Euklidovský prostor. Funkce dvou proměnných: základní pojmy, limita a spojitost.

Vyšší matematika

LDF MENDELU

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

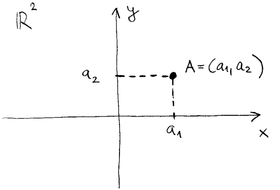
Podpořeno projektem Průřezová inovace studijních programů Lesnické a dřevařské fakulty MENDELU v Brně (LDF) s ohledem na disciplíny společného základu http://akademie.ldf.mendelu.cz/cz (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0021) za přispění finančních prostředků EU a státního rozpočtu České republiky.

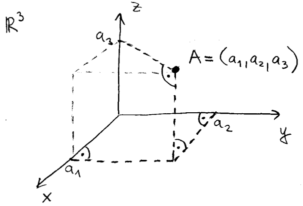
Prostor $\mathbb{R}^n$

- $\mathbb{R}$ – množina reálných čísel (prvky znázorňujeme jako body na číselné ose)
- $\mathbb{R}^n$ – množina uspořádaných n-tic reálných čísel

  Prvky množin $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ znázorňujeme obvykle v kartézské souřadnicové soustavě.

  - $\mathbb{R}^2$ – množina uspořádaných dvojic reálných čísel (prvky znázorňujeme jako body v rovině)
    - souřadnicové osy: x, y
  - $\mathbb{R}^3$ – množina uspořádaných trojic reálných čísel (prvky znázorňujeme jako body v trojrozměrném prostoru)
    - souřadnicové osy: x, y, z
    - souřadnicové roviny: xy $(z = 0)$, xz $(y = 0)$, yz $(x = 0)$





Vzdálenost v $\mathbb{R}^n$

Definice (Euklidovský metrický prostor)

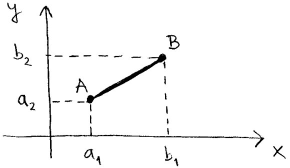
Nechť $A = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2, B = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$.

- Euklidovská vzdálenost bodů A, B je číslo $\varrho(A, B)$ definované vztahem

$$\varrho(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}.$$

- Pravidlo ϱ, které dvojici bodů přiřazuje jejich Euklidovskou vzdálenost se nazývá euklidovská metrika.
- Množina $\mathbb{R}^2$ s euklidovskou metrikou definovanou pro každé dva body z $\mathbb{R}^2$ se nazývá euklidovský metrický prostor a značí se $\mathbb{E}^2$.

Euklidovská vzdálenost dvou bodů je rovna délce úsečky, která tyto body spojuje:



Analogicky se definuje euklidovská vzdálenost v $\mathbb{R}^n$ a vícerozměrné euklidovské prostory $\mathbb{E}^n$. Například euklidovská vzdálenost bodů $A = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3, B = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ je definována vztahem

$$\varrho(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}.$$

Příklad (Euklidovská vzdálenost bodů)

Určete euklidovskou vzdálenost bodů

1. $A = (2, 1)$, $B = (3, 4)$

$$\rho(A, B) = \sqrt{(3-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

2. $A = (2, 1, 3)$, $B = (0, 1, 4)$

$$\rho(A, B) = \sqrt{(0-2)^2 + (1-1)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{4+0+1} = \sqrt{5}$$

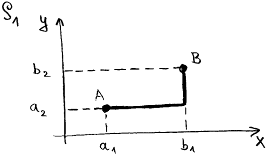
Věta (Vlastnosti euklidovské metriky)

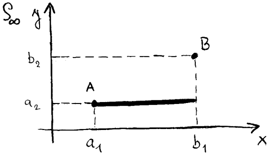
Pro libovolné body $A, B, C \in \mathbb{E}^n$ *platí:*

1. $\varrho(A, B) = 0 \iff A = B$ *(totožnost)*
2. $\varrho(A, B) = \varrho(B, A)$ *(symetrie)*
3. $\varrho(A, B) + \varrho(B, C) \geq \varrho(A, C)$ *(trojúhelníková nerovnost)*

Vzdálenost dvou bodů se často definuje i jiným způsobem, pomocí jiné metriky než euklidovské. Přitom se zcela přirozeně požaduje, aby každá metrika, která definuje vzdálenost, měla vlastnosti uvedené v předchozí větě. Například:

$$\varrho_1(A, B) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|,$$
$$\varrho_\infty(A, B) = \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}.$$





Poznamenejme, že v $\mathbb{R}$ definují uvedené metriky ϱ, ϱ_1, ϱ_∞ stejnou vzdálenost (jsou totožné).

