

# Základy lineárního programování

## Vyšší matematika

LDF MENDELU



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Podpořeno projektem Průřezová inovace studijních programů Lesnické a dřevařské fakulty MENDELU v Brně (LDF) s ohledem na disciplíny společného základu <http://akademie.ldf.mendelu.cz/cz> (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0021) za přispění finančních prostředků EU a státního rozpočtu České republiky.

# Úloha lineárního programování – základní pojmy

Úlohou lineárního programování rozumíme úlohu najít maximum nebo minimum lineární funkce  $n$  proměnných  $x_1, x_2, \dots, x_n$ :

$$(1) \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

na množině zadané soustavou lineárních nerovnic nebo rovnic:

$$(2) \quad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ &\vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n &\geq b_k \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

$$(3) \quad x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0.$$

Všechny koeficienty  $a_{ij}$ ,  $b_j$ ,  $c_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $j \in \{1, \dots, m\}$  jsou reálná čísla.

- Funkce (1) se nazývá **účelová funkce**, podmínky (2) a (3) se nazývají **omezující podmínky**, přičemž podmínky (2) se nazývají **vlastní omezení** a podmínky (3) se nazývají **podmínky nezápornosti**.
- **Přípustným řešením** úlohy lineárního programování rozumíme vektor  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , který vyhovuje omezujícím podmínkám (2) a (3). Množina všech přípustných řešení (tj. množina všech řešení soustavy (2), (3)) se nazývá **přípustná množina**.
- **Optimálním řešením** úlohy lineárního programování rozumíme takové přípustné řešení, pro které je hodnota účelové funkce maximální (resp. minimální). Tato maximální (resp. minimální) hodnota účelové funkce se nazývá **optimální hodnota**.

## Definice (Vrchol přípustné množiny)

Nechť  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  je přípustná množina určená soustavou (2), (3). Řekneme, že bod  $\bar{x} \in M$  je **vrchol** množiny  $M$ , jestliže  $\bar{x}$  neleží na úsečce s krajními body  $x$  a  $y$  pro žádnou dvojici bodů  $x, y \in M$  takových, že  $x \neq y \neq \bar{x}$ .

## Poznámka (Konvexní množina, polyedr)

- Množina bodů  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  se nazývá **konvexní**, jestliže spolu s každými dvěma body  $x, y \in M$  patří do množiny také celá úsečka s krajními body  $x$  a  $y$ .
- Přípustná množina určená soustavou nerovnic (2), (3) je konvexní množina a nazývá se **polyedr**.

## Věta

- *Je-li přípustná množina prázdná, pak úloha lineárního programování nemá řešení.*
- *Nechť je přípustná množina neprázdná a ohraničená. Pak nabývá účelová funkce svého maxima (resp. minima) v některém z vrcholů přípustné množiny.*
- *Nechť přípustná množina není ohraničená. Jestliže účelová funkce nabývá na této množině svého maxima (resp. minima), pak se optimální hodnota nachází v některém z vrcholů přípustné množiny.*
- *Nabývá-li účelová funkce optimální hodnoty ve dvou různých vrcholech, pak nabývá optimální hodnoty také ve všech bodech ležících na úsečce určené těmito vrcholy.*

## Poznámka

Pokud není přípustná množina ohraničená, pak úloha nemusí mít řešení, neboť účelová funkce nemusí být nad touto množinou shora (zdola) ohraničená.

V případě dvou proměnných lze úlohu lineárního programování vyřešit graficky pomocí vrstevnic účelové funkce (viz absolutní extrémy funkce dvou proměnných).

- Přípustnou množinu zakreslíme jako průnik konečného počtu polorovin určených omezujícími podmínkami.
- Grafem účelové funkce je rovina, jejíž vrstevnice jsou přímky.

Je-li **přípustná množina ohraničená**, pak účelová funkce nabývá na této množině svého maxima (resp. minima) v některém z vrcholů množiny.

Maximum (minimum) tedy můžeme najít

- 1 buď pomocí vrstevnic účelové funkce
- 2 nebo tak, že určíme vrcholy přípustné množiny, spočítáme hodnotu účelové funkce ve všech vrcholech a vybereme největší (resp. nejmenší) hodnotu.

Přitom se může stát, že funkce nabývá maxima (resp. minima) ve dvou různých vrcholech. V tom případě je maximum (minimum) nabyto ve všech bodech úsečky, jejíž krajní body jsou tyto vrcholy.

