $(1,2)$. (Číslo 1 ani 2 kořenem není, neboť v nich nemá polynom hodnotu nula.)

Průběh bisekce přehledně shrňme do tabulky.

a	$\tilde{x}_i = \frac{a+b}{2}$	b	$P(a)$	$P(\tilde{x}_i)$	$P(b)$	chyba $\left(\frac{b-a}{2}\right)$
1	1,5	2	$-$	$-$	$+$	0,5
1,5	1,75	2	$-$	$-$	$+$	0,25
1,75	1,875	2	$-$	$-$	$+$	0,125
1,875	1,9375	2	$-$	$+$	$+$	0,0625
1,875	1,90625	1,9375	$-$	$+$	$+$	0,03125
1,875	1,890625	1,90625				0,015625

Řešením zadaného problému je tedy číslo $1,890625$, které je kořenem polynomu P s přesností $0,015625$.

§ 16.3 Taylorův polynom

Věta 55 (Taylorova věta)**.**

Nechť má funkce f v okolí bodu x_0 vlastní derivace až do řádu $n+1$ pro nějaké $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak pro všechna x z tohoto okolí platí

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

kde ξ je vhodné číslo ležící mezi x_0 a x.

Vynecháme-li zbytek $R_n(x)$, obdržíme tzv. *Taylorův polynom*:

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i.$$

Pokud položíme $x_0 = 0$, získáme tzv. *Maclaurinův polynom*:

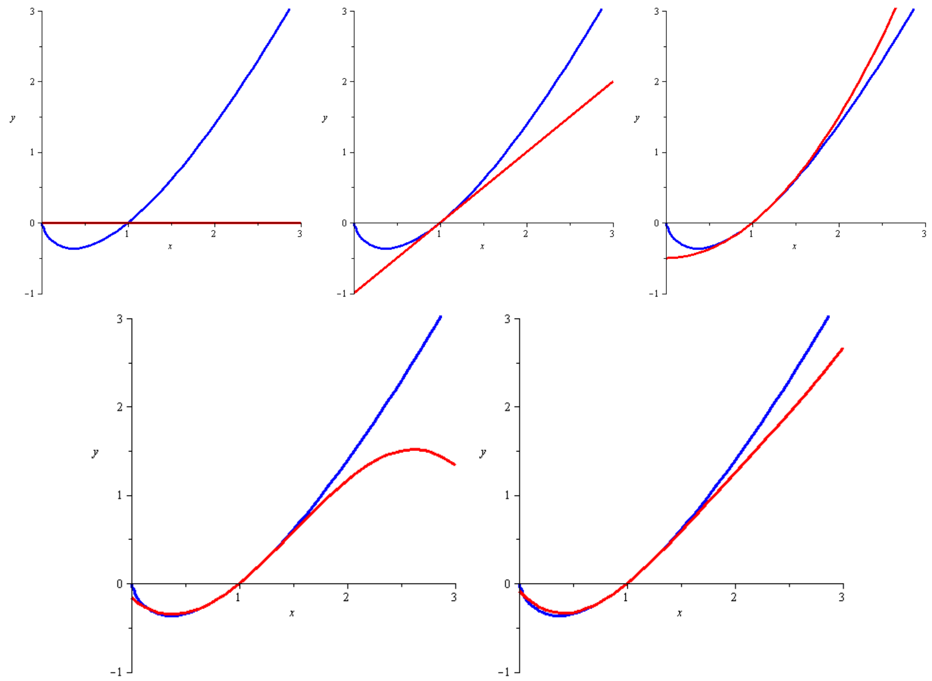
$$f(x) \approx \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i.$$

Příklad 156. *Určete Taylorův polynom 4. řádu se středem v bodě $x_0 = 1$ funkce $f(x) = x \ln x$.*

$$f'(x) = 1 + \ln x,\ f''(x) = \tfrac{1}{x},\ f'''(x) = \tfrac{-1}{x^2},\ f^{(4)}(x) = \tfrac{2}{x^3}.$$
$$f(1) = 0,\ f'(1) = 1,\ f''(1) = 1,\ f'''(1) = -1,\ f^{(4)}(1) = 2.$$

Tedy

$$\begin{aligned} T(x) &= 0 + \tfrac{1}{1!}(x-1) + \tfrac{1}{2!}(x-1)^2 + \tfrac{-1}{3!}(x-1)^3 + \tfrac{2}{4!}(x-1)^4 \\ &= \tfrac{1}{12}(x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 10x - 3). \end{aligned}$$



Obr. 16.1: Graf Taylorova polynomu funkce $f(x) = x \ln x$ řádu $0 - 4$.

Příklad 157. *Určete Maclaurinův polynom 5. řádu funkce $f(x) = \cos x$.*

$$f(x) = \cos x,\ f'(x) = -\sin x,\ f''(x) = -\cos x,\ f'''(x) = \sin x,\ f^{(4)} = \cos x,\ f^{(5)} = -\sin x.$$
$$f(0) = 1,\ f'(0) = 0,\ f''(0) = -1,\ f'''(0) = 0,\ f^{(4)}(0) = 1,\ f^{(5)}(0) = 0.$$

Tedy

$$\begin{aligned} M(x) &= 1 + \tfrac{0}{1!}x + \tfrac{-1}{2!}x^2 + \tfrac{0}{3!}x^3 + \tfrac{1}{4!}x^4 + \tfrac{0}{5!}x^5 \\ &= \tfrac{1}{24}x^4 - \tfrac{1}{2}x^2 + 1. \end{aligned}$$

§ 16.4 Lineární interpolace – Lagrangeův interpolační polynom

Jsou dány navzájem různé body x_i, $i = 1, \dots, n+1$, a hodnoty funkce f v těchto bodech. Cílem je najít polynom P_n stupně nejvýše n takový, aby platilo $P_n(x_i) = f(x_i)$ pro $i = 1, \dots, n+1$. Body x_i se nazývají *uzly* a polynom P_n *interpolační polynom*.

Věta 56.

Pro $(n+1)$ daných dvojic čísel $[x_i, f(x_i)]$, $i = 1, \dots, n$, $x_i \neq x_k$ pro $i \neq k$, existuje právě jeden interpolační polynom P_n (stupně nejvýše n) takový, že platí $P_n(x_i) = f(x_i)$ pro $i = 1, \dots, n$.

Definice 61.

Lagrangeův interpolační polynom definujeme vztahem

$$P_n(x) = \ell_1(x)f(x_1) + \ell_2(x)f(x_2) + \cdots + \ell_{n+1}(x)f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \ell_i(x)f(x_i),$$

kde polynomy $\ell_i(x)$ jsou tvaru

$$\ell_i(x) = \frac{(x - x_1)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_{n+1})}{(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_{n+1})}.$$

Příklad 158. *Pro funkci zadanou tabulkou najděte interpolační polynom.*

x_i	*0*	*1*	*2*	*3*
$f(x_i)$	*1*	*2*	*4*	*8*

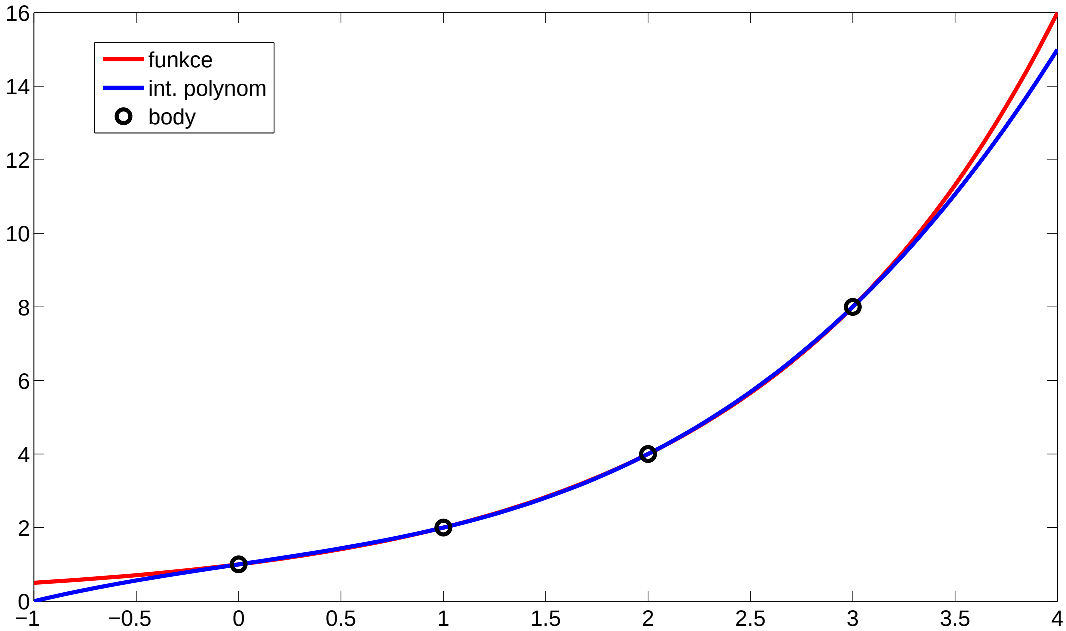
Nejprve sestrojíme polynomy ℓ_i:

$$\ell_1(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} \qquad \ell_3(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)}$$

$$\ell_2(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} \qquad \ell_4(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)}.$$