Definice (Okolí bodu)

Nechť $A \in \mathbb{E}^n, \varepsilon > 0$ je reálné číslo.

- ε-okolím $O_\varepsilon(A)$ bodu A rozumíme množinu všech bodů, které mají od daného bodu A vzdálenost menší než ε, tj.

$$O_\varepsilon(A) = \{X \in \mathbb{E}^n : \varrho(X, A) < \varepsilon\}.$$

- Ryzím (redukovaným, prstencovým) ε-okolím $\hat{O}_\varepsilon(A)$ bodu A rozumíme množinu

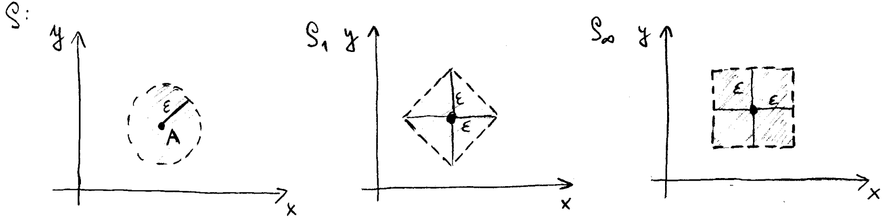
$$\hat{O}_\varepsilon(A) = O_\varepsilon(A) \setminus \{A\}.$$

Nebude-li poloměr okolí podstatný, budeme index ε vynechávat.

- ε-okolí bodu $A \in \mathbb{E}^2$ je množina všech bodů uvnitř kruhu se středem v bodě A a poloměrem ε
- ε-okolí bodu $A \in \mathbb{E}^3$ je množina všech bodů uvnitř koule se středem v bodě A a poloměrem ε

Pokud bychom uvažovali jinou metriku než euklidovskou, potom by okolí mělo jiný tvar, například volbou metriky ϱ_∞ dostáváme čtvercové, resp. krychlové okolí.

ε-okolí v metrikách $\varrho, \varrho_1, \varrho_\infty$:

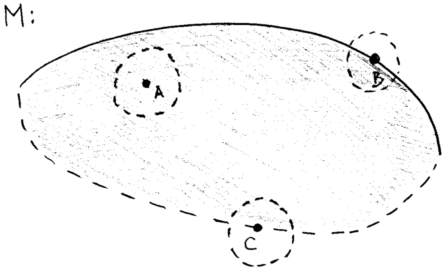


V dalším budeme vzdálenost chápat jako euklidovskou.

Význačné body a množiny bodů

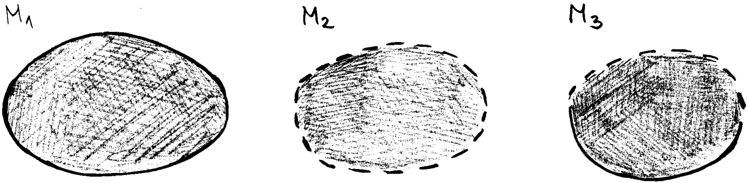
Nechť $M \subseteq \mathbb{E}^n$ je neprázdná množina bodů.

- Bod $A \in M$ se nazývá vnitřní bod množiny M, jestliže existuje okolí tohoto bodu, které celé patří do množiny M. Množina všech vnitřních bodů množiny M se nazývá vnitřek množiny M.
- Bod A se nazývá hraniční bod množiny M, jestliže v každém jeho okolí leží alespoň jeden bod, který patří do množiny M a zároveň alespoň jeden bod, který nepatří do množiny M. Množina všech hraničních bodů množiny M se nazývá hranice množiny M. Hraniční body nemusí patřit do množiny.



- A je vnitřní bod
- $B \in M$ je hraniční bod
- $C \notin M$ je hraniční bod

- Množina M se nazývá otevřená, jestliže každý její bod je jejím vnitřním bodem.
- Množina M se nazývá uzavřená, jestliže obsahuje všechny své hraniční body.

