Diferenciální rovnice – základní pojmy. Rovnice se separovanými proměnnými.

Vyšší matematika

LDF MENDELU

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Podpořeno projektem Průřezová inovace studijních programů Lesnické a dřevařské fakulty MENDELU v Brně (LDF) s ohledem na disciplíny společného základu http://akademie.ldf.mendelu.cz/cz (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0021) za přispění finančních prostředků EU a státního rozpočtu České republiky.

Diferenciální rovnice - úvod

Diferenciální rovnice je vztah mezi neznámou funkcí a jejími derivacemi. Řádem diferenciální rovnice rozumíme řád nejvyšší derivace neznámé funkce v dané rovnici.

Příklady diferenciálních rovnic:

- $xy' - y^3 = 0$ je diferenciální rovnice prvního řádu
- $yy'' - 3xy' = \sqrt{xy}$ je diferenciální rovnice druhého řádu
- $y''' - 4y' + 5y = x$ je diferenciální rovnice třetího řádu

Diferenciální rovnice prvního řádu – základní pojmy

Definice (DR prvního řádu)

Diferenciální rovnice prvního řádu rozřešená vzhledem k derivaci je rovnice tvaru

$$y' = \varphi(x, y), \tag{DR}$$

kde φ je funkce dvou proměnných.
Řešením rovnice (DR) na intervalu I rozumíme každou funkci $y = y(x)$, která rovnici na I splňuje.

- Zpravidla lze téměř všechna řešení rovnice (DR) vyjádřit pomocí jediného vzorce, který obsahuje nějakou konstantu c, tj. $y = y(x, c)$, případně $\phi(y, x, c) = 0$. Všechna tato řešení nazýváme obecné řešení. Obecné řešení může, ale nemusí obsahovat úplně všechna řešení.
- Partikulárním řešením rozumíme jednu konkrétní funkci, která rovnici splňuje. Volbou konkrétní konstanty v obecném řešení obdržíme jedno partikulární řešení.
- Graf libovolného partikulárního řešení se nazývá integrální křivka.

Geometrický význam

Diferenciální rovnici

$$y' = \varphi(x, y)$$

můžeme chápat jako předpis, který každému bodu $(x, y) \in D(\varphi)$ přiřadí směrnici tečny k integrální křivce, která tímto bodem prochází.

Pokud pro dostatečný počet bodů (x, y) nakreslíme krátké úsečky (tzv. lineární elementy) procházející těmito body a mající směrnici $\varphi(x, y)$ (jsou to tečny k integrálním křivkám), dostáváme tzv. směrové pole. Někdy je možné tímto způsobem odhadnout tvar integrálních křivek.

Příklad

Pomocí směrového pole odhadněte tvar integrálních křivek rovnice $y' = -\frac{x}{y}$.

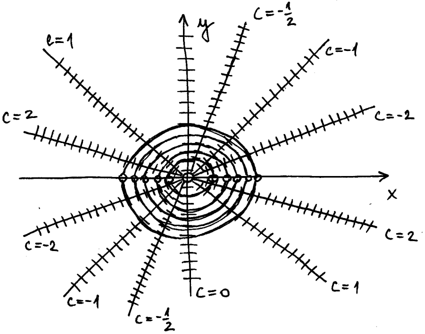
Příklad

Pomocí směrového pole odhadněte tvar integrálních křivek rovnice $y' = -\frac{x}{y}$.

$$-\frac{x}{y} = c, \quad c \in \mathbb{R}, \quad y \neq 0 \implies y = -\frac{x}{c}$$

Konstanta c vyjadřuje směrnici tečny k integrální křivce (kreslíme jako krátkou úsečku – lineární element).

$$c = 0: \quad x = 0$$
$$c = 1: \quad y = -x$$
$$c = 2: \quad y = -\frac{1}{2}x$$
$$c = -1: \quad y = x$$
$$c = -2: \quad y = \frac{1}{2}x$$
$$c = -\frac{1}{2}: \quad y = 2x$$



Intergální křivky jsou půlkružnice se středem v počátku.

Počáteční úloha

Definice (Počáteční úloha)

Nechť $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Úloha najít řešení rovnice (DR), které splňuje tzv. počáteční podmínku

$$y(x_0) = y_0,$$

se nazývá počáteční úloha. Jejím řešením je funkce, která splňuje počáteční podmínku a je na nějakém otevřeném intervalu obsahujícím bod x_0 řešením rovnice (DR).

