Základy lineárního programování

Vyšší matematika

LDF MENDELU

Podpořeno projektem Průřezová inovace studijních programů Lesnické a dřevařské fakulty MENDELU v Brně (LDF) s ohledem na disciplíny společného základu `http://akademie.ldf.mendelu.cz/cz` (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0021) za přispění finančních prostředků EU a státního rozpočtu České republiky.

Simona Fišnarová

Brno 2014

Úloha lineárního programování – základní pojmy

Úlohou lineárního programování rozumíme úlohu najít **maximum nebo minimum lineární funkce** n proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

(1) $$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

na množině zadané soustavou lineárních nerovnic nebo rovnic:

(2) $$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ &\vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n &\geq b_k \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

(3) $$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0.$$

Všechny koeficienty a_{ij}, b_j, c_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$ jsou reálná čísla.

- Funkce (1) se nazývá **účelová funkce**, podmínky (2) a (3) se nazývají **omezující podmínky**, přičemž podmínky (2) se nazývají **vlastní omezení** a podmínky (3) se nazývají **podmínky nezápornosti**.

- **Přípustným řešením** úlohy lineárního programování rozumíme vektor $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, který vyhovuje omezujícím podmínkám (2) a (3). Množina všech přípustných řešení (tj. množina všech řešení soustavy (2), (3)) se nazývá **přípustná množina**.

- **Optimálním řešením** úlohy lineárního programování rozumíme takové přípustné řešení, pro které je hodnota účelové funkce maximální (resp. minimální). Tato maximální (resp. minimální) hodnota účelové funkce se nazývá **optimální hodnota**.

Definice (Vrchol přípustné množiny)

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je přípustná množina určená soustavou (2), (3). Řekneme, že bod $\bar{x} \in M$ je **vrchol** množiny M, jestliže $\bar{x}$ neleží na úsečce s krajními body x a y pro žádnou dvojici bodů $x, y \in M$ takových, že $x \neq y \neq \bar{x}$.

Poznámka (Konvexní množina, polyedr)

- Množina bodů $M \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá **konvexní**, jestliže spolu s každými dvěma body $x, y \in M$ patří do množiny také celá úsečka s krajními body x a y.
- Přípustná množina určená soustavou nerovnic (2), (3) je konvexní množina a nazývá se **polyedr**.

Věta

- *Je-li přípustná množina prázdná, pak úloha lineárního programování nemá řešení.*
- *Nechť je přípustná množina neprázdná a ohraničená. Pak nabývá účelová funkce svého maxima (resp. minima) v některém z vrcholů přípustné množiny.*
- *Nechť přípustná množina není ohraničená. Jestliže účelová funkce nabývá na této množině svého maxima (resp. minima), pak se optimální hodnota nachází v některém z vrcholů přípustné množiny.*
- *Nabývá-li účelová funkce optimální hodnoty ve dvou různých vrcholech, pak nabývá optimální hodnoty také ve všech bodech ležících na úsečce určené těmito vrcholy.*

Poznámka

Pokud není přípustná množina ohraničená, pak úloha nemusí mít řešení, neboť účelová funkce nemusí být nad touto množinou shora (zdola) ohraničená.

Grafické řešení – dvě proměnné

V případě dvou proměnných lze úlohu lineárního programování vyřešit graficky pomocí vrstevnic účelové funkce (viz absolutní extrémy funkce dvou proměnných).

- Přípustnou mmnožinu zakreslíme jako průnik konečného počtu polorovin určených omezujícími podmínkami.
- Grafem účelové funkce je rovina, jejíž vrstevnice jsou přímky.

Grafické řešení – dvě proměnné

Je-li **přípustná množina ohraničená**, pak účelová funkce nabývá na této množině svého maxima (resp. minima) v některém z vrcholů množiny.

Maximum (minimum) tedy můžeme najít

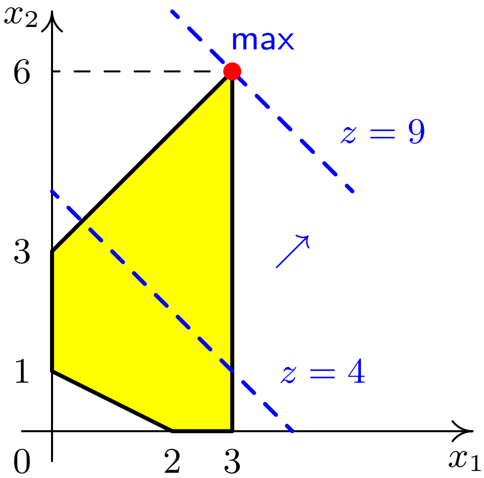
1. buď pomocí vrstevnic účelové funkce
2. nebo tak, že určíme vrcholy přípustné množiny, spočítáme hodnotu účelové funkce ve všech vrcholech a vybereme největší (resp. nejmenší) hodnotu.

