Extrémy

Vyšší matematika

LDF MENDELU

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Podpořeno projektem Průřezová inovace studijních programů Lesnické a dřevařské fakulty MENDELU v Brně (LDF) s ohledem na disciplíny společného základu http://akademie.ldf.mendelu.cz/cz (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0021) za přispění finančních prostředků EU a státního rozpočtu České republiky.

Lokální extrémy

Definice (Lokální extrémy)

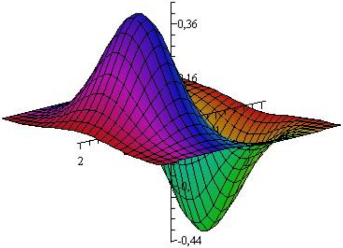
Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě (x_0, y_0)

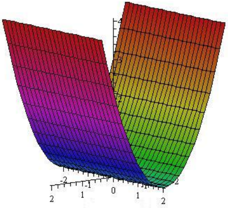
- lokální maximum, jestliže existuje okolí bodu (x_0, y_0) takové, že pro všechny body (x, y) z tohoto okolí platí $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$;
- lokální minimum, jestliže existuje okolí bodu (x_0, y_0) takové, že pro všechny body (x, y) z tohoto okolí platí $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$;
- ostré lokální maximum, jestliže existuje **ryzí** okolí bodu (x_0, y_0) takové, že pro všechny body (x, y) z tohoto okolí platí $f(x, y) < f(x_0, y_0)$;
- ostré lokální minimum, jestliže existuje **ryzí** okolí bodu (x_0, y_0) takové, že pro všechny body (x, y) z tohoto okolí platí $f(x, y) > f(x_0, y_0)$.

Pro lokální maxima a minima používáme společný název lokální extrémy. Pro ostrá lokální maxima a minima používáme společný název ostré lokální extrémy.

Příklad

$$z = xe^{-x^2-y^2} \qquad\qquad z = x^2$$





- Funkce $z = xe^{-x^2-y^2}$ má dva ostré lokální extrémy – jedno ostré lokální maximum a jedno ostré lokální minimum.
- Funkce $z = x^2$ má neostrá lokální minima ve všech bodech na ose y.

Nutná podmínka pro existenci lokálního extrému

Věta

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *má v bodě* $(x_0, y_0) \in D(f)$ *lokální extrém a nechť v tomto bodě existují obě parciální derivace. Pak*

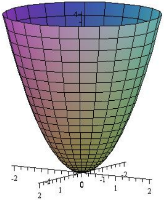
$$f'_x(x_0, y_0) = 0 \quad \text{a} \quad f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

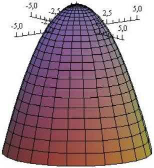
Definice (Stacionární bod)

Bod (x_0, y_0), pro který platí $f'_x(x_0, y_0) = 0$ a $f'_y(x_0, y_0) = 0$, se nazývá stacionární bod funkce f.

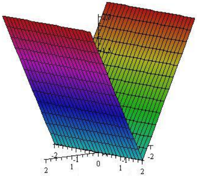
Funkce může mít tedy lokální extrémy pouze

- ve stacionárních bodech:

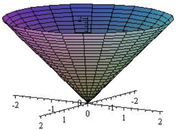




- nebo v bodech, kde alespoň jedna z parciálních derivací neexistuje:



(f'_x neexistuje na celé ose y)



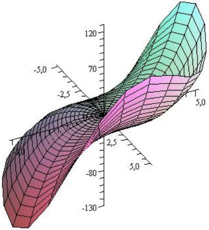
(v bodě $(0,0)$ neexistuje f'_x ani f'_y)

Obrácení poslední věty neplatí. Stacionární bod nemusí být bodem lokálního extrému.

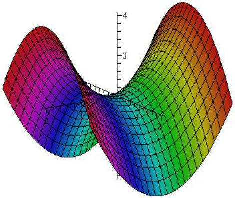
1. Například funkce $z = x^3 + y^3$ má v bodě $(0, 0)$ obě parciální derivace nulové, ale nemá zde lokální extrém (viz obrázek).

2. Stejně tak funkce $z = x^2 - y^2$ má v bodě $(0, 0)$ obě parciální derivace nulové, ale nemá zde lokální extrém (má zde tzv. **sedlo**, viz obrázek).

$z = x^3 + y^3$



$z = x^2 - y^2$



Postačující podmínka pro existenci lokálního extrému

Věta

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *má v bodě* (x_0, y_0) *a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace druhého řádu a nechť* (x_0, y_0) *je stacionární bod této funkce. Označme*

$$H(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}.$$

- *Je-li* $H(x_0, y_0) > 0$, *pak má funkce* f *v bodě* (x_0, y_0) *ostrý lokální extrém, a to*
  - *ostré lokální minimum, pokud* $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$
  - *ostré lokální maximum, pokud* $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$
- *Je-li* $H(x_0, y_0) < 0$, *pak funkce* f *v bodě* (x_0, y_0) *nemá lokální extrém.*
- *Je-li* $H(x_0, y_0) = 0$, *pak nelze o existenci lokálního extrému v bodě* (x_0, y_0) *na základě druhých derivací rozhodnout.*

Poznámka

1. Matice druhých derivací z předchozí věty se nazývá Hessova matice a determinant H se nazývá Hessián.

2. Je-li $H(x_0, y_0) > 0$, pak zřejmě $f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) > 0$ a tedy $f''_{xx}(x_0, y_0)$ a $f''_{yy}(x_0, y_0)$ mají stejné znaménko.
   To znamená, že podmínka $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ ($f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$) může být ve větě nahrazena ekvivalentní podmínkou $f''_{yy}(x_0, y_0) > 0$ ($f''_{yy}(x_0, y_0) < 0$).