## Příklad (Ohraničená přípustná množina, jedno řešení)

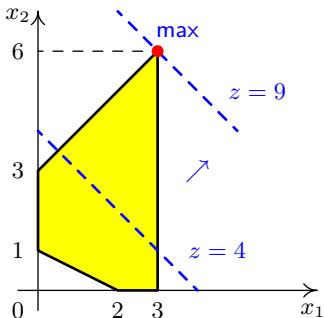
Najděte maximum funkce  $z = x_1 + x_2$  na množině určené nerovnostmi

$$x_1 - x_2 \geq -3$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 2$$

$$x_1 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Po nakreslení přípustné množiny vidíme, že tato množina je ohraničená. Úlohu můžeme tedy vyřešit graficky pomocí vrstevnic nebo porovnáním hodnot účelové funkce ve vrcholech:

$$z(0, 1) = 0 + 1 = 1$$

$$z(2, 0) = 2 + 0 = 2$$

$$z(3, 0) = 3 + 0 = 3$$

$$z(3, 6) = 3 + 6 = 9$$

$$z(0, 3) = 0 + 3 = 3$$

V obou případech vidíme, že účelová funkce nabývá maxima v bodě  $(3, 6)$  (optimální řešení). Optimální hodnota je 9.



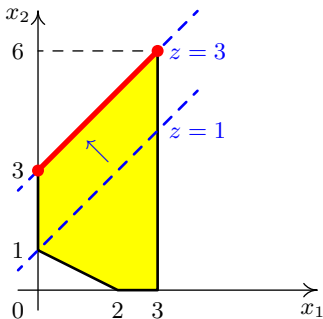
## Příklad (Ohraničená přípustná množina, více řešení)

Najděte maximum funkce  $z = -x_1 + x_2$  na množině určené nerovnostmi

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 &\geq -3 \\x_1 + 2x_2 &\geq 2 \\x_1 &\leq 3 \\x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

Porovnáme hodnoty účelové funkce ve vrcholech:

$$\begin{aligned}z(0, 1) &= -0 + 1 = 1 \\z(2, 0) &= -2 + 0 = -2 \\z(3, 0) &= -3 + 0 = -3 \\z(3, 6) &= -3 + 6 = 3 \\z(0, 3) &= -0 + 3 = 3\end{aligned}$$



Vidíme, že funkce nabývá maxima ve vrcholech  $(0, 3)$  a  $(3, 6)$ . To znamená, že maximum je nabyto ve všech bodech úsečky, která tyto dva body spojuje. Totéž je vidět i nakreselním vrstevnic účelové funkce. Optimální hodnota je 3.

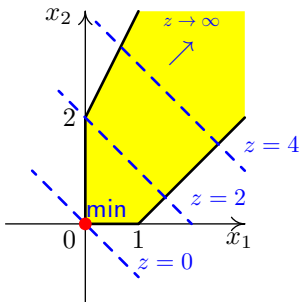
Je-li **přípustná množina neohraničená** a nabývá-li účelová funkce svého maxima (resp. minima) na této množině, pak je tohoto maxima (minima) nabyto v některém z vrcholů množiny.

Může však nastat situace, že účelová funkce svého maxima (resp. minima) na neohraničené množině vůbec nenabývá. Metodu dosazení vrcholů tedy nelze použít a maximum (resp. minimum) na neohraničené množině vyšetřujeme vždy pouze pomocí vrstevnic účelové funkce.

## Příklad (Neohraničená přípustná množina)

Najděte maximum a minimum funkce  $z = x_1 + x_2$  na množině určené nerovnostmi

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 &\leq 1 \\ -2x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$



Přípustná množina není ohraničená. Po nakreslení vrstevnic vidíme, že účelová funkce nabývá minimální hodnoty 0 v bodě (0,0). Úloha najít maximum však nemá řešení, neboť účelová funkce není na přípustné množině shora ohraničená. (Nabývá zde libovolně velkých hodnot.)

# Simplexová metoda

Simplexová metoda je (narozdíl od grafické metody) použitelná při libovolném počtu proměnných.

Idea této metody spočívá v tom, že “cestujeme po hranách” přípustné množiny od jednoho vrcholu ke druhému a hledáme vrchol s optimální hodnotou. Přitom není nutné obejít všechny vrcholy, neboť v každém vrcholu poznáme, zda jsme již dosáhli optimální hodnoty.