Pak

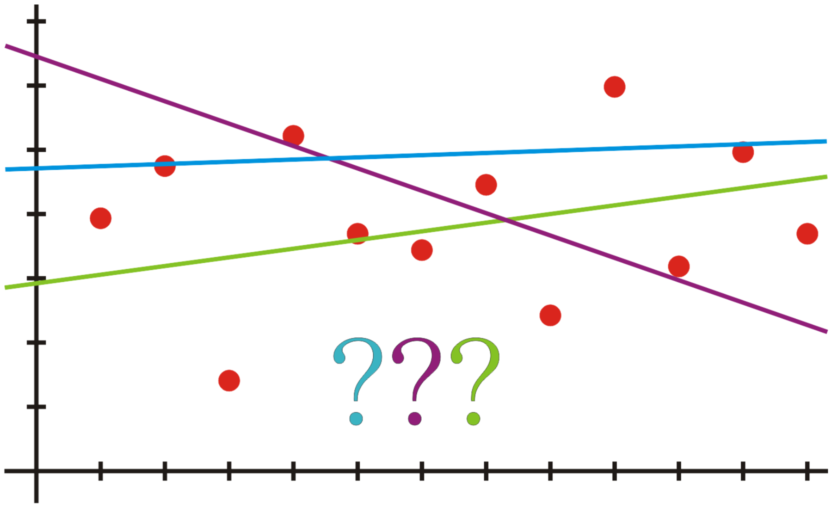
$$
\begin{aligned}
P_3(x) &= 1 \cdot \ell_1(x) + 2 \cdot \ell_2(x) + 4 \cdot \ell_3(x) + 8 \cdot \ell_4(x) \\
&= 1 \cdot \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{-6} + 2 \cdot \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{2} \\
&\qquad\qquad + 4 \cdot \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{-2} + 8 \cdot \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{6} \\
&= \frac{x^3}{6} + \frac{5x}{6} + 1
\end{aligned}
$$



Obr. 16.2: Řešení příkladu 158.

§ 16.5 Lineární regrese – Metoda nejmenších čtverců

Pomocí jednoduché lineární regrese popisujeme vztah mezi proměnnými x a y. Snažíme se najít funkci f tak, aby vztah $y = f(x)$ co nejlépe vystihoval závislost mezi x a y.

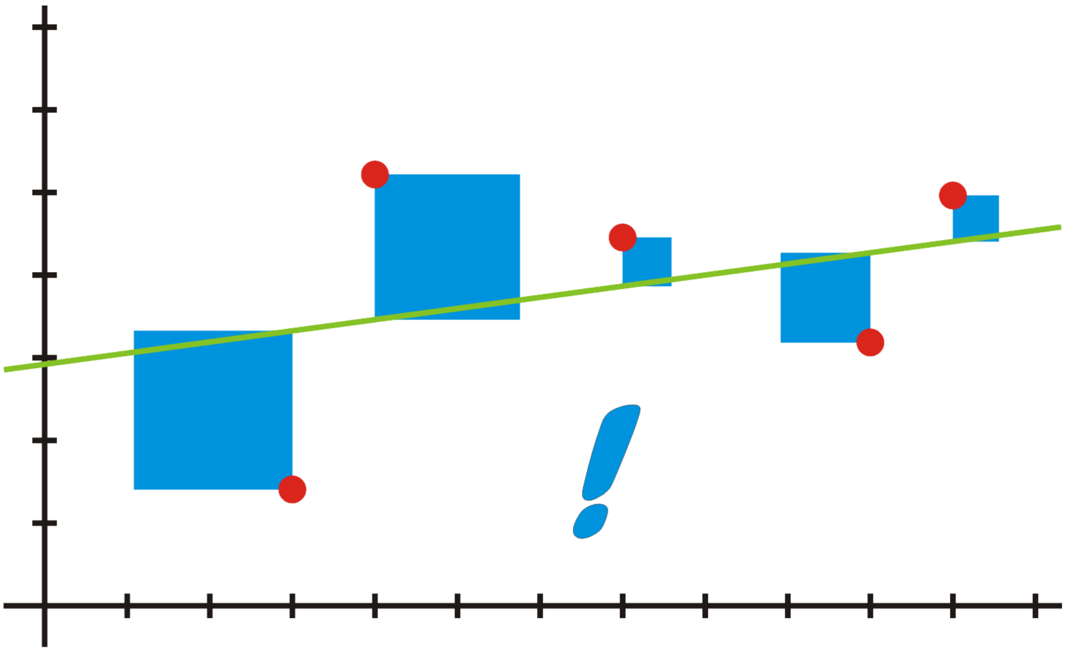


Obr. 16.3: Prokládání přímky množinou bodů.

Měřítkem kvality vybrané funkce f je nejmenší hodnota součtu čtverců vzdáleností

$$\sum_{i=1}^{n} \left[y_i - f(x_i)\right]^2 \to \min .$$

Odtud plyne její název – *metoda nejmenších čtverců*.



Obr. 16.4: Přímka získaná metodou nejmenších čtverců.

Regresní přímka $f(x) = ax + b$ vyjadřuje nejjednodušší závislost x na y. Pomocí metody nejmenších čtverců určíme její parametry a a b:

$$a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i,$$
$$a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + b \cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Například při dávkování léků ovcím je někdy nezbytné vážit ovce, což je ovšem spjato s praktickými problémy. Proto je snaha najít jednodušší způsob, takovým může být například odhad hmotnosti na základě obvodu hrudníku.

Příklad 159. *Deset ovcí bylo zváženo a byl jim změřen obvod hrudníku. Najděte vztah, který nejlépe popisuje závislost hmotnosti na obvodu hrudníku.*

obvod [cm]	*80*	*88*	*88*	*83*	*86*	*80*	*83*	*87*	*86*	*88*
hmotnost [kg]	*30*	*35*	*35*	*33*	*33*	*31*	*31*	*35*	*34*	*35*