Poznámka

Jsou-li splněny předpoklady předchozí věty, pak má funkce f ve stacionárním bodě (x_0, y_0) tečnou rovinu, která je vodorovná (rovnoběžná s rovinou xy).

- Je-li $H(x_0, y_0) > 0$ a $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, pak má funkce f v bodě (x_0, y_0) lokální minimum a tedy graf funkce f leží v okolí bodu (x_0, y_0) **nad tečnou rovinou** sestrojenou v tomto bodě. To je v souladu s tím, že funkce je konvexní ve směru osy x i y (neboť $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ a tedy i $f''_{yy}(x_0, y_0) > 0$).

- Je-li $H(x_0, y_0) > 0$ a $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$, pak má funkce f v bodě (x_0, y_0) lokální maximum a tedy graf funkce f leží v okolí bodu (x_0, y_0) **pod tečnou rovinou** sestrojenou v tomto bodě. To je v souladu s tím, že funkce je konkávní ve směru osy x i y (neboť $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ a tedy i $f''_{yy}(x_0, y_0) < 0$).

- Všimněme si ješte případu, kdy $f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) < 0$. V tom případě je funkce konvexní ve směru osy x a konkávní ve směru osy y (nebo opačně), tj. ve směru osy x má funkce v bodě (x_0, y_0) lokální maximum a ve směru osy y má funkce v bodě (x_0, y_0) lokální minimum (nebo naopak). Příkladem je již výše zmíněná funkce $z = x^2 - y^2$ a její stacionární bod $(0, 0)$ – **sedlo**.

Postup při vyšetřování lokálních extrémů funkce

1. Najdeme parciální derivace a položíme je rovny nule.
2. Vyřešením získané soustavy rovnic najdeme stacionární body.
3. Najdeme druhé parciální derivace.
4. Pomocí Hessiánu ve stacionárních bodech rozhodneme o existenci a druhu lokálních extrémů.
5. Existenci lokálních extrémů ve stacionárních bodech, v nichž je hodnota Hessiánu nulová a v bodech, v nichž některá z parciálních derivací neexistuje, vyšetřujeme na základě chování funkce v okolí těchto bodů (často velmi obtížné).

Příklad (lokální extrémy – 1. část)

Najděte lokální extrémy funkce $\boxed{z = x^3 + 2xy + y^3}$.

Příklad (lokální extrémy – 1. část)

Najděte lokální extrémy funkce $\boxed{z = x^3 + 2xy + y^3}$.

- Najdeme stacionární body:

$$\begin{aligned} z'_x &= 3x^2 + 2y = 0 \\ z'_y &= 2x + 3y^2 = 0 \end{aligned}$$

Příklad (lokální extrémy – 1. část)

Najděte lokální extrémy funkce $\boxed{z = x^3 + 2xy + y^3}$.

- Najdeme stacionární body:

$$\begin{aligned} z'_x &= 3x^2 + 2y = 0 \\ z'_y &= 2x + 3y^2 = 0 \end{aligned}$$

Z první rovnice si vyjádříme $y = -\frac{3}{2}x^2$ a dosadíme do druhé rovnice:

Příklad (lokální extrémy – 1. část)

Najděte lokální extrémy funkce $\boxed{z = x^3 + 2xy + y^3}$.

- Najdeme stacionární body:

$$\begin{aligned} z'_x &= 3x^2 + 2y = 0 \\ z'_y &= 2x + 3y^2 = 0 \end{aligned}$$

Z první rovnice si vyjádříme $y = -\frac{3}{2}x^2$ a dosadíme do druhé rovnice:

$$\begin{aligned} 2x + 3 \cdot \frac{9}{4}x^4 &= 0 \quad / \cdot 4 \\ 8x + 27x^4 &= 0 \\ x(8 + 27x^3) &= 0 \end{aligned}$$

Příklad (lokální extrémy – 1. část)

Najděte lokální extrémy funkce $\boxed{z = x^3 + 2xy + y^3}$.

- Najdeme stacionární body:

$$\begin{aligned} z'_x &= 3x^2 + 2y = 0 \\ z'_y &= 2x + 3y^2 = 0 \end{aligned}$$

Z první rovnice si vyjádříme $y = -\frac{3}{2}x^2$ a dosadíme do druhé rovnice:

$$\begin{aligned} 2x + 3 \cdot \frac{9}{4}x^4 &= 0 \quad / \cdot 4 \\ 8x + 27x^4 &= 0 \\ x(8 + 27x^3) &= 0 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 = 0 \quad &\Rightarrow \quad y_1 = 0 \\ x_2 = -\frac{2}{3} \quad &\Rightarrow \quad y_2 = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Příklad (lokální extrémy – 1. část)

Najděte lokální extrémy funkce $\boxed{z = x^3 + 2xy + y^3}$.