Metodu si vysvětlíme na úloze zadané ve speciálním tvaru. V obecném případě je postup obdobný, ale trochu komplikovanější.

Uvažujme maximalizační úlohu lineárního programování:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \rightarrow \max$$

na množině zadané soustavou lineárních nerovnic:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\leq b_m, \\ x_1, x_2, \dots, x_n &\geq 0, \end{aligned}$$

a předpokládejme, že  $b_j \geq 0$  pro každé  $j \in \{1, \dots, m\}$ .

Všimněme si, že takto zadaná přípustná množina není prázdná, neboť vektor  $(0, 0, \dots, 0)$  splňuje všechny nerovnice.

Každou z nerovnic tvořících vlastní omezení úlohy převedeme na rovnici tak, že k levé straně přičteme novou nezápornou proměnnou. Celkem tedy zavedeme dalších  $m$  proměnných, označme je  $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ . Tyto proměnné se nazývají **doplňkové proměnné** a vyjadřují rozdíl mezi levou a pravou stranou původních nerovností.

Původní úlohu jsme tedy převedli na úlohu:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max$$

na množině zadané soustavou lineárních rovnic:

$$\begin{aligned}
 & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} &= b_1 \\
 (4) \quad & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &+ x_{n+2} &= b_2 \\
 & \vdots \\
 & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &+ x_{n+m} &= b_m, \\
 & x_1, x_2, \dots, x_{n+m} \geq 0,
 \end{aligned}$$

## Definice (Bazické řešení)

Řešení  $(x_1, x_2, \dots, x_{n+m})$  soustavy (4) nazýváme **bazickým řešením**, jestliže

- $x_1, x_2, \dots, x_{n+m} \geq 0$ ,
- $n$  (z celkového počtu  $n + m$ ) proměnných je nulových
- sloupce matice soustavy (4) odpovídající zbývajícím  $m$  proměnným jsou lineárně nezávislé (tj. je možné je ekvivalentními úpravami převést na jednotkovou matici). Tyto proměnné nazýváme **bazické proměnné**.

Bazické řešení se nazývá **degenerované**, jestliže jsou nulové i některé bazické proměnné.

Tedy např. vektor, jehož složky jsou

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0, x_{n+1} = b_1, x_{n+2} = b_2, \dots, x_{n+m} = b_n,$$

je bazické řešení soustavy (4), přičemž bazické proměnné jsou  $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$  (sloupce odpovídající těmto proměnným tvoří jednotkovou matici a jsou tedy lineárně nezávislé).

## Věta (Charakterizace vrcholů)

*Vektor  $(x_1, x_2, \dots, x_{n+m})$  je bazickým řešením soustavy (4) právě tehdy, když  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  je vrcholem přípustné množiny.*

Danou úlohu jsme tedy převedli na úlohu najít takové bazické řešení soustavy (4), pro které je odpovídající hodnota účelové funkce  $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$  maximální. Hodnotu účelové funkce můžeme přidat do soustavy jako další proměnnou:

Rovnici  $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$  přepíšeme do tvaru

$$-c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n + z = 0$$

a přidáme k soustavě (4):

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} & & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & + x_{n+2} & = b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & + x_{n+m} & = b_m, \\ -c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n & & + z = 0 \end{array}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_{n+m} \geq 0,$$



Koeficienty získané soustavy zapíšeme do tabulky:

	$x_1$	$x_2$	$\cdots$	$x_n$	$x_{n+1}$	$x_{n+2}$	$\cdots$	$x_{n+m}$	
$x_{n+1}$	$a_{11}$	$a_{12}$	$\cdots$	$a_{1n}$	1	0	$\cdots$	0	$b_1$
$x_{n+2}$	$a_{21}$	$a_{22}$	$\cdots$	$a_{2n}$	0	1	$\cdots$	0	$b_2$
				$\vdots$					
$x_{n+m}$	$a_{m1}$	$a_{m2}$	$\cdots$	$a_{mn}$	0	0	$\cdots$	1	$b_m$
$z$	$-c_1$	$-c_2$	$\cdots$	$-c_n$	0	0	$\cdots$	0	0

Toto je tzv. výchozí **simplexová tabulka** a můžeme z ní vyčíst výchozí bazické řešení:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0, x_{n+1} = b_1, x_{n+2} = b_2, \dots, x_{n+m} = b_n.$$

V levém sloupci vidíme bazické proměnné a proměnnou  $z$ , v pravém sloupci vidíme hodnotu bazických proměnných a hodnotu proměnné  $z$  (tj. hodnotu účelové funkce). Ostatní proměnné nejsou bazické a klademe je rovny nule. Toto výchozí přípustné řešení odpovídá vrcholu  $(0, 0, \dots, 0)$  přípustné množiny, hodnota účelové funkce je zde nulová.