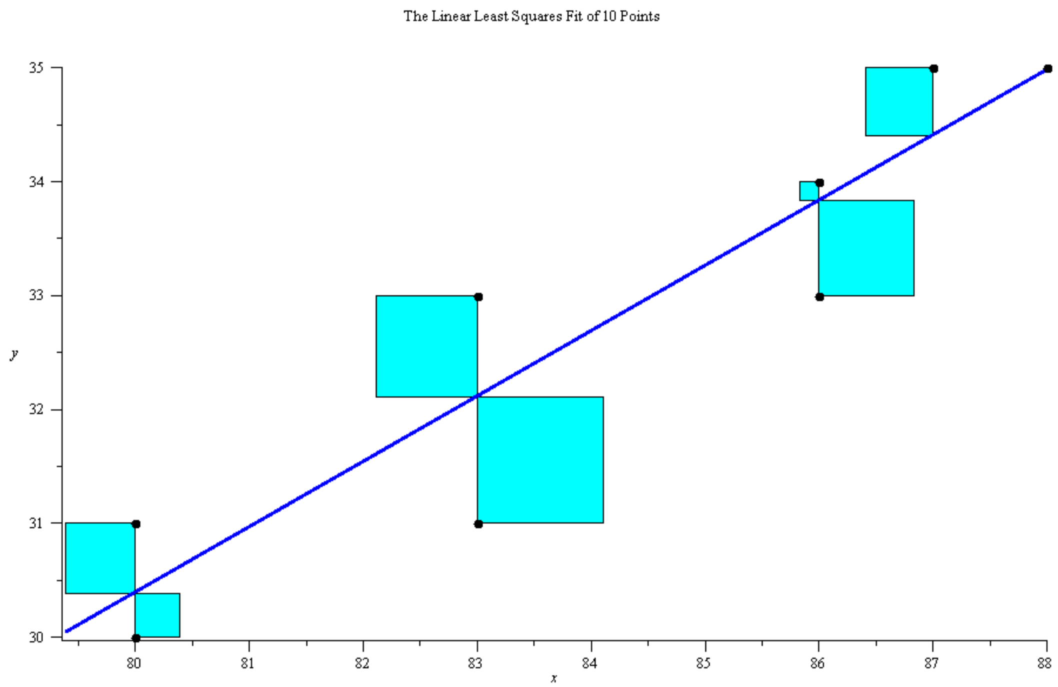
x = obvod hrudníku, y = hmotnost

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 849, \quad \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 72171, \quad \sum_{i=1}^{10} y_i = 332, \quad \sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 28239.$$

Odtud

$$\begin{aligned} 72171a + 849b &= 28239 \\ 849a + 10b &= 332 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a &= 58/101 \doteq 0.57 \\ b &= -1571/101 \doteq -15.55 \end{aligned}$$

Rovnice přímky vyjadřující závislost hmotnosti na obvodu hrudníku je $y = 0.57x - 15.55$.



Obr. 16.5: Řešení příkladu 159.

§ 16.6 Příklady k procvičení

Příklad 160. *Odhadněte všechny reálné kořeny polynomu* $P(x) = 6x^3 + 19x^2 + 2x - 3$ *s chybou nejvíce* $0,05$.

(POZOR! Věta o odhadu velikosti kořenů funguje jen pro normované polynomy.)

Příklad 161. *Pomocí Taylorova polynomu třetího řádu počítaného se středem* $x_0 = \frac{1}{2}$ *odhadněte hodnotu funkce*

$$f(x) = \ln(2x)$$

v bodě $x = 1$.

Příklad 162. *Pomocí Maclaurinova polynomu čtvrtého řádu odhadněte hodnotu funkce*

$$f(x) = x^3 + \cos x$$

v bodě $\frac{1}{2}$.

Příklad 163. *Sestrojte Taylorův polynom čtvrtého řádu se středem* $x_0 = -1$ *pro funkci*

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Příklad 164. *Sestrojte Maclaurinův polynom třetího řádu pro funkci*

$$(a) \quad f(x) = \mathrm{e}^{\cos x}, \qquad\qquad (b) \quad g(x) = \operatorname{arctg} x.$$

Příklad 165. *V tabulce jsou uvedeny čtyři měření. Odhadněte pomocí Lagrangeova interpolačního polynomu hodnotu měřené veličiny v čase* $2,5$. *(Polynom není nutné před dosazením upravovat.)*

čas	*1*	*2*	*3*	*4*
naměřeno	*-2*	*0*	*1*	*1*

Příklad 166. *V následující tabulce jsou uvedeny čtyři hodnoty funkce* f. *Aproximujte tuto funkci pomocí Lagrangeova interpolačního polynomu. Polynom upravte. Poté odhadněte pomocí získaného polynomu hodnotu funkce* f *pro* $x = \frac{1}{2}$.

x	*-1*	*0*	*1*	*2*
$f(x)$	*6*	*-4*	*-2*	*0*

Příklad 167. *Pomocí metody nejmenších čtverců najděte vztah popisující lineární závislost teploty na čase zjištěnou měřením zaznamenaným v tabulce*

čas	*1*	*2*	*3*	*4*
teplota	*-2*	*-1*	*2*	*1*

Jaká teplota odpovídá času $\frac{5}{2}$*?*

Příklad 168. *Pomocí metody nejmenších čtverců najděte vztah popisující lineární závislost teploty na čase zjištěnou měřením zaznamenaným v tabulce*

čas	*-1*	*0*	*1*	*2*
teplota	*3*	*-1*	*0*	*2*

Body a přímku načrtněte a na obrázku popište metodu nejmenších čtverců.

Příklad 169. *Sestrojte Lagrangeův interpolační polynom pro funkci, pro niž platí*

$$f(-1) = 2, \quad f(1) = -2, \quad f(3) = 1.$$

Příklad 170. *Sestrojte Lagrangeův interpolační polynom procházející body*

$$[-2, 5], [-1, 3], [0, 1], [1, 0].$$

Příklad 171. *Metodou nejmenších čtverců proložte přímku body*

(i) $[0, 1], [1, 3], [2, -1], [3, 3]$,

(ii) $[1, 1], [2, 0], [0, 3], [-2, 5]$.

Příklad 172. *Aproximujte všechny kořeny rovnice* $x^3 - 7x + 5 = 0$ *s chybou menší než* $0,1$.

§ 16.7 Wolfram|Alpha

- Kořeny algebraické rovnice.

```
solve x^5+5x^4-4x^3+12x-1=0
```

- Taylorův polynom.

```
series of xln(x) at x=1, order 7
```

- Lagrangeův interpolační polynom.

```
interpolating polynomial [0,1],[1,2],[2,4],[3,8]
```

- Metoda nejmenších čtverců.

```
linear fit [-1,3],[0,-1],[1,0],[2,2]
```

Příloha A Řešení

Příklad 4:

(i) $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$,

(ii) $\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -14 \end{pmatrix}$,

(iii) 10,

(iv) -13.

Příklad 14:

(i) $\begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 3 & 7 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$,

(ii) $\begin{pmatrix} 7 & -10 \\ 9 & 6 \\ 11 & 16 \end{pmatrix}$,

(iii) nelze,

(iv) $\begin{pmatrix} 14 & 6 & 4 \\ 26 & 12 & 10 \\ 38 & 18 & 16 \end{pmatrix}$,

(v) nelze.

Příklad 15:

$$BAC = \begin{pmatrix} 10 & -50 \\ -4 & 44 \\ -8 & 36 \\ -19 & -5 \end{pmatrix}.$$

Příklad 16:

$$C^T A^T B^T = (BAC)^T.$$

Příklad 17: Matice má plnou hodnost, je tedy ekvivalentní s jednotkovou maticí. Podle použitých úprav může vyjít jakákoli horní trojúhelníková matice plné hodnosti.

Příklad 18: $h(E) = 3$, nezávislé jsou sloupce 1, 2 a 4, nebo 1, 3 a 4.

Příklad 19:

$$F^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ -11 & 4 & -6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad H^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 17 & 3 & 9 & -11 \\ 21 & 3 & 13 & -15 \\ -7 & -1 & -3 & 5 \\ 29 & 3 & 17 & -19 \end{pmatrix},$$

G^{-1} neexistuje (matice G je singulární).

Příklad 20:

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ -9 & 7 \\ 14 & 11 \end{pmatrix}, \quad AB^T = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 0 \\ -6 & 0 & 7 \\ -10 & 17 & 6 \end{pmatrix}, \quad A^T B = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}.$$

Příklad 21:

$$\langle u, v\rangle = -2, \quad uv^T = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad u^T v = (-2).$$

Příklad 22:

$$h(A) = 2.$$

Příklad 23: Např.

$$h\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1, \qquad h\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2,$$

$$h\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 3, \qquad h\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 4.$$

(Matice jsou ve schodovitém tvaru v němž hodnost = počet nenulových řádků.)

Příklad 24:

Např. u_1, u_2, u_4.