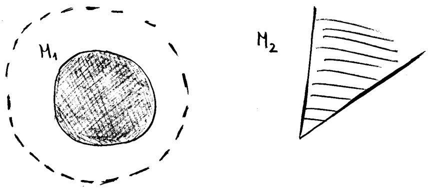


∗ M_1 je uzavřená

∗ M_2 je otevřená

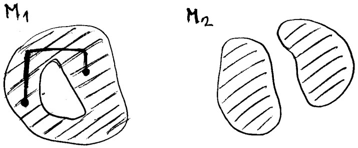
∗ M_3 není ani uzavřená ani otevřená

- Množina M se nazývá ohraničená (omezená), jestliže leží v okolí (libovolně velkém) nějakého bodu z $\mathbb{E}^n$.



  * M_1 je ohraničená
  * M_2 není ohraničená

- Množina M se nazývá souvislá, jestliže každé dva body z této množiny lze spojit lomenou čárou, která celá leží v M.
- Otevřená a souvislá množina se nazývá oblast, uzavřená a souvislá množina se nazývá uzavřená oblast.



  * M_1 je souvislá
  * M_2 není souvislá

Funkce dvou proměnných

Definice (Funkce dvou proměnných)

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^2$ je neprázdná množina. Pravidlo f, které každému prvku $(x, y) \in M$ přiřazuje právě jeden prvek $z \in \mathbb{R}$, se nazývá funkce dvou proměnných. Píšeme $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nebo explicitně $z = f(x, y)$.

- Množina M se nazývá definiční obor funkce f a značí se $D(f)$.
- Množina všech $z \in \mathbb{R}$, pro něž existuje bod $(x, y) \in M$ takový, že $z = f(x, y)$, se nazývá obor hodnot funkce f a značí se $H(f)$.
- Proměnné x, y se nazývají nezávislé proměnné, z se nazývá závislá proměnná.

Každá funkce je jednoznačně určena svým definičním oborem a funkčním předpisem (tj. předpisem, který každému bodu (x, y) z definičního oboru přiřazuje funkční hodnotu $f(x, y)$).

Pokud není definiční obor zadaný a funkční předpis je dán vzorcem, pak definičním oborem rozumíme množinu všech $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, pro něž má daný vzorec smysl.

Definiční obor funkce zobrazujeme jako množinu bodů v rovině xy.

Příklad

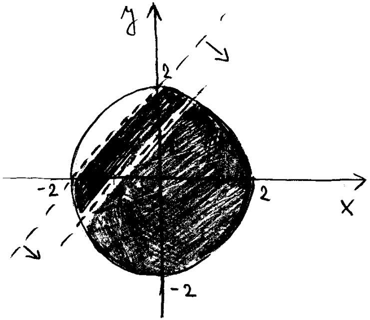
Určete definiční obor funkce $z = \frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\ln(x-y+2)}$ a zakreslete v rovině xy.

Řešení: Body z definičního oboru musí splňovat následující tři podmínky:

1. $$4 - x^2 - y^2 \geq 0$$
   $$x^2 + y^2 \leq 4$$

2. $$\ln(x - y + 2) \neq 0$$
   $$x - y + 2 \neq 1$$
   $$y \neq x + 1$$

3. $$x - y + 2 > 0$$
   $$y < x + 2$$



Grafické znázornění funkce dvou proměnných

Definice (Graf funkce)

Grafem funkce dvou proměnných $z = f(x, y)$ rozumíme množinu všech uspořádaných trojic $(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3$, kde $(x, y) \in D(f)$.

- Grafem funkce dvou proměnných je množina bodů v trojrozměrném prostoru, obvykle nějaká plocha.
- Pro získání představy, jaký je tvar této plochy nám pomohou řezy významnými rovinami - souřadnicové roviny $(x = 0, y = 0, z = 0)$ a roviny s nimi rovnoběžné, především řezy rovinami $z = c,\ c \in \mathbb{R}$.

Definice (Vrstevnice funkce)

Vrstevnicí funkce $z = f(x, y)$ na úrovni c rozumíme množinu všech bodů $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, pro které $f(x, y) = c$.

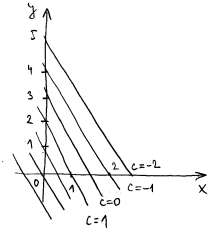
Příklad (Rovina)

Určete vrstevnice funkce $z = 3 - 2x - y$ a nakreslete graf.