- Najdeme stacionární body:

$$\begin{aligned} z'_x &= 3x^2 + 2y = 0 \\ z'_y &= 2x + 3y^2 = 0 \end{aligned}$$

Z první rovnice si vyjádříme $y = -\frac{3}{2}x^2$ a dosadíme do druhé rovnice:

$$\begin{aligned} 2x + 3 \cdot \frac{9}{4}x^4 &= 0 \quad / \cdot 4 \\ 8x + 27x^4 &= 0 \\ x(8 + 27x^3) &= 0 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 = 0 \quad &\Rightarrow \quad y_1 = 0 \\ x_2 = -\frac{2}{3} \quad &\Rightarrow \quad y_2 = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Stacionární body: $\boxed{S_1 = (0,0), \quad S_2 = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)}$

Příklad (lokální extrémy – 2. část)

- Druhé derivace: $z''_{xx} = 6x,\ z''_{xy} = 2,\ z''_{yy} = 6y$

Příklad (lokální extrémy – 2. část)

- Druhé derivace: $z''_{xx} = 6x,\ z''_{xy} = 2,\ z''_{yy} = 6y$

$$\Longrightarrow \quad H(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & 2 \\ 2 & 6y \end{vmatrix}$$

Příklad (lokální extrémy – 2. část)

- Druhé derivace: $z''_{xx} = 6x,\ z''_{xy} = 2,\ z''_{yy} = 6y$

$$\Longrightarrow \quad H(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & 2 \\ 2 & 6y \end{vmatrix}$$

1. $H(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0 \quad \Rightarrow$ v bodě $(0,0)$ není lokální extrém

Příklad (lokální extrémy – 2. část)

- Druhé derivace: $z''_{xx} = 6x, \; z''_{xy} = 2, \; z''_{yy} = 6y$

$$\Longrightarrow \quad H(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & 2 \\ 2 & 6y \end{vmatrix}$$

1. $H(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0 \quad \Rightarrow$ v bodě $(0,0)$ není lokální extrém
2. $H(-2/3,-2/3) = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 12 > 0 \quad \Rightarrow$ v bodě $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ je lokální extrém a protože $z''_{xx} = -4 < 0$, jedná se o **lokální maximum**.

Příklad (Metoda nejmenších čtverců – 1. část)

Předpokládejme, že je dán soubor n bodů $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$.
Tyto body mohou být získány například jako výsledek měření veličin x a y, kdy pro hodnoty $x_1, x_2, \ldots, x_n$ veličiny x byly naměřeny odpovídající hodnoty $y_1, y_2, \ldots, y_n$ veličiny y.
Předpokládejme, že mezi veličinami x a y existuje vzájemný vztah. Pro jednoduchost předpokládejme, že tento vztah je lineární, tj. existují koeficienty a, b tak, že platí

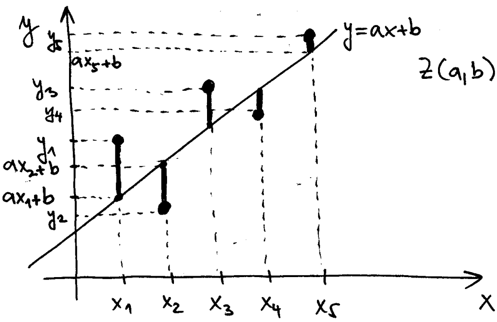
$$y = ax + b.$$

Teoreticky by tedy měly všechny body ležet na jedné přímce. To však neplatí, neboť naměřené hodnoty jsou zatíženy chybami měření.
Naším úkolem je aproximovat (vyrovnat) daný soubor bodů přímkou (tj. najít koeficienty a, b), jejíž graf prochází "co nejblíže" daných bodů. "Co nejblíže" znamená při metodě nejmenších čtverců, že součet čtverců (druhých mocnin) rozdílů naměřených hodnot y_i a hodnot na přímce $ax_i + b$ je co nejmenší.
K nalezení koeficientů a, b je tedy potřeba najít minimum funkce:

$$z(a, b) = (ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + \cdots + (ax_n + b - y_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2 .$$

Příklad (Metoda nejmenších čtverců – 2. část)

Ilustrace pro pět bodů:



$$
\begin{aligned}
Z(a,b) = {} & (ax_1+b-y_1)^2 \\
& + (ax_2+b-y_2)^2 \\
& + (ax_3+b-y_3)^2 \\
& + (ax_4+b-y_4)^2 \\
& + (ax_5+b-y_5)^2 \\
= {} & \boxed{\sum_{i=1}^{5} (ax_i+b-y_i)^2 \to \min}
\end{aligned}
$$

Příklad (Metoda nejmenších čtverců – 3. část)

Obecně hledáme minimum funkce dvou proměnných a, b:

$$z(a,b) = (ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + \cdots + (ax_n + b - y_n)^2$$

Najdeme tedy parciální derivace a položíme je rovny nule:

$$\begin{aligned} z'_a &= 2(ax_1 + b - y_1)x_1 + 2(ax_2 + b - y_2)x_2 + \cdots + 2(ax_n + b - y_n)x_n = 0 \\ z'_b &= 2(ax_1 + b - y_1) + 2(ax_2 + b - y_2) + \cdots + 2(ax_n + b - y_n) = 0 \end{aligned}$$

