

Příklady: Extrémy – lokální, vázané, absolutní

Vyšší matematika, LDF MENDELU

Lokální extrémy

Najděte body, ve kterých mají následující funkce lokální extrémy:

1. $z = x^2 + (y - 1)^2$ [[0, 1)-lok. min.]
2. $z = x^2 - (y - 1)^2$ [[0, 1)-není extrém]
3. $z = x^2 + y^2 - xy - 2x + y$ [[1, 0)-lok. min]
4. $z = x^3 + y^3 - 6xy$ [(2, 2)-lok. min., (0, 0)-není extrém]
5. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$ [[1, $\frac{1}{2}$)-lok. min., (0, 0)-není extrém]
6. $z = 2xy - 8x - 4y + 1$ [(2, 4)-není extrém]
7. $z = 4xy - 16x - 8y + 7$ [(2, 4)-není extrém]
8. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$ [(2, -2)-lok. max.]
9. $z = x^3 - 3xy + y^2 + y - 7$ [[1, 1)-lok. min., ($\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$)-není]
10. $z = y^4 + 32x^2 - 32xy$ [(1, 2)-lok. min., (-1, -2)-lok. min., (0, 0)-není extrém]
11. $z = x^2 + y^2 + 4x - 2y$ [(-2, 1)-lok. min.]
12. $z = xy - x + y$ [(-1, 1)-není extrém]
13. $z = x^3 - 6xy + 3y^2$ [(2, 2)-lok. min., (0, 0)-není extrém]
14. $z = x^4 - 2x^2 + y^3 - 3y^2$ [(0, 0)-max., (0, 2)-ne, (1, 0)-ne, (1, 2)-min., (-1, 0)-ne, (-1, 2)-min.]
15. $z = y^3 - 6xy + x^2 + 15y - 5$ [(3, 1)-není extrém, (15, 5)-lok. min.]
16. $z = x^3 + y^3 - 9xy + 15$ [(0, 0)-není extrém, (3, 3)-lok. min.]
17. $z = x^3 - 3xy + y^2 - 2y$ [(2, 4)-lok. min., ($-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$)-není extrém]
18. $z = 2x^3 + xy^2 - 5x^2 + y^2$ [[$\frac{5}{3}, 0$)-lok. min., (0, 0)-není extrém]

19. $z = x^2 - y^2 - x^2y + 3y + 4$ [[$(0, \frac{3}{2})$]-lok. max., $(1, 1)$ -není $(-1, 1)$ -není]
20. $z = x^3 + xy^2 - 6xy$ [[$(-\sqrt{3}, 3)$]-lok. max., $(\sqrt{3}, 3)$]-lok. min., $(0, 0)$ -není, $(0, 6)$ -není]
21. $z = y^4 + 8x^2 - 8xy - 1$ [[$(\frac{1}{2}, 1)$]-lok. min., $(-\frac{1}{2}, -1)$]-lok. min., $(0, 0)$ -není]
22. $z = 4xy - xy^2 - x^2y$ [[$(0, 0)$]-není, $(0, 4)$ -není, $(4, 0)$ -není, $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$]-lok. max.]
23. $z = x^4 + y^4 - 4xy - 6$ [[$(0, 0)$]-není, $(1, 1)$]-lok. min., $(-1, -1)$]-lok. min.]
24. $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$ [[$(-2, 0)$]-lok. min.]
25. $z = 4 + e^{-2y}(xy - x^2 + y^2)$ [[$(0, 0)$]-není, $(\frac{1}{2}, 1)$]-lok. max.]
26. $z = e^x(x + y + y^2)$ [[$(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2})$]-lok. min.]