- Vrstevnice:

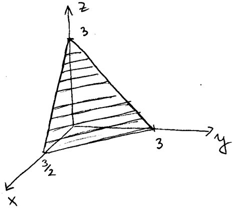
$$3 - 2x - y = c,\ c \in \mathbb{R} \Rightarrow y = 3 - 2x - c$$

$$\begin{aligned} c = -1: &\quad y = 4 - 2x \\ c = 0: &\quad y = 3 - 2x \\ c = 1: &\quad y = 2 - 2x \\ c = 2: &\quad y = 1 - 2x \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$



- Graf - určíme průsečíky se souřadnými osami:

$$\begin{aligned} x = 0,\ y = 0 &\Rightarrow z = 3 \\ x = 0,\ z = 0 &\Rightarrow y = 3 \\ y = 0,\ z = 0 &\Rightarrow x = 3/2 \end{aligned}$$

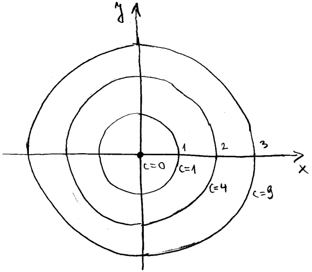


Příklad (Paraboloid)

Určete vrstevnice funkce $z = x^2 + y^2$.

$$x^2 + y^2 = c, \ c \geq 0 \Rightarrow \text{kružnice}$$

$$\begin{aligned} c = 0: &\quad (0,0) \\ c = 1: &\quad x^2 + y^2 = 1 \\ c = 4: &\quad x^2 + y^2 = 4 \\ c = 9: &\quad x^2 + y^2 = 9 \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

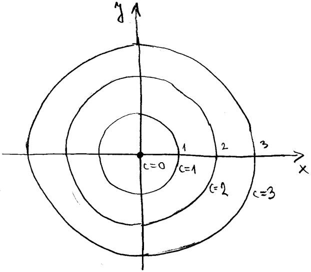


Příklad (Kužel)

Určete vrstevnice funkce $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$\sqrt{x^2 + y^2} = c,\ c \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = c^2 \Rightarrow \text{kružnice}$$

$$\begin{aligned} c = 0 &: \quad (0,0) \\ c = 1 &: \quad x^2 + y^2 = 1 \\ c = 2 &: \quad x^2 + y^2 = 4 \\ c = 3 &: \quad x^2 + y^2 = 9 \\ &\ \vdots \end{aligned}$$

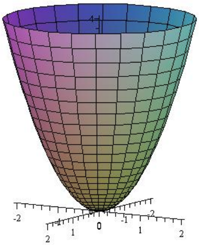


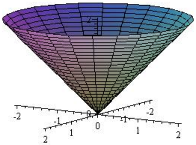
Grafy některých funkcí

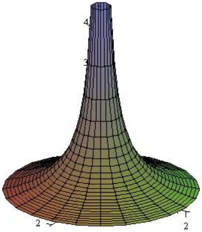
$z = x^2 + y^2$

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$

$z = \frac{1}{x^2+y^2}$

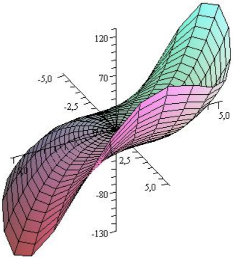




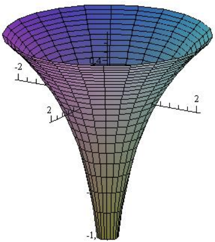


Grafy některých funkcí

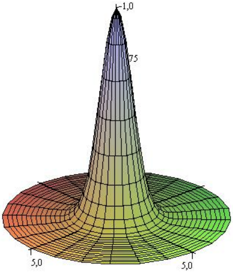
$z = x^3 + y^3$



$z = \ln(x^2 + y^2)$



$z = e^{-x^2-y^2}$

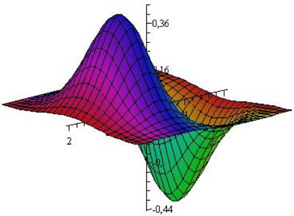


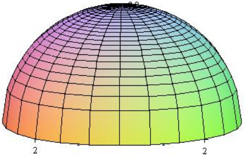
Grafy některých funkcí

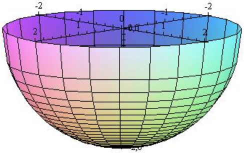
$$z = xe^{-x^2-y^2}$$

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

$$z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$$







Limita funkce dvou proměnných

Definice (Limita funkce)

Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je funkce definovaná v nějakém ryzím okolí bodu $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Řekneme, že funkce f má v bodě (x_0, y_0) limitu rovnu číslu $L \in \mathbb{R}$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\delta > 0$ tak, že pro všechny body (x, y) z ryzího δ-okolí bodu (x_0, y_0) platí $|f(x, y) - L| < \varepsilon$. Píšeme

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L.$$

Bod (x_0, y_0) se nazývá limitní bod.