Obě rovnice vydělíme číslem 2 a upravíme:

$$\begin{aligned} ax_1^2 + bx_1 - x_1y_1 + ax_2^2 + bx_2 - x_2y_2 + \cdots + ax_n^2 + bx_n - x_ny_n &= 0 \\ ax_1 + b - y_1 + ax_2 + b - y_2 + \cdots + ax_n + b - y_n &= 0 \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{aligned} a(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) + b(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) &= x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots x_ny_n \\ a(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + bn &= y_1 + y_2 + \cdots + y_n \end{aligned}$$

Příklad (Metoda nejmenších čtverců – 4. část)

Získanou soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých a, b lze psát v tomto tvaru:

$$\begin{aligned} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn &= \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{aligned}$$

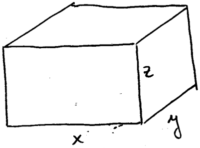
Řešením této soustavy dostaneme stacionární bod minimalizované funkce. Dá se ukázat, že tento bod existuje jediný (za předpokladu, že x-ové souřadnice všech bodů nejsou stejné) a jedná se o minimum. Řešením soustavy jsou tedy hledané koeficienty přímky.

Příklad (Nejlevnější bazén)

Určete rozměry zahradního bazénu daného objemu V s obdélníkovým dnem tak, aby se na jeho vyzdění spotřebovalo co nejméně materiálu.

Příklad (Nejlevnější bazén)

Určete rozměry zahradního bazénu daného objemu V s obdélníkovým dnem tak, aby se na jeho vyzdění spotřebovalo co nejméně materiálu.



$$S = xy + 2xz + 2yz, \quad V = xyz \Rightarrow z = \frac{V}{xy}$$

$$\Rightarrow \boxed{S = xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x} \to \min}$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} = y - \frac{2V}{x^2} = 0 \Rightarrow y = \frac{2V}{x^2} \ldots \text{dosadíme do druhé rovnice}$$

$$\frac{\partial S}{\partial y} = x - \frac{2V}{y^2} = 0$$

$$x - 2V\frac{x^4}{4V^2} = 0 \Rightarrow x\left(1 - \frac{x^3}{2V}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow \text{nulový objem} \\ x = \sqrt[3]{2V} \Rightarrow y = \sqrt[3]{2V} \Rightarrow z = \sqrt[3]{\frac{V}{4}}. \end{cases}$$

Ověření, že se jedná o minimum - determinant z matice druhých derivací:

$$\begin{vmatrix} \frac{4V}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{4V}{y^3} \end{vmatrix} \overset{x=y=\sqrt[3]{2V}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0,\ 2 > 0 \ \Rightarrow \ \text{minimum.}$$

Vázané lokální extrémy

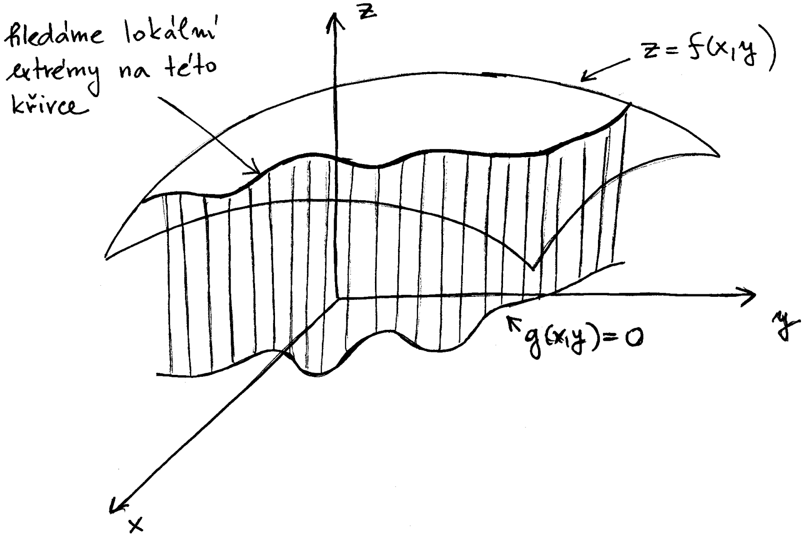
Definice (Vázané lokální extrémy)

Nechť f a g jsou funkce dvou proměnných a $(x_0, y_0) \in D(f)$ je bod, který splňuje podmínku $g(x_0, y_0) = 0$. Řekneme, že funkce f má v bodě (x_0, y_0)

- vázané lokální maximum (minimum) vzhledem k vazební podmínce $g(x, y) = 0$, jestliže existuje okolí bodu (x_0, y_0) tak, že pro všechny body (x, y) z tohoto okolí, které splňují podmínku $g(x, y) = 0$, platí $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ $(f(x, y) \geq f(x_0, y_0))$;
- ostré vázané lokální maximum (minimum) vzhledem k vazební podmínce $g(x, y) = 0$, jestliže existuje ryzí okolí bodu (x_0, y_0) tak, že pro všechny body (x, y) z tohoto okolí, které splňují podmínku $g(x, y) = 0$, platí $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ $(f(x, y) > f(x_0, y_0))$.