Příklad 25:

$$A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 3 & 12 & -7 \\ 5 & 9 & -8 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -2 & -1 \\ 2 & -13 & 0 & -3 \\ 2 & -5 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 27:

(i) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$,

(ii) nemá řešení,

(iii) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3-2p \\ p \end{pmatrix}, p \in \mathbb{R}$,

(iv) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}(7-12p+4q) \\ \frac{1}{5}(8p-q-3) \\ p \\ q \end{pmatrix}$,

(v) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$,

(vi) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-4p \\ 3p-2 \\ p \end{pmatrix}, p \in \mathbb{R},$

(vii) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$

(viii) nemá řešení,

(ix) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17/8 \\ -3/4 \\ -7/4 \\ -11/8 \end{pmatrix},$

(x) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(3q+7) \\ \frac{1}{4}(4p+5q+1) \\ q \\ p \end{pmatrix}, p, q \in \mathbb{R}.$

Příklad 31:

(i) -8,

(ii) 13,

(iii) 41,

(iv) -32,

(v) $8x^2 - 5x$,

(vi) $-2a^3b - 3a^3 + 7a^2b + 2a^2b^2 + 3ab^2 + 6ab - 6a^2 + 6b^2$.

Příklad 32:

(i) -10,

(ii) 189,

(iii) -310.

Příklad 33:

$$25.$$

Příklad 36:

(i) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$

(ii) determinant je nulový - Cramerovo pravidlo nelze použít,

(iii) determinant je nulový - Cramerovo pravidlo nelze použít,

(iv) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$

Příklad 37:

$$x = 2, y = -1, z = 3.$$

Příklad 38: SLR nemá řešení.

Příklad 39:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14-4p \\ p-4 \\ p \end{pmatrix}, p \in \mathbb{R}.$$

Příklad 40:

$$x_2 = 2.$$

Příklad 54:

(i) $3x^4 + x^3 + x^2 + x + 10$,

(ii) $9x^4 - 12x^3 + 23x^2 - 22x + 40$,

(iii) $-10x^4 + 23x^3 - 25x^2 + 16x - 4$,

(iv) $-54x^6 + 56x^5 - 174x^4 - 18x^7 + 126x^3 - 418x^2 + 245x - 239$.

Příklad 55:

(i) $2x - 3 + \frac{2x^3 - x^2 + 5x}{x^4 - x^3 - x + 1}$,

(ii) $\frac{3}{2}x^4 + \frac{3}{4}x + 1 + \frac{-\frac{x}{4} + 6}{2x^3 - 1}$.

Příklad 56:

(i) $P(x) = (x+2)(x+1)^2(x-1)(x-3)$,

(ii) $Q(x) = (x+2)x(x-1)^4$.

Příklad 57: (*i*) Dvojnásobným, (*ii*) dvojnásobným.

Příklad 58:

(i) ryze lomená,

(ii) $x^3 + 2x^2 - 2x - 1 + \frac{5x^2 + 4x + 1}{x^3 + 1}$,

(iii) $\frac{2}{9} + \frac{-\frac{4}{9}x^8 + 12x^6 - 4x^2 + \frac{47}{9}}{9x^9 + 2x^8 - 1}$.

Příklad 59:

(i) v $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ $\{-1, \frac{3}{2}\}$,

(ii) v $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ $\{-2\}$,

(iii) v $\mathbb{R}$ nemá řešení,
v $\mathbb{C}$ $\{2 \pm 5i\}$.

Příklad 60:

(i) a) $x \in (-\infty, -1) \cup (\frac{3}{2}, \infty)$, b) $x \in (-\infty, -1] \cup [\frac{3}{2}, \infty)$,

(ii) a) $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$, b) $x \in \mathbb{R}$,

(iii) $x \in \mathbb{R}$,

(iv) a) $x \in (-2, 1)$, b) $x \in (-2, 1]$,

(v) a) $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (3, \infty)$, b) $x \in (-\infty, 0) \cup [3, \infty)$,

(vi) a) $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, -1/2) \cup (2, \infty)$,
b) $x \in (-\infty, -3] \cup (-1, -1/2) \cup [2, \infty)$,

(vii) a) $x \in (-\infty, -3) \cup (\frac{-3-\sqrt{17}}{4}, \frac{-3+\sqrt{17}}{4}) \cup (2, \infty)$,
b) $x \in (-\infty, -3] \cup (\frac{-3-\sqrt{17}}{4}, \frac{-3+\sqrt{17}}{4}) \cup [2, \infty)$.

Příklad 61:

- $f \cap x:$ $[3,0], [-5,0],$

- $f \cap y:$ $[0,15].$

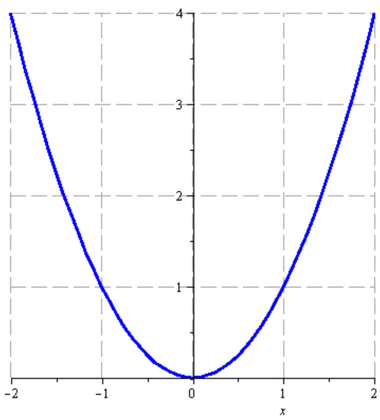
Příklad 62:

$$x \in (-\infty, -1] \cup (\tfrac{1}{3}, 3].$$

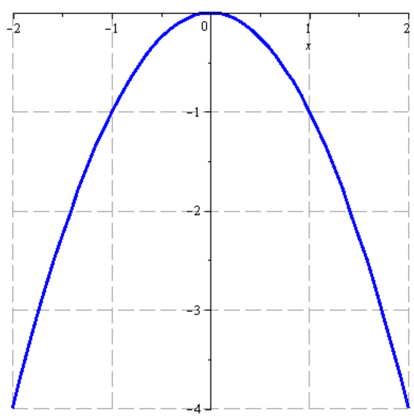
Příklad 63:

$$R(x) = \frac{2}{3}x + 1 + \frac{-8x^2 + 7x - 18}{3(3x^3 - 2x + 1)}.$$

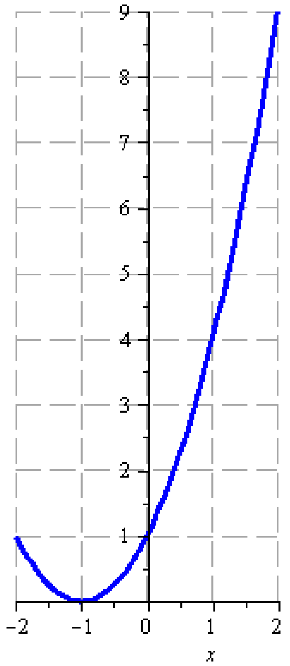
Příklad 66:



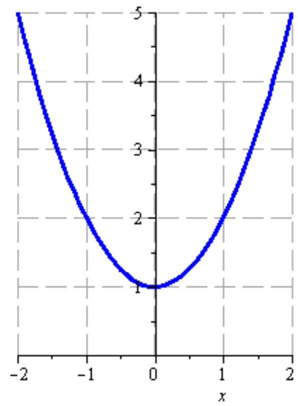
Obr. A.1: (i) a (iii)



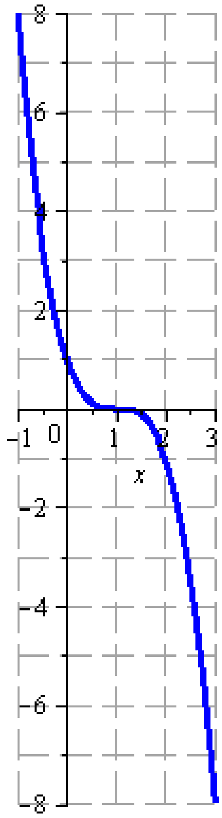
Obr. A.2: (ii)



Obr. A.3: (iv)

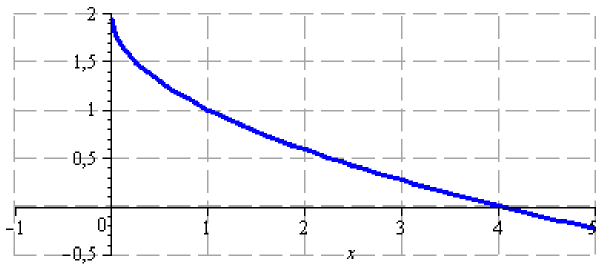


Obr. A.4: (v)

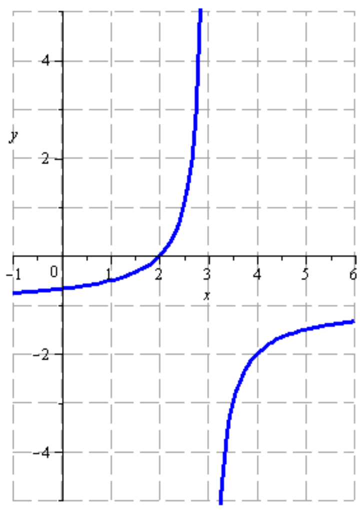


Obr. A.5: (vi)