Přitom se může stát, že funkce nabývá maxima (resp. minima) ve dvou různých vrcholech. V tom případě je maximum (minimum) nabyto ve všech bodech úsečky, jejíž krajní body jsou tyto vrcholy.

Příklad (Ohraničená přípustná množina, jedno řešení)

Najděte maximum funkce $z = x_1 + x_2$ na množině určené nerovnostmi

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\geq -3 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 2 \\ x_1 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



Po nakreslení přípustné množiny vidíme, že tato množina je ohraničená. Úlohu můžeme tedy vyřešit graficky pomocí vrstevnic nebo porovnáním hodnot účelové funkce ve vrcholech:

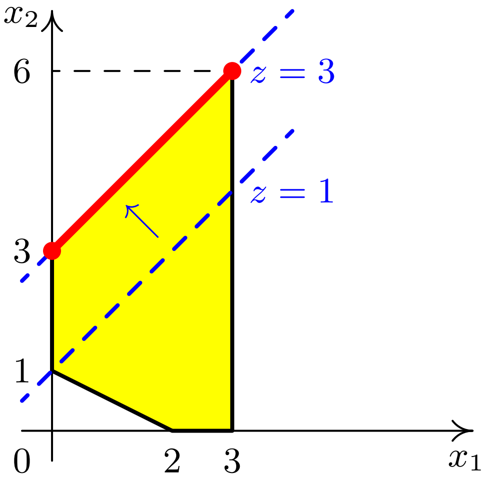
$$\begin{aligned} z(0,1) &= 0 + 1 = 1 \\ z(2,0) &= 2 + 0 = 2 \\ z(3,0) &= 3 + 0 = 3 \\ z(3,6) &= 3 + 6 = 9 \\ z(0,3) &= 0 + 3 = 3 \end{aligned}$$

V obou případech vidíme, že účelová funkce nabývá maxima v bodě $(3, 6)$ (optimální řešení). Optimální hodnota je 9.

Příklad (Ohraničená přípustná množina, více řešení)

Najděte maximum funkce $z = -x_1 + x_2$ na množině určené nerovnostmi

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\geq -3 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 2 \\ x_1 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



Porovnáme hodnoty účelové funkce ve vrcholech:

$$\begin{aligned} z(0,1) &= -0 + 1 = 1 \\ z(2,0) &= -2 + 0 = -2 \\ z(3,0) &= -3 + 0 = -3 \\ z(3,6) &= -3 + 6 = 3 \\ z(0,3) &= -0 + 3 = 3 \end{aligned}$$

Vidíme, že funkce nabývá maxima ve vrcholech $(0, 3)$ a $(3, 6)$. To znamená, že maximum je nabyto ve všech bodech úsečky, která tyto dva body spojuje. Totéž je vidět i nakreselním vrstevnic účelové funkce. Optimální hodnota je 3.

Grafické řešení – dvě proměnné

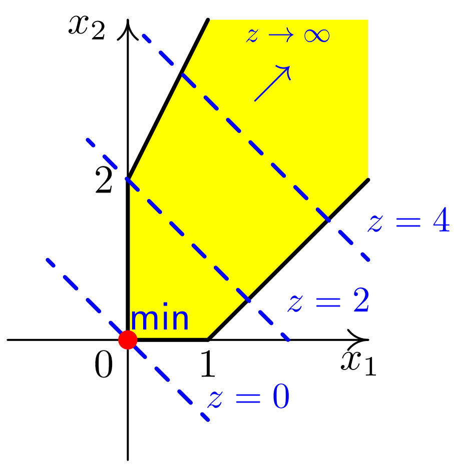
Je-li **přípustná množina neohraničená** a nabývá-li účelová funkce svého maxima (resp. minima) na této množině, pak je tohoto maxima (minima) nabyto v některém z vrcholů množiny.