- Řešení počáteční úlohy je partikulární řešení, jehož integrální křivka prochází bodem (x_0, y_0).
- Má-li počáteční úloha jediné řešení, znamená to, že bodem (x_0, y_0) prochází jediná integrální křivka.
- Má-li každá počáteční úloha jediné řešení, znamená to, že integrální křivky se nikde neprotínají.

Diferenciální rovnice $y' = f(x)$

Rovnice

$$y' = f(x)$$

je nejjednodušším příkladem diferenciální rovnice. Tuto rovnici splňuje každá primitivní funkce k funkci f. Obecné řešení lze tedy vyjádřit vzorcem

$$y(x, c) = \int f(x)\,\mathrm{d}x + c.$$

Příklad

Řešte diferenciální rovnici $y' = 2x$. Najděte všechna řešení a řešení počáteční úlohy a podmínkou $y(1) = 3$. Nakreslete integrální křivky.

Příklad

Řešte diferenciální rovnici $y' = 2x$. Najděte všechna řešení a řešení počáteční úlohy a podmínkou $y(1) = 3$. Nakreslete integrální křivky.

- Všechna řešení = obecné řešení:

$$\boxed{y = x^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}}$$

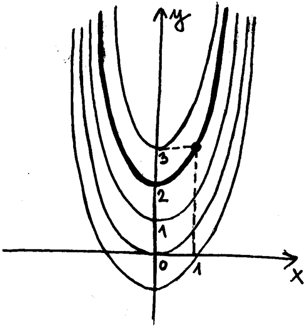
- Řešení počáteční úlohy:

  podmínku $y(1) = 3$ dosadíme do obecného řešení a najdeme hodnotu konstanty, pro kterou je podmínka splněna:

$$3 = 1^2 + c \implies c = 2$$

$$\boxed{y_p = x^2 + 2}$$

- Integrální křivky:



Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

Definice (DR se separovanými proměnnými)

Nechť f a g jsou funkce spojité na nějakých otevřených intervalech. Diferenciální rovnice

$$(S) \qquad y' = f(x)g(y)$$

se nazývá diferenciální rovnice se separovanými proměnnými.

Použijeme-li označení derivace $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, můžeme rovnici (S) ekvivalentně vyjádřit ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y).$$

Postup řešení rovnice $y' = f(x)g(y)$

- Najdeme řešení rovnice $g(y) = 0$. Tato řešení jsou konstantními řešeními rovnice (S).

Postup řešení rovnice $y' = f(x)g(y)$

- Najdeme řešení rovnice $g(y) = 0$. Tato řešení jsou konstantními řešeními rovnice (S).
- Dále předpokládáme, že $g(y) \neq 0$. Derivaci y' nahradíme podílem $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y)$$

a upravíme tak, aby na každé straně byla pouze jedna proměnná:

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Postup řešení rovnice $y' = f(x)g(y)$

- Najdeme řešení rovnice $g(y) = 0$. Tato řešení jsou konstantními řešeními rovnice (S).
- Dále předpokládáme, že $g(y) \neq 0$. Derivaci y' nahradíme podílem $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y)$$

  a upravíme tak, aby na každé straně byla pouze jedna proměnná:

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Získanou rovnost zintegrujeme

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Postup řešení rovnice $y' = f(x)g(y)$

- Po zintegrování dostaneme rovnost

$$G(y) = F(x) + c,$$

kde G je primitivní funkce k funkci $\frac{1}{g}$ a F je primitivní funkce k funkci f.

Postup řešení rovnice $y' = f(x)g(y)$

- Po zintegrování dostaneme rovnost

$$G(y) = F(x) + c,$$

  kde G je primitivní funkce k funkci $\frac{1}{g}$ a F je primitivní funkce k funkci f.
- Rovnicí $G(y) = F(x) + c$ je určeno obecné řešení (implicitní tvar). Pokud je to možné, vyjádříme z této rovnice y (tím dostaneme explicitní tvar obecného řešení).

Postup řešení rovnice $y' = f(x)g(y)$

- Po zintegrování dostaneme rovnost
$$G(y) = F(x) + c,$$
kde G je primitivní funkce k funkci $\frac{1}{g}$ a F je primitivní funkce k funkci f.
- Rovnicí $G(y) = F(x) + c$ je určeno obecné řešení (implicitní tvar). Pokud je to možné, vyjádříme z této rovnice y (tím dostaneme explicitní tvar obecného řešení).
- Je-li možné získat některé z konstantních řešení z obecného řešení vhodnou volbou konstanty c, pak toto řešení zahrneme do obecného.