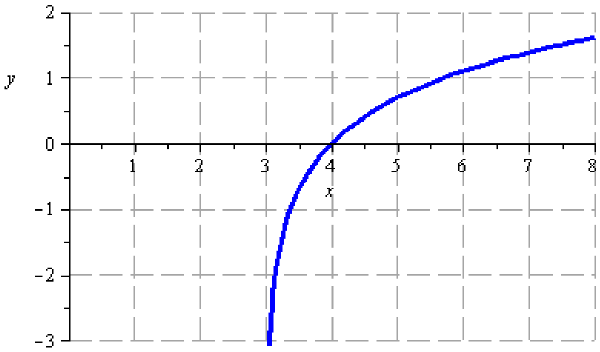
Příklad 67:



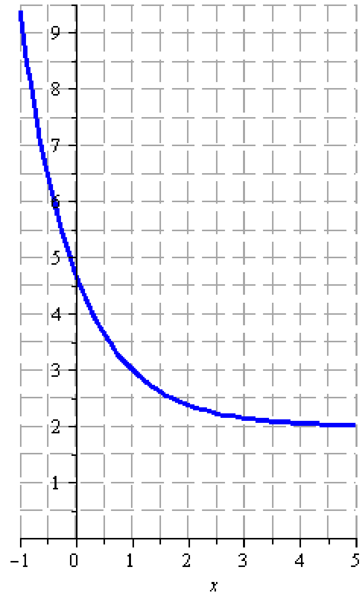
Obr. A.6: (i)



Obr. A.7: (ii)

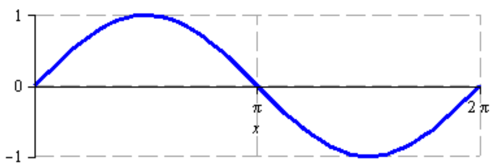


Obr. A.8: (iii)

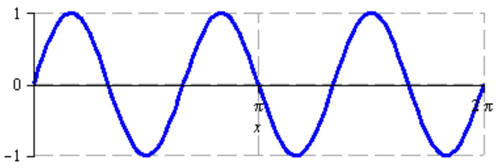


Obr. A.9: (iv)

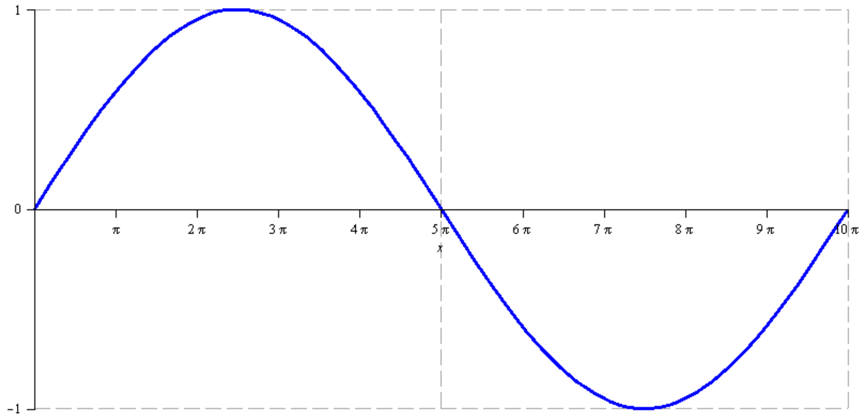
Příklad 68:



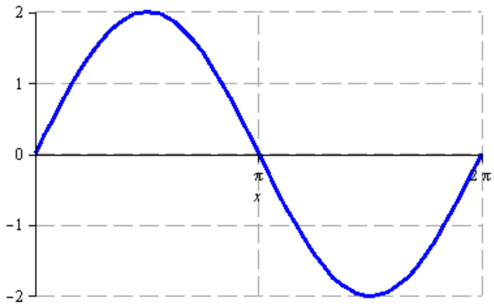
Obr. A.10: (i)



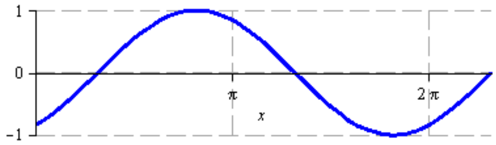
Obr. A.11: (ii)



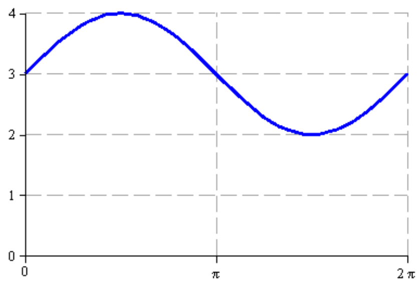
Obr. A.12: (iii)



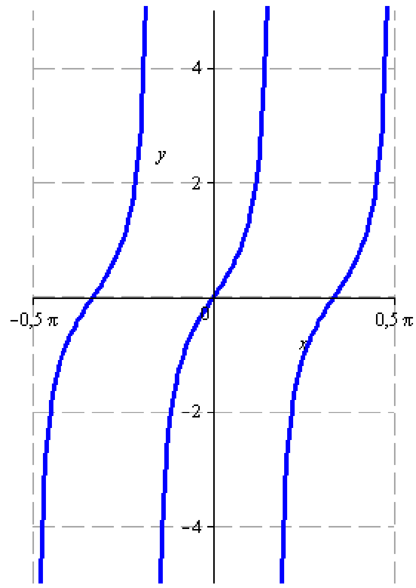
Obr. A.13: (iv)



Obr. A.14: (v)



Obr. A.15: (vi)



Obr. A.16: (vii)

Příklad 69: b

Příklad 70:

(i) $D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$,

(ii) $D(f) = (-\infty, 3]$,

(iii) $D(f) = (-3, \infty)$,

(iv) $D(f) = \mathbb{R}$,

(v) $D(f) = (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$,

(vi) $D(f) = \mathbb{R} - \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$,

(vii) $D(f) = \mathbb{R} - \{(2k+1)\frac{\pi}{2} + 1; k \in \mathbb{Z}\}$,

(viii) $D(f) = (-2, 4) \cup (4, 10]$.

Příklad 71:

(i) $\left(\frac{2x}{1-x}\right)^2$, (ii) $\frac{2x^2}{1-x^2}$, (iii) $\left(\frac{2\ln x}{1-\ln x}\right)^2$, (iv) $\ln^2 x^2$.

Příklad 72:

(i) $x^5, \operatorname{cotg} x$,

(ii) $\sqrt[3]{x}, \sin x, x^3+3$,

(iii) $\cos x, x^7$,

(iv) $\log_2 x, \sqrt{x}, \operatorname{tg} x, 2+x$.

Příklad 73:

a) $\sin x, \left(\frac{1}{5}\right)^x$,

b) $\sin x, \frac{1}{x}, 5^x$.

Příklad 74:

(i) $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$,

(ii) $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{3x+1}{2}}$,

(iii) $f^{-1}(x) = 3^x + 2$,

(iv) $f^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{5}} x = -\log_5 x$.

Příklad 76:

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x-1}{2}}.$$

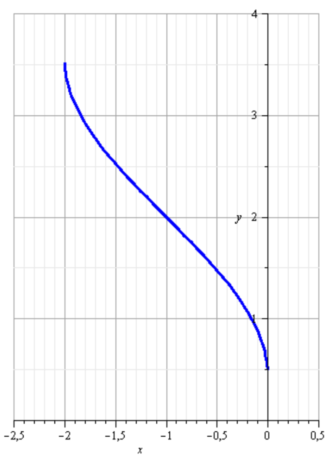
Příklad 77:

(i) $D(f) = (1, \infty)$,

(ii) $D(g) = [-5, -4]$.

Příklad 78: $D(f) = (-\frac{21}{2}, -10) \cup (-10, 1)$.

Příklad 79:



Příklad 80:

$$D(f) = [-4,-2) \cup (1,4].$$

Příklad 81:

$$D(f) = (-\infty,0) \cup (0,1], \qquad D(g) = (0,1).$$

Příklad 82: Funkce f je lichá, g sudá a funkce h_1 a h_2 nejsou ani liché, ani sudé.