Sloupec odpovídající proměnné  $z$  jsme záměrně vynechali, neboť se dále nebude měnit.

Nyní je potřeba odpovědět na otázku, zda je výchozí hodnota  $z$  optimální a pokud ne, jakým způsobem najít bazické řešení s větší hodnotou, případně jak poznat, že optimální hodnota neexistuje.

## Kriterium optimality

- Jsou-li všechny koeficienty v posledním řádku tabulky (řádek účelové funkce) nezáporné, pak  $z$  je optimální hodnota a odpovídající vektor  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  (v případě výchozí tabulky  $(0, 0, \dots, 0)$ ) je optimální řešení.
- Je-li alespoň jeden koeficient v posledním řádku záporný, vybereme koeficient s nejvíce zápornou hodnotou a sloupec, ve kterém se tento koeficient nachází, nazveme **klíčový sloupec**.
  - a. Pokud se v klíčovém sloupci nenachází žádný kladný prvek, znamená to, že účelová funkce není nad přípustnou množinou shora ohraničená a maximální hodnota tedy neexistuje. Úloha nemá řešení.
  - b. Pokud je alespoň jeden prvek v klíčovém sloupci kladný, pak najdeme nové bazické řešení.

## Přechod k novému bazickému řešení

- 1 Pro všechny kladné prvky v klíčovém sloupci spočteme podíly:

$$\frac{\text{odpovídající hodnota } b_j}{\text{kladný prvek klíčového sloupce v } j\text{-tém řádku}}$$

a vybereme prvek, pro který je tento podíl nejmenší. Tento prvek nazveme **klíčový prvek** a odpovídající řádek nazveme **klíčový řádek**.

- 2 Pomocí ekvivalentních řádkových úprav upravíme tabulku tak, abychom místo klíčového prvku dostali číslo jedna a na všech ostatních pozicích v klíčovém sloupci byly nuly. (Klíčový řádek vydělíme klíčovým prvkem a poté vhodné násobky klíčového řádku přičítáme k ostatním řádkům tabulky.)
- 3 Provedeme přepsání bazických proměnných v prvním sloupci. Místo původní proměnné bude v klíčovém řádku proměnná odpovídající klíčovému sloupci.
- 4 Z nové tabulky vyčteme nové bazické řešení a odpovídající hodnotu  $z$ . Stejným způsobem jako u výchozího řešení zjistíme, zda je hodnota optimální a pokud ne, přejdeme k dalšímu bazickému řešení.

## Příklad (Simplexová metoda)

Řešte úlohu

$$z = 2x_1 + x_2 - 2x_3 \rightarrow \max$$

při omezujících podmínkách

$$2x_1 - x_2 - x_3 \leq 2$$

$$x_1 - x_2 + x_3 \leq 4$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Zavedeme dopřkové proměnné a převedeme na soustavu rovnic (spolu s rovnicí pro účelovou funkci):

$$2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2$$

$$x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 4$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 = 6$$

$$-2x_1 - x_2 + 2x_3 + z = 0$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

## Příklad (Simplexová metoda – pokračování)

Výchozí tabulka:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
$x_4$	2	-1	-1	1	0	0	2
$x_5$	1	-1	1	0	1	0	4
$x_6$	1	1	2	0	0	1	6
$z$	-2	-1	2	0	0	0	0

Výchozí bazické řešení:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$ ,  $x_4 = 2$ ,  $x_5 = 4$ ,  $x_6 = 6$ ,  $z = 0$ .

V posledním řádku tabulky jsou záporné hodnoty  $\implies$  budeme hledat jiné bazické řešení s větší hodnotou  $z$ .

## Příklad (Simplexová metoda – pokračování)

Výchozí tabulka:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
$x_4$	2	-1	-1	1	0	0	2
$x_5$	1	-1	1	0	1	0	4
$x_6$	1	1	2	0	0	1	6
$z$	-2	-1	2	0	0	0	0

Výchozí bazické řešení:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$ ,  $x_4 = 2$ ,  $x_5 = 4$ ,  $x_6 = 6$ ,  $z = 0$ .