Postup řešení rovnice $y' = f(x)g(y)$

- Po zintegrování dostaneme rovnost
$$G(y) = F(x) + c,$$
kde G je primitivní funkce k funkci $\frac{1}{g}$ a F je primitivní funkce k funkci f.
- Rovnicí $G(y) = F(x) + c$ je určeno obecné řešení (implicitní tvar). Pokud je to možné, vyjádříme z této rovnice y (tím dostaneme explicitní tvar obecného řešení).
- Je-li možné získat některé z konstantních řešení z obecného řešení vhodnou volbou konstanty c, pak toto řešení zahrneme do obecného.
- Je-li zadána počáteční podmínka, pak ji dosadíme do obecného řešení, odkud určíme konkrétní hodnotu konstanty c. Tuto hodnotu pak dosadíme zpět do obecného řešení a získáme tak partikulární řešení – řešení počáteční úlohy. Také zjistíme, zda počáteční podmínku případně nesplňuje některé konstantní řešení, které v obecném řešení není zahrnuto.

Příklad

Řešte počáteční úlohu $y' = -\frac{x}{y},\ y(0) = -1.$

Příklad

Řešte počáteční úlohu $y' = -\frac{x}{y},\ y(0) = -1$.

$f(x) = -x$, $g(y) = \frac{1}{y}$, $y \neq 0$

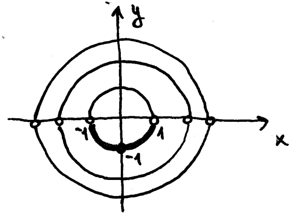
- Nemá konstantní řešení, neboť $\frac{1}{y} \neq 0$.
- Nekonstantní řešení:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}$$

$$y\,\mathrm{d}y = -x\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c$$

- Integrální křivky: půlkružnice



$x^2 + y^2 = C, \quad C > 0 \quad (C = 2c)$ …implicitní tvar obecného řešení

$y = \pm\sqrt{C - x^2}$ …explicitní tvar obecného řešení

- Dosazení počáteční podmínky:

$$0^2 + (-1)^2 = C \implies C = 1 \implies \boxed{y_p = -\sqrt{1 - x^2}}$$

Příklad

Najděte všechna řešení rovnici $y' = \frac{2y}{x}$.

Příklad

Najděte všechna řešení rovnici $y' = \frac{2y}{x}$.

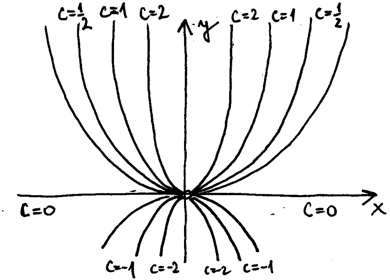
$f(x) = \frac{2}{x}$, $g(y) = y$, $x \neq 0$

- Konstantní řešení: $y = 0$
- Nekonstantní řešení:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{2y}{x} \\
\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x \\
\ln|y| &= \ln x^2 + c \\
|y| &= e^{\ln x^2 + c} \\
|y| &= x^2 e^c \\
y &= Cx^2 \quad (C = \pm e^c \neq 0)
\end{aligned}$$

- Integrální křivky:

  dvě polopřímky a poloviny parabol vycházející z počátku



Konstatní řešení lze pro $C = 0$ zahrnout do obecného vzorce.

$\Longrightarrow$ obecné řešení: $\boxed{y = Cx^2,\ C \in \mathbb{R}}$.

Příklad

Najděte všechna řešení rovnice $y' = 2\sqrt{y-1}$.

Příklad

Najděte všechna řešení rovnice $y' = 2\sqrt{y-1}$.

$f(x) = 1$, $g(y) = 2\sqrt{y-1}$, $y \geq 1$

- Konstantní řešení: $y = 1$
- Nekonstantní řešení:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2\sqrt{y-1}$$

$$\frac{1}{2}(y-1)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$$

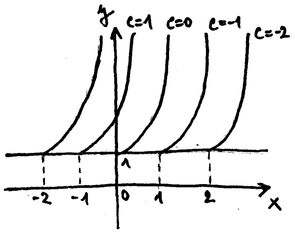
$$\sqrt{y-1} = x + c$$

$$y - 1 = (x+c)^2,\ x > -c$$

$$y = (x+c)^2 + 1,\ x > -c$$

- Integrální křivky:

  přímka a pravé poloviny parabol



Konstatní řešení nelze zahrnout do obecného vzorce.

$\Longrightarrow$ obecné řešení: $\boxed{y = (x+c)^2,\ x > -c,\ c \in \mathbb{R}}$, další řešení: $\boxed{y = 1}$.