Příklad 88:

(i) 16,
(ii) $\frac{\pi}{2}$,
(iii) ∞,
(iv) $-\infty$,
(v) neexistuje,
(vi) $-\infty$.

Příklad 89:

(i) $\frac{\sin 2}{2}$,
(ii) 0,
(iii) -12,
(iv) neexistuje,
(v) neexistuje,
(vi) ∞.

Příklad 90:

(i) $\frac{1}{2}$,
(ii) $\frac{1}{3}$,
(iii) $\frac{1}{4}$,
(iv) 0,
(v) $-\infty$,
(vi) -3.

Příklad 91:

(i) 3,
(ii) 0.

Příklad 92:

(i) 0,
(ii) 0,
(iii) $-6x^2 + 2x - 4$,
(iv) $\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{4}{5x^3} + \frac{18}{5\sqrt[5]{x^2}}$,
(v) $\frac{7}{2} + \frac{3}{2x^2} - \frac{5}{4\sqrt{x^3}}$,
(vi) $-\frac{3x^2+48x+1}{(3x^2-1)^2}$,
(vii) $2\cos x - \frac{1}{\sin^2 x}$,
(viii) $\operatorname{tg} x + \frac{x}{\cos^2 x}$.

Příklad 93:

(i) -4,
(ii) 2.

Příklad 94:

(i) $2, -3, \frac{9}{2}$,

(ii) $\frac{\pi}{4}, 1, -4$.

Příklad 95:

(i) $x\,\mathrm{e}^x(2\sin x + x\sin x + x\cos x)$,

(ii) $f(x) = x^2 6^x(3 + x\ln 6)$,

(iii) $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$,

(iv) $\frac{-1}{x\ln^2 x}$,

(v) $\frac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^2}$,

(vi) $\frac{-2}{1+4x^2}$.

Příklad 96:

(i) $3x\,\mathrm{e}^x[(\sin x - 3\ln x)(x+2) + x\cos x - 3]$,

(ii) $4^x[2 + (2x+6)\ln 4]$,

(iii) $\frac{9x^2-4x+5}{2\sqrt{3x^3-2x^2+5x-1}}$,

(iv) $\frac{-14x}{(x^2+1)\ln^2(x^2+1)}$,

(v) $\frac{x^2-2x-1}{2(x^2+1)^2}\sqrt{\frac{x^2+1}{1-x}}$,

(vi) $-6x^2\sin x^3\cos x^3$,

(vii) $\sin^2(2x) + 2x\sin(4x)$,

(viii) $\frac{-2\sin x}{\cos x\ln^2\cos x}$,

(ix) $7^{2x^3+x-9}\ln 7(6x^2+1)$,

(x) $\frac{2}{x^2+1}$.

Příklad 97:

(i) $5x^4 + 5^x\ln 5$,

(ii) $x^x(1+\ln x)$,

(iii) $(\sin x)^{\cos x}(\cos x\operatorname{cotg} x - \sin x\ln\sin x)$,

(iv) $(\ln x)^{\operatorname{tg} x}(\frac{\ln\ln x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x}{x\ln x})$.

Příklad 98:

(i) $x^4\sqrt[5]{5^x}(25 + x\ln 5)$,

(ii) $-30x^4\operatorname{tg} x^5\ln\cos^3 x^5$,

(iii) $\frac{-2}{x\ln\frac{2}{3}\sqrt{1-\log^2_{\frac{2}{3}} x^2}}$,

(iv) $\frac{1}{(x-3)\ln(x-3)} + \frac{1}{\sqrt{-x^2+10x-21}}$,

(v) $\frac{-2\operatorname{cotg} x}{\ln^2(\sin^2 x)}$,

(vi) $2\sin x(x\sin x\cos x^2 + \sin x^2\cos x)$.

Příklad 99:

$$f'(x) = 15x^2 + 2\sin x - \frac{3}{2x^3}, \quad g(x) = x^3\frac{4\ln x - 1}{\ln^2 x},$$

$$h(x) = \frac{2\cos(2x)}{3\sqrt[3]{\sin^2(2x)}}.$$

Příklad 100:

$$f'''(-2) = 1\,224.$$

Příklad 101:

(i) 2,

(ii) 1,

(iii) ∞,

(iv) $\frac{1}{3}$,

(v) 0,

(vi) $\frac{1}{2\pi}$.

Příklad 102:

(i) 0,

(ii) -1,

(iii) ∞,

(iv) $-\infty$.

Příklad 103:

(i) $y = 11x + 25$,

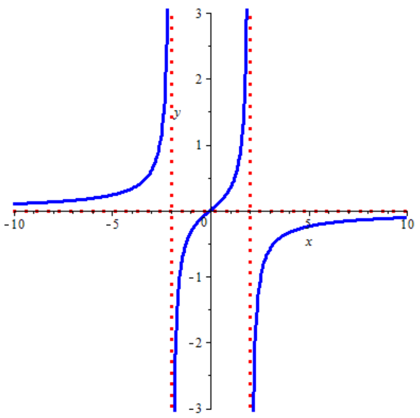
(ii) $x - y + \pi = 0$.

Příklad 104:

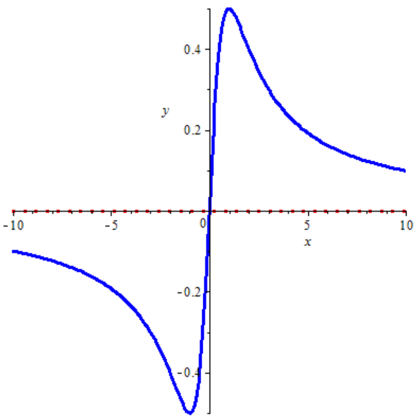
(i) $y = \frac{4-x}{3}$,

(ii) $y = 12x - 110$.

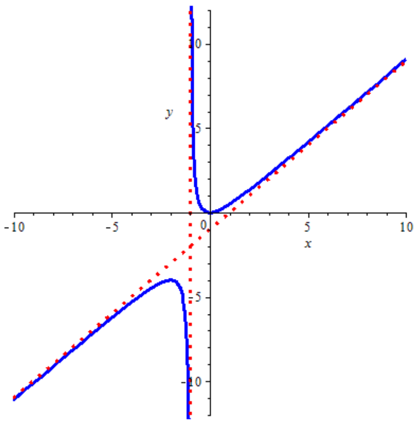
Příklad 108:



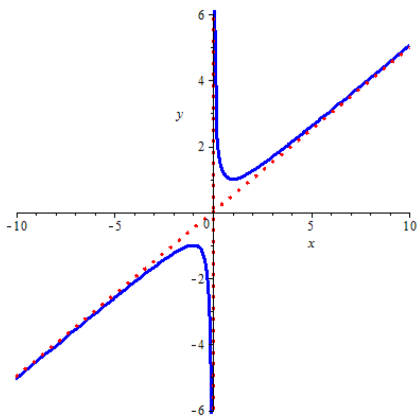
Obr. A.17: (i)



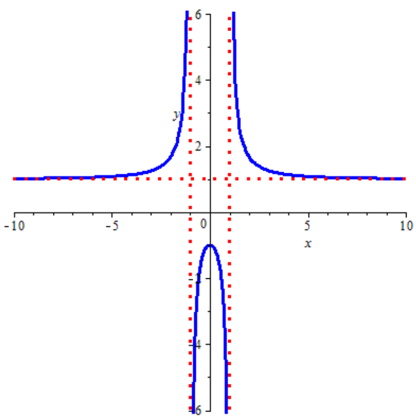
Obr. A.18: (ii)



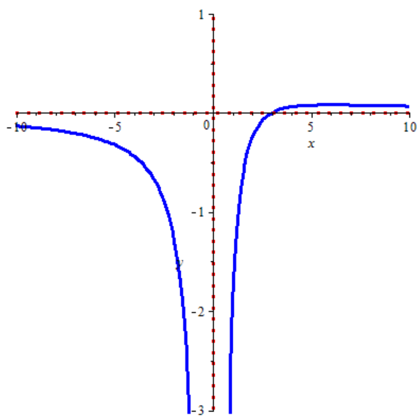
Obr. A.19: (iii)