Vázané lokální extrémy

Najděte body, ve kterých mají následující funkce vázané lokální extrémy:

- $z = x^2 + 3y^2$, je-li $x - 2y + 7 = 0$ [[$(-3, 2)$]-vázané lok. min.]
- $z = e^{xy}$, je-li $x + y = 4$ [[$(2, 2)$]-vázané lok. max.]
- $z = xy$, je-li $x + y + 2 = 0$ [[$(-1, -1)$]-vázané lok. max.]
- $z = y^2 - 4x^3$, je-li $2x - y + 1 = 0$ [[$(1, 3)$]-vázané lok. max., $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$]-vázané lok. min.]
- $z = x^2 + y^2$, je-li $2x + y = 1$ [[$(\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$]-vázané lok. min.]

Absolutní extrémy

Najděte absolutní extrémy funkce $z = f(x, y)$ na množině M .

- $z = y - x^2$, M je trojúhelník s vrcholy $A[0, 1]$, $B[-1, -1]$, $C[1, -1]$
[[$z_{\min} = -2$ v bodech $(-1, -1)$ a $(1, -1)$, $z_{\max} = -1$ v bodě $(0, 1)$]]
- $z = \sqrt{x^2 - y}$, M je trojúhelník s vrcholy $A[-1, -1]$, $B[1, -1]$, $C[1, -3]$
[[$z_{\min} = 1$ v bodě $(0, -1)$, $z_{\max} = 2$ v bodě $(1, -3)$]]
- $z = \sqrt{\sqrt{x} - y}$, M je obdélník s vrcholy $A[0, 0]$, $B[1, 1]$, $C[0, -3]$, $D[1, -3]$
[[$z_{\min} = 0$ v bodě $(0, 0)$, $z_{\max} = 2$ v bodě $(1, -3)$]]
- $z = y - x^2$, M je čtverec s vrcholy $A[-1, 1]$, $B[1, 1]$, $C[1, 3]$, $D[-1, 3]$
[[$z_{\min} = 0$ v bodech $(-1, 1)$ a $(1, 1)$, $z_{\max} = 3$ v bodě $(0, 3)$]]
- $z = x - 2y - 3$, M je trojúhelník s vrcholy $A[0, 0]$, $B[1, 0]$, $C[0, 1]$
[[$z_{\min} = -5$ v bodě $(0, 1)$, $z_{\max} = -2$ v bodě $(1, 0)$]]

6. $z = x^2 + y^2$, $M = \{[x, y]; x \leq 2, x \geq y^2\}$
 $[z_{\min} = 0 \text{ v bodě } (0, 0), z_{\max} = 6 \text{ v bodech } (2, -\sqrt{2}), (2, \sqrt{2})]$
7. $z = x^2 - 2x + y^2 - 2y + 3$, M je trojúhelník s vrcholy $A[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $B[2, \frac{1}{2}]$, $C[\frac{1}{2}, 2]$
 $[z_{\min} = 1 \text{ v bodě } (1, 1), z_{\max} = \frac{9}{4} \text{ v bodech } (2, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 2)]$
8. $z = x^2 + y^2 - 6y$, $M = \{[x, y]; y \leq 2, y \geq 2x^2\}$
 $[z_{\min} = -8 \text{ v bodě } (0, 2), z_{\max} = 0 \text{ v bodě } (0, 0)]$
9. $z = x + 3y$, M je určena nerovnostmi: $-3x + 4y \leq 12$, $x \leq 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
 $[z_{\min} = 0 \text{ v bodě } (0, 0), z_{\max} = 22 \text{ v bodě } (4, 6)]$
10. $z = -3x + 2y$, M je určena nerovnostmi: $x - 3y \leq 3$, $2x + 3y \leq 15$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
 $[z_{\min} = -16 \text{ v bodě } (6, 1), z_{\max} = 10 \text{ v bodě } (0, 5)]$
11. $z = 2x + y$, M je určena nerovnostmi: $x - 2y \leq 2$, $-2x + y \leq 0$, $y \geq 0$
 $[z_{\min} = 0 \text{ v bodě } (0, 0), \text{maximum neexistuje}]$