Poznámka

Vazební podmínka $g(x, y) = 0$ vyjadřuje vrstevnici funkce g na úrovni 0, je to tedy množina bodů (křivka) v rovině xy. Najít vázané etrémy funkce f znamená najít lokální extrémy této funkce, pokud zúžíme definiční obor funkce f na body ležící na křivce $g(x, y) = 0$.


hledáme lokální extrémy na této křivce
z
z = f(x, y)
g(x, y) = 0
y
x

Postup při vyšetřování vázaných lokálních extrémů funkce

Pokud lze z vazební podmínky vyjádřit $y = \varphi(x)$ nebo $x = \psi(y)$, převede se úloha určení vázaných lokálních extrémů na úlohu určení lokálních extrémů funkce jedné proměnné.
Předpokládejme například, že z vazební podmínky $g(x, y) = 0$ je vyjádřeno $y = \varphi(x)$.

- Vztah $y = \varphi(x)$ dosadíme do funkce $f(x, y)$ a hledáme lokální extrémy funkce $f(x, \varphi(x))$ jedné proměnné x.
- Má-li funkce $f(x, \varphi(x))$ lokální extrém v x_0, pak má funkce $f(x, y)$ v bodě $(x_0, \varphi(x_0))$ vázaný lokální extrém stejného typu vzhledem k zadané vazební podmínce.

Zcela analogicky postupujeme v případě, že z vazební podmínky máme vyjádřeno $x = \psi(y)$.
Pokud nelze žádnou z proměnných z vazební podmínky vyjádřit, je možné použít tzv. metodu Lagrangeových multiplikátorů (zájemci viz skripta).

Příklad (vázané lokální extrémy)

Najděte vázané lokální extrémy funkce $\boxed{z = x^2 + y^2}$ při vazební podmínce $2x + y = 1$.

Příklad (vázané lokální extrémy)

Najděte vázané lokální extrémy funkce $\boxed{z = x^2 + y^2}$ při vazební podmínce $2x + y = 1$.

Z vazební podmínky si vyjádříme $y = 1 - 2x$ a dosadíme do funkce:

$$z = x^2 + (1 - 2x)^2 = 5x^2 - 4x + 1$$

Příklad (vázané lokální extrémy)

Najděte vázané lokální extrémy funkce $\boxed{z = x^2 + y^2}$ při vazební podmínce $2x + y = 1$.

Z vazební podmínky si vyjádříme $y = 1 - 2x$ a dosadíme do funkce:

$$z = x^2 + (1 - 2x)^2 = 5x^2 - 4x + 1$$

Vyšetříme lokální extrémy získané funkce jedné proměnné:

$$z' = 10x - 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{2}{5}.$$

Příklad (vázané lokální extrémy)

Najděte vázané lokální extrémy funkce $\boxed{z = x^2 + y^2}$ při vazební podmínce $2x + y = 1$.

Z vazební podmínky si vyjádříme $y = 1 - 2x$ a dosadíme do funkce:

$$z = x^2 + (1 - 2x)^2 = 5x^2 - 4x + 1$$

Vyšetříme lokální extrémy získané funkce jedné proměnné:

$$z' = 10x - 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{2}{5}.$$

Pomocí druhé derivace $z'' = 10 > 0$ nebo vyšetřením znaménka první derivace v okolí stacionárního bodu $x = \frac{2}{5}$ zjistíme, že funkce $z = 5x^2 - 4x + 1$ má v bodě $x = \frac{2}{5}$ lokální minimum.

Příklad (vázané lokální extrémy)

Najděte vázané lokální extrémy funkce $\boxed{z = x^2 + y^2}$ při vazební podmínce $2x + y = 1$.

Z vazební podmínky si vyjádříme $y = 1 - 2x$ a dosadíme do funkce:

$$z = x^2 + (1 - 2x)^2 = 5x^2 - 4x + 1$$

Vyšetříme lokální extrémy získané funkce jedné proměnné:

$$z' = 10x - 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{2}{5}.$$

Pomocí druhé derivace $z'' = 10 > 0$ nebo vyšetřením znaménka první derivace v okolí stacionárního bodu $x = \frac{2}{5}$ zjistíme, že funkce $z = 5x^2 - 4x + 1$ má v bodě $x = \frac{2}{5}$ lokální minimum.

To znamená, že **funkce** $z = x^2 + y^2$ **má v bodě** $(2/5, 1/5)$ **vázané lokální minimum**. (Druhou souřadnici bodu dopočítáme dosazením $x = 2/5$ do $y = 1 - 2x$.)

Absolutní extrémy

Definice (Absolutní extrémy)

Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $M \subseteq D(f)$. Řekneme, že funkce f má v bodě $(x_0, y_0) \in M$ absolutní maximum (minimum) na množině M, jestliže $f(x,y) \leq f(x_0, y_0)$ $(f(x,y) \geq f(x_0, y_0))$ pro každé $(x,y) \in M$. Jsou-li nerovnosti pro $(x,y) \neq (x_0, y_0)$ ostré, mluvíme o ostrých absolutních extrémech.

Z Weierstrassovy věty vyplývá:

Věta

Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá na uzavřené a ohraničené množině $M \subseteq D(f)$. Pak f nabývá svých absolutních extrémů buď v bodech lokálních extrémů ležících uvnitř M nebo v některém hraničním bodě.