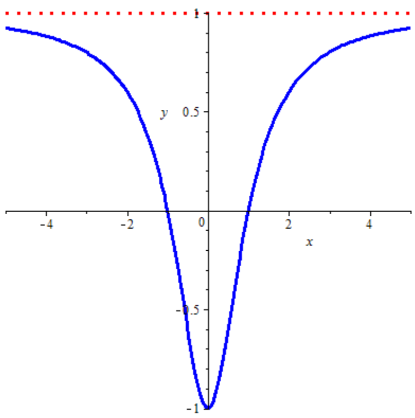
Obr. A.20: (iv)



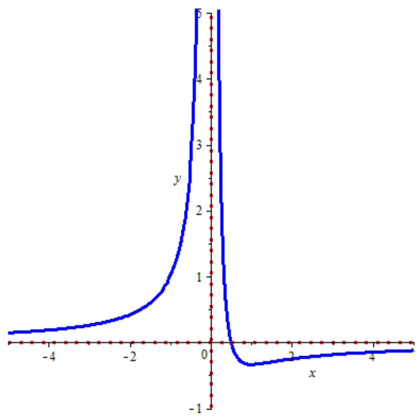
Obr. A.21: (v)



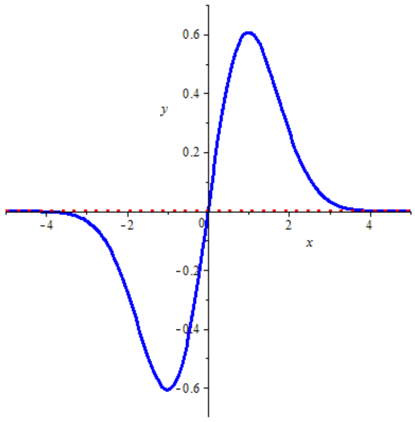
Obr. A.22: (vi)



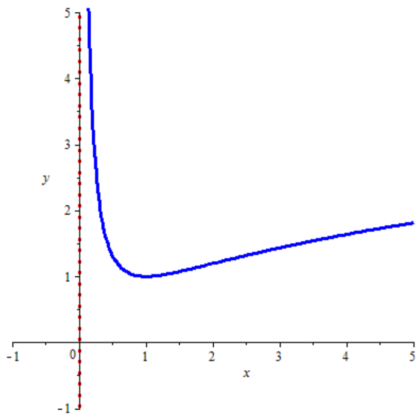
Obr. A.23: (vii)



Obr. A.24: (viii)



Obr. A.25: (ix)



Obr. A.26: (x)

Příklad 109:

(i) $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

(ii) $x \in (2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$,

(iii) nemá,

(iv) $y = 0$,

(v) $x = 2$,

(vi) $x \in \{2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}\}$.

Příklady 110: $\frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{92}}{8}$.

Příklady 111: D.

Příklady 126:

(i) $2x^3 - 8\sqrt{x} + 2\ln|x| + c$,

(ii) $\frac{3}{11}\sqrt[3]{x^{11}} + \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + c$,

(iii) $x^2 + 4\ln|x| + \frac{8}{x} + c$,

(iv) $\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 9x + 28\ln|x-3| + c$.

Příklady 127:

(i) $\frac{2}{3}\sin\left(\frac{3}{2}x\right) + c$,

(ii) $-\frac{3}{4}\sqrt{2-8x} + c$,

(iii) $2\ln|2x-1| + c$,

(iv) $\frac{5^{3x}}{3\ln 5} + c$,

(v) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2x) + c$.

Příklady 128:

(i) $e^x\left(x^2-2x+2\right)+c$,

(ii) $\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}+c$.

Příklady 129:

(i) $\ln|2x^2-8|+c$,

(ii) $\frac{1}{4}\cdot\ln|2x^2-8|+c$,

(iii) $=\int\frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x=-\int\frac{-\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x=-\ln|\cos x|+c$.

Příklady 130:

$$\int\frac{1}{16+9x^2}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{4^2+(3x)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\operatorname{arctg}\frac{3x}{4}+c=\frac{1}{12}\operatorname{arctg}\frac{3x}{4}+c.$$

Příklady 131:

$$\int\frac{3}{16-9x^2}\,\mathrm{d}x=3\int\frac{1}{4^2-(3x)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\cdot 4}\cdot\ln\left|\frac{4+3x}{4-3x}\right|+c=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{4+3x}{4-3x}\right|+c.$$

Příklady 132:

$$\int\frac{-7}{\sqrt{16-3x^2}}\,\mathrm{d}x=-7\int\frac{1}{\sqrt{4^2-(\sqrt{3}x)^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$=-7\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}x}{4}+c=\frac{-7\sqrt{3}}{3}\arcsin\frac{\sqrt{3}x}{4}+c.$$

Příklady 133:

$$\int\frac{2}{\sqrt{4x^2-3}}\,\mathrm{d}x=2\int\frac{1}{\sqrt{(2x)^2-3}}\,\mathrm{d}x$$

$$=2\frac{1}{2}\ln|2x+\sqrt{4x^2-3}|+c=\ln|2x+\sqrt{4x^2-3}|+c.$$

Příklady 134:

$$\int \frac{3}{2x^2+8x-10}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+4x-5}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x+2)^2-9}\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{2}\int \frac{1}{9-(x+2)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{3+x+2}{3-x-2}\right| + c = -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+5}{1-x}\right| + c.$$

Příklad 135:

(i) $2x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - x + c$,

(ii) $\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} - 21x + c$,

(iii) $\frac{x^5}{10} - \frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{2}\ln|x| + \frac{1}{2x} + c$,

(iv) $\frac{12}{11}\sqrt[12]{x^{11}} - \frac{40}{17}\sqrt[20]{x^{17}} + c$,

(v) $-\frac{2}{\sqrt{5}}\arcsin x + c$,

(vi) $\frac{2^x}{4\ln 2} - \frac{5}{4}x + c$.

Příklad 136:

(i) $2\sin x - (2x+3)\cos x + c$,

(ii) $\mathrm{e}^x(x^2+x-2) + c$,

(iii) $x(\ln x - 1) + c$,

(iv) $\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + c$,

(v) $\frac{1}{2}(x^2\operatorname{arctg} x - x + \operatorname{arctg} x) + c$,

(vi) $\frac{\mathrm{e}^x}{2}(\sin x + \cos x) + c$.

Příklad 137:

(i) $\frac{7}{3}\ln|x| + c$,

(ii) $-\frac{2}{9}\ln|5-9x| + c$,

(iii) $-\frac{1}{6}\sqrt{(3-4x)^3} + c$,

(iv) $\frac{5}{12}\sqrt[5]{(2x-3)^6} + c$,

(v) $\sqrt{x} - \sqrt{\frac{3}{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2x}{3}} + c$,

(vi) $\frac{-1}{36(12x+3)^3} + c$,

(vii) $\sqrt{3x^2-5} + c$,

(viii) $\frac{2}{3}\sqrt{\ln^3 x} + c$,

(ix) $-\ln|\cos x| + c$,

(x) $\ln(x^2-3x+7) + c$.

Příklad 138:

(i) $-\ln|4-\mathrm{e}^x| + c$,

(ii) $\frac{\operatorname{arctg}^4 x}{4} + c$,

(iii) $-\frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-x^4} + c$,

(iv) $-\frac{\cos^3 x}{3} + c$,

(v) $-\frac{1}{\sin x} - \sin x + c$,

(vi) $-\frac{1}{\sin x} - \sin x + c$.

Příklad 139:

(i) $-\frac{30}{29}\sqrt[30]{x^{29}}$,

(ii) $\frac{2}{3}\arcsin\frac{3x}{2}+c$,

(iii) $2\sqrt{\frac{2}{3}}\operatorname{arctg}\left[\sqrt{\frac{2}{3}}(x+2)\right]+c$,

(iv) $3\ln\left[\frac{1}{2}(x+1+\sqrt{x^2+2x+5})\right]+c_1$, nebo (dle použitého vzorce)
$3\ln\left[(x+1+\sqrt{x^2+2x+5})\right]+c_2$, kde $c_2=c_1+3\ln\frac{1}{2}$,

(v) $\sqrt{3x-1}-\operatorname{arctg}\sqrt{3x-1}+c$,

(vi) $\frac{7}{9}(2x+1)^{\frac{9}{4}}-\frac{7}{5}(2x+1)^{\frac{5}{4}}+c=\frac{14}{45}(2x+1)^{\frac{5}{4}}(5x-2)+c$.