Může však nastat situace, že účelová funkce svého maxima (resp. minima) na neohraničené množině vůbec nenabývá. Metodu dosazení vrcholů tedy nelze použít a maximum (resp. minimum) na neohraničené množině vyšetřujeme vždy pouze pomocí vrstevnic účelové funkce.

Příklad (Neohraničená přípustná množina)

Najděte maximum a minimum funkce $z = x_1 + x_2$ na množině určené nerovnostmi

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 1 \\ -2x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



Přípustná množina není ohraničená. Po nakreslení vrstevnic vidíme, že účelová funkce nabývá minimální hodnoty 0 v bodě $(0, 0)$. Úloha najít maximum však nemá řešení, neboť účelová funkce není na přípustné množině shora ohraničená. (Nabývá zde libovolně velkých hodnot.)

Simplexová metoda

Simplexová metoda je (narozdíl od grafické metody) použitelná při libovolném počtu proměnných.

Idea této metody spočívá v tom, že "cestujeme po hranách" přípustné množiny od jednoho vrcholu ke druhému a hledáme vrchol s optimální hodnotou. Přitom není nutné obejít všechny vrcholy, neboť v každém vrcholu poznáme, zda jsme již dosáhli optimální hodnoty.

Metodu si vysvětlíme na úloze zadané ve speciálním tvaru. V obecném případě je postup obdobný, ale trochu komplikovanější.

Uvažujme maximalizační úlohu lineárního programování:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to \max$$

na množině zadané soustavou lineárních nerovnic:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\leq b_m, \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0,$$

a předpokládejme, že $b_j \geq 0$ pro každé $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Všimněme si, že takto zadaná přípustná množina není prázdná, neboť vektor $(0, 0, \ldots, 0)$ splňuje všechny nerovnice.

Každou z nerovnic tvořících vlastní omezení úlohy převedeme na rovnici tak, že k levé straně přičteme novou nezápornou proměnnou. Celkem tedy zavedeme dalších m proměnných, označme je $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$. Tyto proměnné se nazývají **doplňkové proměnné** a vyjadřují rozdíl mezi levou a pravou stranou původních nerovností.

Původní úlohu jsme tedy převedli na úlohu:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \to \max$$

na množině zadané soustavou lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rl} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ (4) & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \qquad + x_{n+2} = b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \qquad\qquad + x_{n+m} = b_m, \end{array}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_{n+m} \geq 0,$$

Definice (Bazické řešení)

Řešení $(x_1, x_2, \dots, x_{n+m})$ soustavy (4) nazýváme **bazickým řešením**, jestliže

- $x_1, x_2, \dots, x_{n+m} \geq 0$,
- n (z celkového počtu $n + m$) proměnných je nulových
- sloupce matice soustavy (4) odpovídající zbývajícím m proměnným jsou lineárně nezávislé (tj. je možné je ekvivalentními úpravami převést na jednotkovou matici). Tyto proměnné nazýváme **bazické proměnné**.

Bazické řešení se nazývá **degenerované**, jestliže jsou nulové i některé bazické proměnné.

Tedy např. vektor, jehož složky jsou

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \dots\ ,\ x_n = 0,\ x_{n+1} = b_1,\ x_{n+2} = b_2,\ \dots\ ,\ x_{n+m} = b_n,$$

je bazické řešení soustavy (4), přičemž bazické proměnné jsou $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$ (sloupce odpovídající těmto proměnným tvoří jednotkovou matici a jsou tedy lineárně nezávislé).

Věta (Charakterizace vrcholů)

Vektor $(x_1, x_2, \dots, x_{n+m})$ *je bazickým řešením soustavy* (4) *právě tehdy, když* $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *je vrcholem přípustné množiny.*

Danou úlohu jsme tedy převedli na úlohu najít takové bazické řešení soustavy (4), pro které je odpovídající hodnota účelové funkce $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ maximální. Hodnotu účelové funkce můžeme přidat do soustavy jako další proměnnou:

Rovnici $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ přepíšeme do tvaru

$$-c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots - c_nx_n + z = 0$$

a přidáme k soustavě (4):

$$\begin{array}{lllllll}
a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + \cdots + & a_{1n}x_n + x_{n+1} & & & & = b_1 \\
a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + \cdots + & a_{2n}x_n & + x_{n+2} & & & = b_2 \\
 & \vdots & & & & & \\
a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + \cdots + & a_{mn}x_n & & + x_{n+m} & & = b_m, \\
-c_1x_1 - & c_2x_2 - \cdots - & c_nx_n & & & +z & = 0
\end{array}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n+m} \geq 0,$$