Postup při vyšetřování absolutních extrémů funkce

1. Najdeme lokální extrémy ležící uvnitř množiny M.
2. Vyšetříme body na hranici množiny M. Je-li hranice tvořena několika různými křivkami, rozdělíme ji na několik částí. Vyšetříme vázané lokální extrémy na každé z těchto částí hranice, tj. dosadíme rovnice křivek tvořící jednotlivé části hranice do zadané funkce a vyšetřujeme lokální extrémy funkce jedné proměnné.
3. Pokud jsme hranici rozdělili na více částí, určíme body, kde se jednotlivé části spojují. (Průsečíky křivek tvořící hranici.)
4. Ve všech získaných bodech určíme funkční hodnotu a vybereme ty body, pro které je funkční hodnota největší (absolutní maximum) a nejmenší (absolutní minimum).

Poznámka

Vzhledem k tomu, že na závěr uvedeného postupu porovnáváme funkční hodnoty ve všech "podezřelých" bodech, není nutné určovat druh lokálních extrémů uvnitř množiny ani druh vázaných lokálních extrémů na hranici množiny. Stačí tedy najít stacionární body.

Příklad (Absolutní extrémy – 1. část)

Najděte absolutní extrémy funkce $\boxed{z = x^2 - 2x + y^2 - 2y + 3}$ na trojúhelníku s vrcholy $(0,0), (0,1), (1,0)$.

Příklad (Absolutní extrémy – 1. část)

Najděte absolutní extrémy funkce $\boxed{z = x^2 - 2x + y^2 - 2y + 3}$ na trojúhelníku s vrcholy $(0,0), (0,1), (1,0)$.

1. **Stacionární body**:

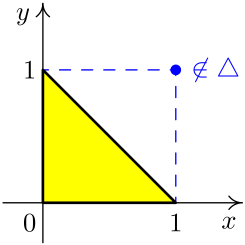
$$\begin{aligned} z'_x &= 2x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \\ z'_y &= 2y - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 1 \end{aligned} \implies \text{stacionární bod: } (1,1) \textbf{ – neleží v } \triangle$$

Příklad (Absolutní extrémy – 1. část)

Najděte absolutní extrémy funkce $\boxed{z = x^2 - 2x + y^2 - 2y + 3}$ na trojúhelníku s vrcholy $(0,0), (0,1), (1,0)$.

1. **Stacionární body**:

$$\begin{aligned} z'_x &= 2x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \\ z'_y &= 2y - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 1 \end{aligned} \implies \text{stacionární bod: } (1,1) \text{ – } \textbf{neleží v } \triangle$$



Příklad (Absolutní extrémy – 2. část)

2. **Hranice**:

   I. $\underline{y = 1 - x,\ x \in [0,1]}$:

$$\begin{aligned} z &= x^2 - 2x + (1-x)^2 - 2(1-x) + 3 \\ &= 2x^2 - 2x + 2 \\ z' &= 4x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \end{aligned} \Longrightarrow \text{bod } \boxed{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in \triangle}$$

Příklad (Absolutní extrémy – 2. část)

2. **Hranice**:

   I. $\underline{y = 1 - x,\ x \in [0,1]}$:

$$\begin{aligned} z &= x^2 - 2x + (1-x)^2 - 2(1-x) + 3 \\ &= 2x^2 - 2x + 2 \\ z' &= 4x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \end{aligned} \Longrightarrow \text{bod } \boxed{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in \triangle}$$

   II. $\underline{y = 0,\ x \in [0,1]}$:

$$\begin{aligned} z &= x^2 - 2x + 3 \\ z' &= 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{aligned} \Longrightarrow \text{bod } \boxed{(1,0) \in \triangle}$$

Příklad (Absolutní extrémy – 2. část)

2. **Hranice**:

I. $\underline{y = 1 - x,\ x \in [0,1]}$:

$$\begin{aligned} z &= x^2 - 2x + (1-x)^2 - 2(1-x) + 3 \\ &= 2x^2 - 2x + 2 \\ z' &= 4x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \end{aligned} \implies \text{bod } \boxed{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in \triangle}$$

II. $\underline{y = 0,\ x \in [0,1]}$:

$$\begin{aligned} z &= x^2 - 2x + 3 \\ z' &= 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{aligned} \implies \text{bod } \boxed{(1,0) \in \triangle}$$

III. $\underline{x = 0,\ y \in [0,1]}$:

$$\begin{aligned} z &= y^2 - 2y + 3 \\ z' &= 2y - 2 = 0 \Rightarrow y = 1 \end{aligned} \implies \text{bod } \boxed{(0,1) \in \triangle}$$

Příklad (Absolutní extrémy – 3. část)

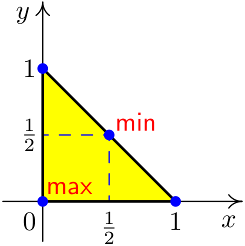
3. **Vrcholy**: $(0,0), (0,1), (1,0)$ – dva z těchto vrcholů jsme získali již v předchozím výpočtu.