Podobně jako pro funkci jedné proměnné je možné definovat i nevlastní limity a limity v nevlastních bodech. (Za nevlastní bod považujeme bod, jehož alespoň jedna souřadnice je nevlastní.)

Vlastnosti limit

Pro limitu funkce dvou proměnných platí podobná tvrzení jako pro limitu funkce jedné proměnné.

- Funkce nemusí být v bodě (x_0, y_0) definovaná a může zde mít limitu.
- Funkce může mít v bodě nejvýše jednu limitu.
- Limita součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí je rovna součtu, rozdílu, součinu a podílu limit jednotlivých funkcí (za předpokladu, že všechny limity existují a příslušné operace jsou definovány, tj. nejedná se o neurčité výrazy.)

Výpočet limity funkce dvou proměnných je mnohem obtížnější než u funkce jedné proměnné:

- U funkce jedné proměnné se k limitnímu bodu můžeme blížit jen po přímce ze dvou stran, u funkce dvou proměnných se můžeme blížit z nekonečně mnoha různých směrů po různých křivkách. Existují-li dvě různé cesty vedoucí k různým hodnotám limity, pak limita v daném bodě neexistuje.
- Neexistuje žádná analogie l'Hospitalova pravidla.

Spojitost funkce

Definice (Spojitost funkce)

- Řekneme, že funkce dvou proměnných f je spojitá v bodě (x_0, y_0), jestliže má v tomto bodě vlastní limitu a platí

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

- Řekneme, že funkce dvou proměnných f je spojitá na množině $M \subseteq \mathbb{R}^2$, jestliže pro každý bod $(x_0, y_0) \in M$ platí

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0), \quad \text{kde} \quad (x,y) \in M.$$

- Je-li funkce v daném bodě spojitá, musí být v tomto bodě definovaná.
- Body, v nichž není funkce spojitá, se nazývají body nespojitosti.
- Součet, rozdíl a součin funkcí spojitých v bodě (x_0, y_0) je funkce spojitá v bodě (x_0, y_0). Podíl dvou funkcí spojitých v bodě (x_0, y_0) je funkce spojitá v bodě (x_0, y_0), pokud (x_0, y_0) není nulovým bodem jmenovatele.

Vlastnosti spojitých funkcí

Věta (Weierstrassova)

Nechť funkce dvou proměnných f je spojitá na ohraničené a uzavřené množině $M \subset \mathbb{R}^2$. Pak f nabývá na M své největší a nejmenší hodnoty.

Důsledek: Funkce, která je spojitá na ohraničené a uzavřené množině, je na této množině ohraničená.

Věta (Bolzanova)

Nechť funkce dvou proměnných f je spojitá na souvislé množině $M \subset \mathbb{R}^2$ a nechť pro dva body $A, B \in M$ platí $f(A) \neq f(B)$. Pak ke každému číslu c ležícímu mezi $f(A)$ a $f(B)$ existuje $C \in M$ tak, že $f(C) = c$.

Důsledek: Nechť funkce dvou proměnných f je spojitá na souvislé množině $M \subset \mathbb{R}^2$ a nechť pro dva body $A, B \in M$ platí $f(A) \cdot f(B) < 0$. Pak existuje $C \in M$ tak, že $f(C) = 0$.

Využití systémů počítačové algebry

- Využití systémů Sage, Maxima, Wolfram Alpha:

  `http://user.mendelu.cz/marik/akademie/`

- Matematické výpočty online (MAW) - definiční obory:

  `http://um.mendelu.cz/maw-html/index.php?lang=cs&form=df3d`

Příklad

Určete definiční obor, vrstevnice a nakreslete graf pro $x \in [-3, 3]$ a $y \in [-10, 10]$ funkce

$$y = \sqrt{x^2 - y}.$$

Řešení pomocí Wolfram Alpha (`http://www.wolframalpha.com/`):

- Definiční obor:

  ```
  domain sqrt(x^2-y)
  ```

- Vrstevnice:

  ```
  contour plot sqrt(x^2-y)
  ```

- Graf (viz „real part“):

  ```
  graph sqrt(x^2-y) for x from -3 to 3, y from -10 to 10
  ```