Koeficienty získané soustavy zapíšeme do tabulky:

	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	$\cdots$	x_{n+m}	
x_{n+1}	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	1	0	$\cdots$	0	b_1
x_{n+2}	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	0	1	$\cdots$	0	b_2
				$\vdots$					
x_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	0	0	$\cdots$	1	b_m
z	$-c_1$	$-c_2$	$\cdots$	$-c_n$	0	0	$\cdots$	0	0

Toto je tzv. výchozí **simplexová tabulka** a můžeme z ní vyčíst výchozí bazické řešení:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \ldots\ ,\ x_n = 0,\ x_{n+1} = b_1,\ x_{n+2} = b_2,\ \ldots\ ,\ x_{n+m} = b_n.$$

V levém sloupci vidíme bazické proměnné a proměnnou z, v pravém sloupci vidíme hodnotu bazických proměnných a hodnotu proměnné z (tj. hodnotu účelové funkce). Ostatní proměnné nejsou bazické a klademe je rovny nule. Toto výchozí přípustné řešení odpovídá vrcholu $(0, 0, \ldots, 0)$ přípustné množiny, hodnota účelové funkce je zde nulová.

Sloupec odpovídající proměnné z jsme záměrně vynechali, neboť se dále nebude měnit.

Nyní je potřeba odpovědět na otázku, zda je výchozí hodnota z optimální a pokud ne, jakým způsobem najít bazické řešení s větší hodnotou, případně jak poznat, že optimální hodnota neexistuje.

Kriterium optimality

- Jsou-li všechny koeficienty v posledním řádku tabulky (řádek účelové funkce) nezáporné, pak z je optimální hodnota a odpovídající vektor $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (v případě výchozí tabulky $(0, 0, \ldots, 0)$) je optimální řešení.

- Je-li alespoň jeden koeficient v posledním řádku záporný, vybereme koeficient s nejvíce zápornou hodnotou a sloupec, ve kterém se tento koeficient nachází, nazveme **klíčový sloupec**.

  a. Pokud se v klíčovém sloupci nenachází žádný kladný prvek, znamená to, že účelová funkce není nad přípustnou množinou shora ohraničená a maximální hodnota tedy neexistuje. Úloha nemá řešení.

  b. Pokud je alespoň jeden prvek v klíčovém sloupci kladný, pak najdeme nové bazické řešení.

Přechod k novému bazickému řešení

1. Pro všechny kladné prvky v klíčovém sloupci spočteme podíly:

$$\frac{\text{odpovídající hodnota } b_j}{\text{kladný prvek klíčového sloupce v } j\text{-tém řádku}}$$

   a vybereme prvek, pro který je tento podíl nejmenší. Tento prvek nazveme **klíčový prvek** a odpovídající řádek nazveme **klíčový řádek**.

2. Pomocí ekvivalentních řádkových úprav upravíme tabulku tak, abychom místo klíčového prvku dostali číslo jedna a na všech ostatních pozicích v klíčovém sloupci byly nuly. (Klíčový řádek vydělíme klíčovým prvkem a poté vhodné násobky klíčového řádku přičítáme k ostatním řádkům tabulky.)

3. Provedeme přepsání bazických proměnných v prvním sloupci. Místo původní proměnné bude v klíčovém řádku proměnná odpovídají klíčovému sloupci.

4. Z nové tabulky vyčteme nové bazické řešení a odpovídající hodnotu z. Stejným způsobem jako u výchozího řešení zjistíme, zda je hodnota optimální a pokud ne, přejdeme k dalšímu bazickému řešení.

Příklad (Simplexová metoda)

Řešte úlohu

$$z = 2x_1 + x_2 - 2x_3 \to \max$$

při omezujících podmínkách

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 &\le 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 &\le 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &\le 6 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

Zavedeme dopňkové proměnné a převedeme na soustavu rovnic (spolu s rovnicí pro účelovou funkci):

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \phantom{{}+x_5+x_6+z} &= 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 \phantom{{}+x_4} + x_5 \phantom{{}+x_6+z} &= 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \phantom{{}+x_4+x_5} + x_6 \phantom{{}+z} &= 6 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 \phantom{{}+x_4+x_5+x_6} + z &= 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\ge 0 \end{aligned}$$

Příklad (Simplexová metoda – pokračování)

Výchozí tabulka:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	$\boxed{2}$	-1	-1	1	0	0	2
x_5	1	-1	1	0	1	0	4
x_6	1	1	2	0	0	1	6
z	-2	-1	2	0	0	0	0

Výchozí bazické řešení: $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 2,\ x_5 = 4,\ x_6 = 6,\ z = 0.$

V posledním řádku tabulky jsou záporné hodnoty $\Longrightarrow$ budeme hledat jiné bazické řešení s větší hodnotou z.