Příklad (Absolutní extrémy – 3. část)

3. **Vrcholy**: $(0,0), (0,1), (1,0)$ – dva z těchto vrcholů jsme získali již v předchozím výpočtu.

Ve všech získaných bodech $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), (1,0), (0,1), (0,0)$ vypočteme funkční hodnotu:

$$
\begin{aligned}
z(1/2, 1/2) &= 3/2 \\
z(1,0) &= 2 \\
z(0,1) &= 2 \\
z(0,0) &= 3
\end{aligned}
$$

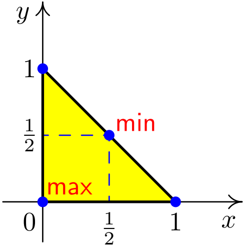


Příklad (Absolutní extrémy – 3. část)

3. **Vrcholy**: $(0,0), (0,1), (1,0)$ – dva z těchto vrcholů jsme získali již v předchozím výpočtu.

Ve všech získaných bodech $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), (1,0), (0,1), (0,0)$ vypočteme funkční hodnotu:

$$\begin{aligned} z(1/2,1/2) &= 3/2 \\ z(1,0) &= 2 \\ z(0,1) &= 2 \\ z(0,0) &= 3 \end{aligned}$$



Absolutního minima nabývá funkce v bodě $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, jeho hodnota je $\frac{3}{2}$.

Absolutního maxima nabývá funkce v bodě $(0,0)$, jeho hodnota je 3.

Grafické nalezení absolutních extrémů pomocí vrstevnic

V případě, že umíme dobře nakreslit vrstevnice funkce f a za předpokladu, že množina M, na níž hledáme absolutní extrémy funkce f, není příliš složitá, můžeme absolutní extrémy najít graficky.

1. V rovině xy zakreslíme množinu M a vrstevnice funkce f.
2. Ze všech vrstevnic, které množinou M procházejí nebo se jí dotýkají, vybereme vrstevnici na nejnižší úrovni a vrstevnici na nejvyšší úrovni.
3. Absolutní minimum (maximum) nastává v bodech průniku vybraných vrstevnic s množinou M.

Příklad (Absolutní extrémy – graficky – 1. část)

Graficky vyřešíme ještě jednou stejný příklad:

Najděte absolutní extrémy funkce $\boxed{z = x^2 - 2x + y^2 - 2y + 3}$ na trojúhelníku s vrcholy $(0,0), (0,1), (1,0)$.

Příklad (Absolutní extrémy – graficky – 1. část)

Graficky vyřešíme ještě jednou stejný příklad:
Najděte absolutní extrémy funkce $\boxed{z = x^2 - 2x + y^2 - 2y + 3}$ na trojúhelníku s vrcholy $(0,0), (0,1), (1,0)$.

Funkci lze přepsat do tvaru:

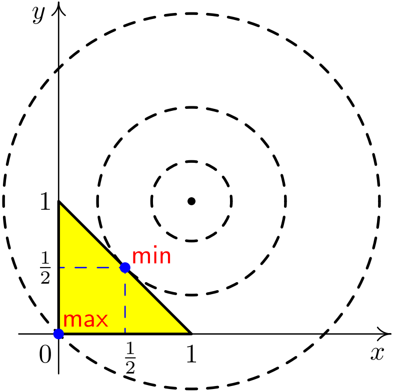
$$z = x^2 - 2x + y^2 - 2y + 3 = (x-1)^2 + (y-1)^2 + 1$$

Jedná se o posunutý paraboloid, vrstevnice jsou kružnice se středem v bodě $(1,1)$, jejichž rovnice jsou:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = c - 1, \; c \geq 1.$$

Je vidět, že hodnota funkce na vrstevnicích roste s rostoucím poloměrem vrstevnic.

Příklad (Absolutní extrémy – graficky – 2. část)



Z obrázku je vidět, že minimum se nachází v bodě, kde se nejmenší kružnice (=vrstevnice s nejmenší hodnotou) dotkne množiny – bod $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Maximum se naopak nachází v bodě, kde se největší kružnice (=vrstevnice s největší hodnotou) dotkne množiny – bod $(0, 0)$.

Příklad (slovní úloha – 1. část)

Na pile je možné pořezat za jednu směnu maximálně $100\,\mathrm{m}^3$ jehličnaté kulatiny a $70\,\mathrm{m}^3$ listnaté kulatiny. Určete, kolik jehličnaté a listnaté kulatiny se má na pile pořezat za jeden týden (10 směn), aby měla pila co největší zisk. Přitom:

- **Jehličnatá kulatina** stojí 1700 Kč/m^3, má výřeznost 60%, realizační cena je 3500 Kč/m^3. Zbývajících 40% tvoří

odřezky 20%	...	realizační cena: 400 Kč/m^3
štěpy 15%	...	realizační cena: 200 Kč/m^3
piliny 5%	...	realizační cena: 0 Kč/m^3 (zdarma)

- **Listnatá kulatina** stojí 1900 Kč/m^3, má výřeznost 55%, realizační cena je 4000 Kč/m^3. Zbývajících 45% tvoří

odřezky 10%	...	realizační cena: 500 Kč/m^3
palivo 30%	...	realizační cena: 400 Kč/m^3
piliny 5%	...	realizační cena: 0 Kč/m^3 (zdarma)

- ▷ Pila má smlouvu na dodávku nejméně $30\,\mathrm{m}^3$ paliva týdně.
- ▷ Provozní náklady na pořezání $1\,\mathrm{m}^3$ dřeva činí 300 Kč.
- ▷ Plocha skladu omezuje týdenní objem dřeva na nejvýše $1200\,\mathrm{m}^3$.