V posledním řádku tabulky jsou záporné hodnoty  $\implies$  budeme hledat jiné bazické řešení s větší hodnotou  $z$ .

Z posledního řádku tabulky vybereme nejvíce záporný prvek. Tento prvek určuje klíčový sloupec.

## Příklad (Simplexová metoda – pokračování)

Výchozí tabulka:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
$x_4$	2	-1	-1	1	0	0	2
$x_5$	1	-1	1	0	1	0	4
$x_6$	1	1	2	0	0	1	6
$z$	-2	-1	2	0	0	0	0

Výchozí bazické řešení:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$ ,  $x_4 = 2$ ,  $x_5 = 4$ ,  $x_6 = 6$ ,  $z = 0$ .

V posledním řádku tabulky jsou záporné hodnoty  $\implies$  budeme hledat jiné bazické řešení s větší hodnotou  $z$ .

Z posledního řádku tabulky vybereme nejvíce záporný prvek. Tento prvek určuje klíčový sloupec. Pro všechna kladná čísla v klíčovém sloupci spočítáme podíly:

$$\frac{2}{2} = 1, \quad \frac{4}{1} = 4, \quad \frac{6}{1} = 6$$

## Příklad (Simplexová metoda – pokračování)

Výchozí tabulka:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
$x_4$	2	-1	-1	1	0	0	2
$x_5$	1	-1	1	0	1	0	4
$x_6$	1	1	2	0	0	1	6
$z$	-2	-1	2	0	0	0	0

Výchozí bazické řešení:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$ ,  $x_4 = 2$ ,  $x_5 = 4$ ,  $x_6 = 6$ ,  $z = 0$ .

V posledním řádku tabulky jsou záporné hodnoty  $\implies$  budeme hledat jiné bazické řešení s větší hodnotou  $z$ .

Z posledního řádku tabulky vybereme nejvíce záporný prvek. Tento prvek určuje klíčový sloupec. Pro všechna kladná čísla v klíčovém sloupci spočítáme podíly:

$$\boxed{\frac{2}{2} = 1}, \quad \frac{4}{1} = 4, \quad \frac{6}{1} = 6$$

Vybereme prvek, pro který je podíl nejmenší – klíčový prvek.



## Příklad (Simplexová metoda – pokračování)

Výchozí tabulka:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
$x_4$	2	-1	-1	1	0	0	2
$x_5$	1	-1	1	0	1	0	4
$x_6$	1	1	2	0	0	1	6
$z$	-2	-1	2	0	0	0	0

Výchozí bazické řešení:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$ ,  $x_4 = 2$ ,  $x_5 = 4$ ,  $x_6 = 6$ ,  $z = 0$ .

V posledním řádku tabulky jsou záporné hodnoty  $\implies$  budeme hledat jiné bazické řešení s větší hodnotou  $z$ .

Z posledního řádku tabulky vybereme nejvíce záporný prvek. Tento prvek určuje klíčový sloupec. Pro všechna kladná čísla v klíčovém sloupci spočítáme podíly:

$$\boxed{\frac{2}{2} = 1}, \quad \frac{4}{1} = 4, \quad \frac{6}{1} = 6$$

Vybereme prvek, pro který je podíl nejmenší – klíčový prvek. Pomocí ekvivalentních řádkových úprav přejdeme k nové tabulce, ve které bude na místě klíčového prvku číslo 1 a všude jinde v klíčovém sloupci budou nuly. (Klíčový řádek vydělíme číslem 2 a poté přičteme vhodné násobky klíčového řádku k ostatním řádkům.)

V prvním sloupci přepíšeme bazické proměnné – novou bazickou proměnnou bude  $x_1$  (místo  $x_4$ ).

## Příklad (Simplexová metoda – pokračování)

Druhá tabulka:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
$x_1$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	1
$x_5$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	3
$x_6$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	5
$z$	0	-2	1	1	0	0	2

Bazické řešení:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$ ,  $x_4 = 0$ ,  $x_5 = 3$ ,  $x_6 = 5$ ,  $z = 2$ .

V posledním řádku tabulky je záporná hodnota  $\implies$  hledáme další bazické řešení s větší hodnotou  $z$ .

## Příklad (Simplexová metoda – pokračování)

Druhá tabulka:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
$x_1$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	1
$x_5$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	3
$x_6$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	5
$z$	0	<b>-2</b>	1	1	0	0	2

Bazické řešení:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$ ,  $x_4 = 0$ ,  $x_5 = 3$ ,  $x_6 = 5$ ,  $z = 2$ .