Z posledního řádku tabulky vybereme nejvíce záporný prvek. Tento prvek určuje klíčový sloupec. Pro všechna kladná čísla v klíčovém sloupci spočítáme podíly:

$$\boxed{\frac{2}{2} = 1}, \quad \frac{4}{1} = 4, \quad \frac{6}{1} = 6$$

Vybereme prvek, pro který je podíl nejmenší – klíčový prvek. Pomocí ekvivalentních řádkových úprav přejdeme k nové tabulce, ve které bude na místě klíčového prvku číslo 1 a všude jinde v klíčovém sloupci budou nuly. (Klíčový řádek vydělíme číslem 2 a poté přičteme vhodné násobky klíčového řádku k ostatním řádkům.)

V prvním sloupci přepíšeme bazické proměnné – novou bazickou proměnnou bude x_1 (místo x_4).

Příklad (Simplexová metoda – pokračování)

Druhá tabulka:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	1
x_5	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	3
x_6	0	$\boxed{\frac{3}{2}}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	5
z	0	-2	1	1	0	0	2

Bazické řešení: $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 3,\ x_6 = 5,\ z = 2.$

V posledním řádku tabulky je záporná hodnota $\Longrightarrow$ hledáme další bazické řešení s větší hodnotou z.

Jediná záporná hodnota v posledním řádku určuje klíčový sloupec, jediná kladná hodnota v klíčovém sloupci určuje klíčový prvek.

Pomocí ekvivalentních řádkových úprav přejdeme k nové tabulce, ve které bude na místě klíčového prvku číslo 1 a všude jinde v klíčovém sloupci budou nuly. (Klíčový řádek vydělíme číslem $\frac{3}{2}$ a poté přičteme vhodné násobky klíčového řádku k ostatním řádkům.) V prvním sloupci přepíšeme bazické proměnné – novou bazickou proměnnou bude x_2 (místo x_6).

Příklad (Simplexová metoda – pokračování)

Třetí tabulka:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$
x_5	0	0	$\frac{7}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{14}{3}$
x_2	0	1	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{10}{3}$
z	0	0	$\frac{13}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{26}{3}$

Bazické řešení: $x_1 = \frac{8}{3},\ x_2 = \frac{10}{3},\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = \frac{14}{3},\ x_6 = 0,\ z = \frac{26}{3}.$

V posledním řádku tabulky není žádná záporná hodnota $\Longrightarrow$ našli jsme optimální řešení.

Optimální řešení: $x_1 = \frac{8}{3},\ x_2 = \frac{10}{3},\ x_3 = 0.$

Optimální hodnota: $z = \frac{26}{3}.$

Minimalizační úloha

Postup simplexové metody jsme si vysvětlili v případě, kdy hledáme maximum účelové funkce. Obecně platí:

$$\min f = -\max(-f).$$

Máme-li tedy na zadané přípustné množině najít minimum funkce $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$, postupujeme tak, že najdeme maximum funkce $\tilde{z} = -c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots - c_nx_n$.

Mohou nastat tyto případy:

- Maximum funkce $\tilde{z} = -c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots - c_nx_n$ na dané množině neexistuje. Pak na dané množině neexistuje ani minimum funkce $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$.
- Maximum funkce $\tilde{z} = -c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots - c_nx_n$ na dané množině existuje. Nechť hodnota tohoto maxima je $\bar{z}$. Pak existuje i minimum funkce $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ (ve stejných bodech jako maximum funkce $\tilde{z}$) a jeho hodnota je $-\bar{z}$.

Využití systémů počítačové algebry

Příklad

Řešte úlohu

$$z = 2x_1 + x_2 - 2x_3 \to \max$$

při omezujících podmínkách

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 &\leq 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 &\leq 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 6 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Řešení pomocí Wolfram Alpha (`http://www.wolframalpha.com/`):

```
maximize 2x+y-2z on 2x-y-z<=2, x-y+z<=4, x+y+2z<=6, x>=0, y>=0,
z>=0
```