Příklad 140:

(i) $\frac{2}{3}\ln|3x-4|+c$,

(ii) $\frac{-1}{3(3x-4)^2}+c$,

(iii) $\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{2}}+c$,

(iv) $\ln(x^2-2x+3)+c$,

(v) $2\ln(x^2-2x+3)+\frac{7\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{2}}+c$,

(vi) $\frac{3}{2}\ln(x^2+x+1)-\frac{5\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c$.

Příklad 150:

(i) 168,

(ii) $2+\frac{\pi^2}{2}$,

(iii) $\frac{3}{4}\pi$,

(iv) $1+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{5}{12}\pi$,

(v) 117,

(vi) 4,

(vii) $\frac{10}{3}$,

(viii) $\frac{\mathrm{e}^8-1}{3}$.

Příklad 151:

(i) $\frac{\pi^2}{4}$,

(ii) $4\pi\sqrt{5}$,

(iii) $\pi(4\sqrt{5}+10)$.

Příklad 152:

(i) $\frac{9}{2}$,

(ii) $\frac{72}{5}\pi$.

Příklad 153:

(i) $\frac{32}{3}$,

(ii) $\frac{1072}{15}\pi$,

(iii) $48\pi\sqrt{5}$,

(iv) $\frac{1408}{15}\pi$,

(v) $\int_{-1}^{3}\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$,

(vi) $4\sqrt{5}$.

Příklad 160: Kořeny jsou $-3, -\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{3}$. Výsledné odhady kořenů tedy musí vyjít nejvýše o danou chybu jinak. (Řešení příkladu nelze jednoznačně napsat, protože jiná volba prvního odhadu může vést k jinému výsledku, který je sice také dostatečně přesnou aproximací hledaného kořene, ale např. z druhé strany, nebo v rámci povolené chyby posunutý.)

Příklad 161: Polynom $= \frac{8}{3}x^3 - 6x^2 + 6x - \frac{11}{6}$. Výsledná hodnota $= \frac{5}{6}$.

Příklad 162: Polynom $= \frac{1}{24}(x^4 + 24x^3 - 12x^2 + 24)$. Výsledná hodnota $= \frac{385}{384}$.

Příklad 163: $-x^4 - 5x^3 - 10x^2 - 10x - 5$.

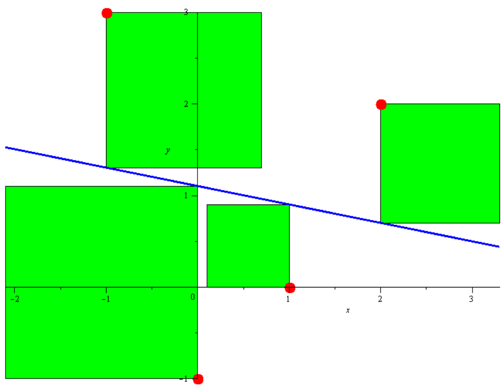
Příklad 164: $(a)\quad 1 - \frac{x^2}{2}, \qquad (b)\quad x - \frac{x^3}{3}$.

Příklad 165: Polynom $= -\frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - 5$. Výsledná hodnota $= \frac{5}{8}$.

Příklad 166: $-\frac{15}{4}$.

Příklad 167: $y = \frac{6}{5}x - 3$. Hodnota v $\frac{5}{2}$ je 0.

Příklad 168: $y = -\frac{x}{5} + \frac{11}{10}$.



Hledáme přímku (lineární závislost) pro níž je součet ploch naznačených čtverců minimální.

Příklad 169:

$$P(x) = \frac{7}{8}x^2 - 2x - \frac{7}{8}.$$

Příklad 170:

$$P(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{3}x + 1.$$

Příklad 171:

(i) $y = \frac{x}{5} + \frac{6}{5}$.

(ii) $y = -\frac{9}{7}x + \frac{18}{7}$.

Příklad 172: Odhady vyjdou přibližně $-2,948828358; 0,7828156787$ a $2,166012680$. Výsledky se mohou lišit dle zvoleného prvního dělení intervalu. (Nikdy ale o víc, než o příslušnou chybu).

Příloha

B Vzorce

§ B.1 Základní vzorce

Mnohočleny

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b),$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,$
$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2).$

Mocninná funkce

$a^0 = 1,$ $a^{-r} = \frac{1}{a^r},$ $a^{\frac{1}{r}} = \sqrt[r]{a},$ $a^r a^s = a^{r+s},$ $(a^r)^s = a^{rs}.$

Logaritmus a exponenciála

$\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y,$
$\log 1 = 0,$
$\log_a a = 1,$
$\log a^b = b \log a,$
$\log(ab) = \log a + \log b,$

$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b,$
$\log_a a^x = x = a^{\log_a x},$
$\ln x = \lg x = \log_{\mathrm{e}} x,\ \mathrm{e} = 2,71828\ldots,$
$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{\ln b}{\ln a}.$

Goniometrické funkce

$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},$
$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x},$
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x,$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,$
$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2},$
$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}.$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{cotg} x$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Zlomky

$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}$,
$\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$,
$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$,

$(\frac{a}{b})^{-1} = \frac{b}{a}$,
$(\frac{a}{b})^r = \frac{a^r}{b^r}$,
$\frac{ca}{cb} = \frac{a}{b}$,

$\frac{c}{cb} = \frac{1}{b}$,
$\frac{a}{a} = 1$.

Ostatní

▷ **Komplexní čísla ($\mathbb{C}$)**

$i^2 = -1$, $\overline{a + ib} = a - ib$, $a^2 + b^2 = (a - ib)(a + ib)$

▷ **Kvadratický polynom** $P(x) = ax^2 + bx + c$

$D = b^2 - 4ac$, $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

▷ **Doplnění na čtverec**

$ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$, $x^2 + px + q = (x + \frac{p}{2})^2 - \frac{p^2}{4} + q$.

§ B.2 Derivace

Nechť f a g jsou funkce, $c \in \mathbb{R}$.

- $(f \pm g)' = f' \pm g'$,
- $(c \cdot f)' = c \cdot f'$,
- $(f \cdot g)' = f'g + fg'$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Nechť $a, b, c, \alpha \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, $\alpha \neq 0$, $b \neq 1$.

- $(c)' = 0$,
- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$,
- $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$,
- $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$,
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$,
- $(\log_b x)' = \frac{1}{x \cdot \ln b}$,
- $(\sin x)' = \cos x$,
- $(\cos x)' = -\sin x$.
- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$,
- $(\operatorname{cotg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$,
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$,
- $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$,
- $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}$,
- $(\operatorname{arccotg} x)' = \frac{-1}{1 + x^2}$.

§ B.3 Integrály

Nechť f a g jsou funkce, $k, c \in \mathbb{R}$.

- $\int [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$,
- $\int k \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = k \cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x$,
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c$.

Nechť $A, B, a, c, k, n \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $n \neq -1$.

- $\int k\,\mathrm{d}x = kx + c$,
- $\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$,
- $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c$,
- $\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c$,
- $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + c$,
- $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + c$,
- $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + c$,
- $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + c$,
- $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} x + c$,
- $\int \frac{1}{\sqrt{A^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin \frac{x}{A} + c$,
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm B}}\,\mathrm{d}x = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm B}| + c$,
- $\int \frac{1}{A^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{A} \operatorname{arctg} \frac{x}{A} + c$,
- $\int \frac{1}{A^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2A} \ln\left|\frac{A+x}{A-x}\right| + c$.

Integrování per partes $\left[u = u(x), v = v(x)\right]$.

$$\int uv'\,\mathrm{d}x = uv - \int u'v\,\mathrm{d}x.$$

Substituční metoda.

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} x = h(t) \\ dx = h'(t)\,\mathrm{d}t \end{matrix}\right| = \int f(h(t))h'(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} g(x) = t \\ g'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{matrix}\right| = \int f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Délka křivky.

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Povrch pláště a objem rotačního tělesa (rotace f kolem osy x).

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x,$$
$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$