Poznámka

- Diferenciální rovnice typu $y' = f(x)$ a $y' = g(y)$ jsou speciální případy rovnic se separovanými proměnnými pro $g(y) = 1$, resp. $f(x) = 1$.

- Počáteční úloha pro rovnici se separovanými proměnnými nemusí mít vždy jediné řešení.

  Řešení, které má jednoznačnost porušenou v každém bodě (tj. každým bodem jeho integrální křivky prochází jiná integrální křivka), se nazývá singulární řešení.

  Singulárními řešeními rovnice se separovanými proměnnými $y' = f(x)g(y)$ mohou být pouze konstantní řešení, tj. řešení, která splňují rovnici $g(y) = 0$.

  Například počáteční úloha $y' = 2\sqrt{y-1}$, $y(0) = 1$ má dvě řešení:

$$y_1 = 1,$$

$$y_2 = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \leq 0 \\ x^2 & \text{pro } x > 0, \end{cases}$$

  viz předchozí příklad. Funkce $y_1 = 1$ je singulární řešení rovnice.

Homogenní diferenciální rovnice

Definice (Homogenní DR)

Nechť f je spojitá funkce. Diferenciální rovnice

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1}$$

se nazývá homogenní diferenciální rovnice.

Postup řešení rovnice $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

- Zavedeme novou funkci u substitucí $u = \frac{y}{x}$.
  Platí
  $$y = ux \quad \text{a tedy} \quad y' = u'x + u.$$

Postup řešení rovnice $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

- Zavedeme novou funkci u substitucí $u = \frac{y}{x}$.
  Platí
  $$y = ux \quad \text{a tedy} \quad y' = u'x + u.$$
- Po dosazení do rovnice dostaneme
  $$\begin{aligned} u'x + u &= f(u) \\ u' &= \frac{f(u) - u}{x}, \end{aligned}$$
  což je rovnice se separovanými proměnnými. Tuto rovnici vyřešíme, tj. najdeme neznámou funkci u.

Postup řešení rovnice $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

- Zavedeme novou funkci u substitucí $u = \frac{y}{x}$.
  Platí
  $$y = ux \quad \text{a tedy} \quad y' = u'x + u.$$
- Po dosazení do rovnice dostaneme
  $$\begin{aligned} u'x + u &= f(u) \\ u' &= \frac{f(u) - u}{x}, \end{aligned}$$
  což je rovnice se separovanými proměnnými. Tuto rovnici vyřešíme, tj. najdeme neznámou funkci u.
- K nalezení řešení y původní homogenní rovnice použijeme opět substituci $u = \frac{y}{x}$ (dosadíme do vztahu pro u a pokud je to možné, tak vyjádříme y).

Příklad

Najděte všechna řešení rovnice $xy' = y \ln \frac{y}{x}$.

Příklad

Najděte všechna řešení rovnice $xy' = y \ln \frac{y}{x}$.

$$y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}, \quad u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xu \Rightarrow y' = u + xu'$$

$$u + xu' = u \ln u$$

$$u' = \frac{u \ln u - u}{x} \quad \text{. . . rovnice se separovanými proměnnými}$$

- Konstantní řešení: $u(\ln u - 1) = 0 \Rightarrow \ln u = 1 \Rightarrow u = e$.
- Nekonstantní řešení:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{u(\ln u - 1)}{x}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{u(\ln u - 1)} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\ln |\ln u - 1| = \ln |x| + c$$

$$|\ln u - 1| = |x| e^c$$

$$\ln u - 1 = Cx \quad (C = \pm e^c \neq 0)$$

$$u = e^{Cx+1}, C \in \mathbb{R} \text{ (pro } C = 0 \text{ konst. řeš.)} \Rightarrow \boxed{y = xe^{Cx+1}, C \in \mathbb{R}}$$

Využití systémů počítačové algebry

- Využití systémů Sage, Maxima, Wolfram Alpha:

  `http://user.mendelu.cz/marik/akademie/`

- Matematické výpočty online (MAW) - diferenciální rovnice:

  `http://um.mendelu.cz/maw-html/index.php?lang=cs&form=ode`

Příklad

Najděte všechna řešení diferenciální rovnice $y' = -\frac{x}{y}$ a řešení splňující počáteční podmínku $y(0) = -1$.

Řešení pomocí Wolfram Alpha (`http://www.wolframalpha.com/`):

- Všechna řešení:

  ```
  solve y'=-x/y
  ```

- Řešení počáteční úlohy:

  ```
  solve y'=-x/y, y(0)=-1
  ```