V posledním řádku tabulky je záporná hodnota  $\implies$  hledáme další bazické řešení s větší hodnotou  $z$ .

Jediná záporná hodnota v posledním řádku určuje klíčový sloupec,

## Příklad (Simplexová metoda – pokračování)

Druhá tabulka:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
$x_1$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	1
$x_5$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	3
$x_6$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	5
$z$	0	-2	1	1	0	0	2

Bazické řešení:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$ ,  $x_4 = 0$ ,  $x_5 = 3$ ,  $x_6 = 5$ ,  $z = 2$ .

V posledním řádku tabulky je záporná hodnota  $\implies$  hledáme další bazické řešení s větší hodnotou  $z$ .

Jediná záporná hodnota v posledním řádku určuje klíčový sloupec, jediná kladná hodnota v klíčovém sloupci určuje klíčový prvek.

## Příklad (Simplexová metoda – pokračování)

Druhá tabulka:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
$x_1$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	1
$x_5$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	3
$x_6$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	5
$z$	0	-2	1	1	0	0	2

Bazické řešení:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$ ,  $x_4 = 0$ ,  $x_5 = 3$ ,  $x_6 = 5$ ,  $z = 2$ .

V posledním řádku tabulky je záporná hodnota  $\implies$  hledáme další bazické řešení s větší hodnotou  $z$ .

Jediná záporná hodnota v posledním řádku určuje klíčový sloupec, jediná kladná hodnota v klíčovém sloupci určuje klíčový prvek.

Pomocí ekvivalentních řádkových úprav přejdeme k nové tabulce, ve které bude na místě klíčového prvku číslo 1 a všude jinde v klíčovém sloupci budou nuly. (Klíčový řádek vydělíme číslem  $\frac{3}{2}$  a poté přičteme vhodné násobky klíčového řádku k ostatním řádkům.) V prvním sloupci přepíšeme bazické proměnné – novou bazickou proměnnou bude  $x_2$  (místo  $x_6$ ).

## Příklad (Simplexová metoda – pokračování)

Třetí tabulka:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
$x_1$	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$
$x_5$	0	0	$\frac{7}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{14}{3}$
$x_2$	0	1	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{10}{3}$
$z$	0	0	$\frac{13}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{26}{3}$

Bazické řešení:  $x_1 = \frac{8}{3}$ ,  $x_2 = \frac{10}{3}$ ,  $x_3 = 0$ ,  $x_4 = 0$ ,  $x_5 = \frac{14}{3}$ ,  $x_6 = 0$ ,  $z = \frac{26}{3}$ .

V posledním řádku tabulky není žádná záporná hodnota  $\implies$  našli jsme optimální řešení.

Optimální řešení:  $x_1 = \frac{8}{3}$ ,  $x_2 = \frac{10}{3}$ ,  $x_3 = 0$ .

Optimální hodnota:  $z = \frac{26}{3}$ .

# Minimalizační úloha

Postup simplexové metody jsme si vysvětlili v případě, kdy hledáme maximum účelové funkce. Obecně platí:

$$\min f = -\max(-f).$$

Máme-li tedy na zadané přípustné množině najít minimum funkce

$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ , postupujeme tak, že najdeme maximum funkce

$\tilde{z} = -c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n$ .

Mohou nastat tyto případy:

- Maximum funkce  $\tilde{z} = -c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n$  na dané množině neexistuje. Pak na dané množině neexistuje ani minimum funkce  $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ .
- Maximum funkce  $\tilde{z} = -c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n$  na dané množině existuje. Nechť hodnota tohoto maxima je  $\bar{z}$ . Pak existuje i minimum funkce  $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$  (ve stejných bodech jako maximum funkce  $\tilde{z}$ ) a jeho hodnota je  $-\bar{z}$ .

## Příklad

Řešte úlohu

$$z = 2x_1 + x_2 - 2x_3 \rightarrow \max$$

při omezujících podmínkách

$$2x_1 - x_2 - x_3 \leq 2$$

$$x_1 - x_2 + x_3 \leq 4$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Řešení pomocí Wolfram Alpha (<http://www.wolframalpha.com/>):

maximize  $2x+y-2z$  on  $2x-y-z \leq 2$ ,  $x-y+z \leq 4$ ,  $x+y+2z \leq 6$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$