Příklad (slovní úloha – 2. část)

Označme

x ... množství jehličnaté kulatiny (v m^3)

y ... množství listnaté kulatiny (v m^3)

Zisk z 1 m^3 pořezané kulatiny (v Kč):

jehličnatá : $0,6 \cdot 3500 + 0,2 \cdot 400 + 0,15 \cdot 200 - 1700 - 300 = 210$

listnatá : $0,55 \cdot 4000 + 0,1 \cdot 500 + 0,3 \cdot 400 - 1900 - 300 = 170$

Zisk lze tedy vyjádřit funkcí dvou proměnných:

$$\boxed{z = 210x + 170y}$$

Budeme hledat **absolutní maximum této funkce na množině, která je určena následujícími omezeními**:

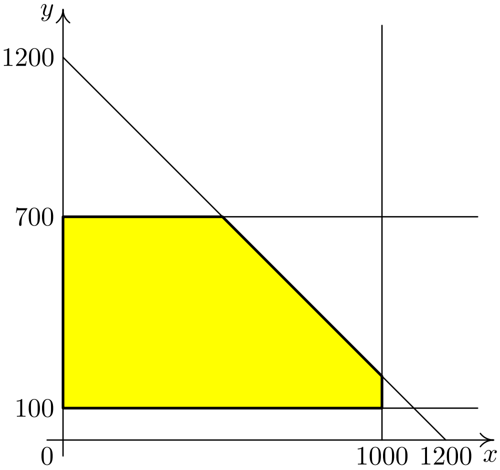
1. $x \geq 0$, $y \geq 0$ (přirozený požadavek)
2. $x \leq 1000$, $y \leq 700$ (maximální množství, které lze pořezat)
3. $0,3y \geq 30$, tj. $y \geq 100$ (smlouva na dodávku paliva)
4. $x + y \leq 1200$ (omezení skladu)

Příklad (slovní úloha – 3. část)

V rovině si zakreslíme množinu

$$
\begin{aligned}
x &\geq 0 \\
x &\leq 1000 \\
y &\leq 700 \\
y &\geq 100 \\
x+y &\leq 1200,
\end{aligned}
$$

na níž hledáme maximum.



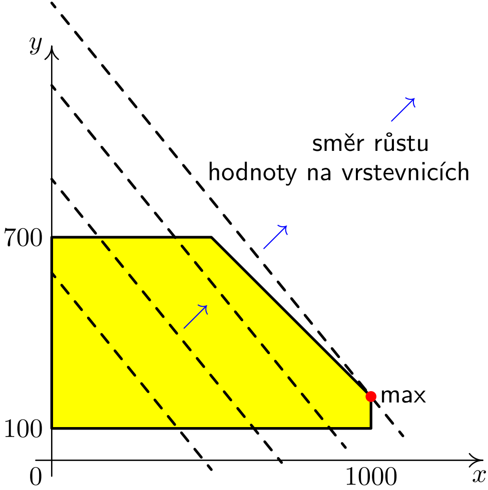
Úlohu můžeme vyřešit graficky pomocí vrstevnic ziskové funkce $z = 210x + 170y$. Grafem funkce je rovina a její vrstevnice jsou přímky o rovnicích

$$210x + 170y = c, \ c \in \mathbb{R}.$$

Příklad (slovní úloha – 4. část)

Do obrázku nakreslíme několik vrstevnic, např.:

$$\begin{aligned} 210x + 170y &= 100000 \\ 210x + 170y &= 150000 \\ 210x + 170y &= 200000 \end{aligned}$$



Ze sklonu vrstevnic a ze směru růstu funkční hodnoty na vrstevnicích je vidět, že funkce nabývá na množině svého maxima v bodě průsečíku hraničních přímek

$x = 1000$ a $x + y = 1200$,

tj. v bodě $(1000, 200)$.

Maximum má hodnotu

$z = 210 \cdot 1000 + 170 \cdot 200 = 244000.$

Závěr: Pila bude mít největší týdenní zisk 244000 Kč, pokud za týden zpracuje 1000 m^3 jehličnaté kulatiny a 200 m^3 listnaté kulatiny.

Využití systémů počítačové algebry

- Využití systémů Sage, Maxima, Wolfram Alpha:

  `http://user.mendelu.cz/marik/akademie/`

- Matematické výpočty online (MAW) - lokální extrémy:

  `http://um.mendelu.cz/maw-html/index.php?lang=cs&form=minmax3d`

Příklad

Určete stacionární body a lokální extrémy funkce

$$z = x^4 - 2x^2 + y^3 - 3y^2.$$

Řešení pomocí Wolfram Alpha (`http://www.wolframalpha.com/`):

- Všechny stacionární body včetně jejich typu:

  `stationary points of x^4-2*x^2+y^3-3*y^2`

- Pouze lokální extrémy:

  `local extrema of x^4-2*x^2+y^3-3*y^2`