INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Vyšší matematika

LDF MENDELU

Podpořeno projektem Průřezová inovace studijních programů Lesnické a dřevařské fakulty MENDELU v Brně (LDF) s ohledem na disciplíny společného základu `http://akademie.ldf.mendelu.cz/cz` (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0021) za přispění finančních prostředků EU a státního rozpočtu České republiky.

Simona Fišnarová

Brno 2014

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu (LDR)

Definice (LDR prvního řádu)

Nechť a a b jsou funkce spojité na otevřeném intervalu I. Diferenciální rovnice

(L) $$y' + a(x)y = b(x)$$

se nazývá **lineární diferenciální rovnice prvního řádu**.

- Je-li $b(x) \equiv 0$, pak se rovnice (L) nazývá **homogenní**, v opačném případě se nazývá **nehomogenní**.
- Je-li (L) nehomogenní rovnice, pak se rovnice

  $$y' + a(x)y = 0,$$

  která vznikne z rovnice (L) nahrazením pravé strany $b(x)$ nulovou funkcí, nazývá **homogenní rovnice příslušná nehomogenní rovnici (L)**.

Některé vlastnosti LDR

Věta (Jednoznačnost řešení počáteční úlohy)

Nechť a, b jsou spojité na otevřeném intervalu I, $x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}$. Pak každá počáteční úloha

$$y' + a(x)y = b(x), \quad y(x_0) = y_0$$

má jediné řešení definované na celém I.

Poznámka (Vlastnosti homogenní rovnice)

1. Homogenní rovnice $y' + a(x)y = 0$ má vždy tzv. **triviální řešení** $y = 0$. (Lze ověřit dosazením do rovnice.)

2. Linearita = aditivita + homogenita

   - Aditivita: Jsou-li y_1 a y_2 dvě řešení homogenní rovnice, pak jejich součet $y_1 + y_2$ je také řešením této homogenní rovnice.

   - Homogenita: Je-li y řešení homogenní rovnice, pak také konstatní násobek cy, kde $c \in \mathbb{R}$, je řešením této rovnice.

   Obecně: Jsou-li y_1 a y_2 dvě řešení homogenní rovnice, pak jejich lineární kombinace $c_1y_1 + c_2y_2$, kde $c_1 \in \mathbb{R}, c_2 \in \mathbb{R}$ je také řešením této homogenní rovnice.

Obecné řešení nehomogenní LDR

Věta (Obecné řešení nehomogenní LDR)

Obecné řešení nehomogenní lineární rovnice (L) lze vyjádřit ve tvaru

$$\boxed{y(x,c) = y_h(x,c) + y_p(x)},$$

kde $y_h(x,c)$ je obecné řešení příslušné homogenní rovnice a $y_p(x)$ je libovolné partikulární řešení rovnice (L).

Poznámka

K nalezení obecného řešení lineární rovnice (L) je tedy potřeba nalézt

(a) obecné řešení příslušné homogenní rovnice

(b) jedno libovolné partikulární řešení rovnice (L)

a obě sečíst.

(a) Obecné řešení homogenní LDR

Homogenní lineární diferenciální rovnice

$$y' + a(x)y = 0$$

je rovnice se separovanými proměnnými, neboť ji lze psát ve tvaru

$$y' = -a(x)y.$$

Řešením této rovnice dostaneme obecné řešení

$$\boxed{y(x,c) = ce^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}, \quad c \in \mathbb{R}.}$$

Tvar tohoto řešení si můžeme snadno zapamatovat, neboť z rovnice vidíme, že řešením homogenní rovnice je složená exponenciální funkce, taková, že derivace exponentu (vnitřní složky) je funkce $-a(x)$.

Příklad (Homogenní rovnice 1)

Najděte obecné řešení následujích rovnic:

1. $y' = y$

   Funkce, která je rovna své derivaci, je funkce e^x. Totéž platí pro každý její konstantní násobek. Obecné řešení je tedy

   $$y = ce^x, c \in \mathbb{R}.$$

2. $y' + y = 0$

   Pokud rovnici přepíšeme do tvaru $y' = -y$, vidíme, že rovnici splňuje funkce, jejíž derivace je rovna hledané funkci vynásobené číslem -1. Tuto vlastnost má funkce e^{-x} a také každý její konstantní násobek. Obecné řešení je tedy

   $$y = ce^{-x}, c \in \mathbb{R}.$$

Příklad (Homogenní rovnice 2)

Najděte obecné řešení rovnice

$$y' - 2xy = 0.$$

Pokud rovnici přepíšeme do tvaru $y' = 2xy$, vidíme, že hledáme funkci, jejíž derivace je rovna hledané funkci vynásobené funkcí $2x$. Řešením je složená exponenciální funkce, kde exponent je funkce, jejíž derivace je funkce $2x$. Je to tedy funkce e^{x^2} a také každý její konstantní násobek. Obecné řešení je tedy

$$y = ce^{x^2}, c \in \mathbb{R}.$$

(b) Nalezení partikulárního řešení nehomogenní LDR – metoda variace konstanty

Je-li $y_h(x, c) = ce^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}$ obecné řešení příslušné homogenní rovnice, pak partikulární řešení nehomogenní rovnice

$$\text{(L)} \qquad y' + a(x)y = b(x)$$

hledáme ve tvaru

$$\boxed{y_p(x) = K(x)e^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}}.$$

(Konstantu c ve vzorci pro řešení homogenní rovnice nahradíme funkcí $K(x)$ – odtud název metoda variace konstanty.)

Neznámou funkci $K(x)$ najdeme následovně:

- Má-li být funkce $y_p(x)$ řešením rovnice (L), musí rovnici (L) splňovat. Najdeme tedy derivaci $y_p'(x)$ a společně s $y_p(x)$ dosadíme do rovnice (L).
- Členy obsahující $K(x)$ se po dosazení v rovnici vyruší, obdržíme tedy rovnici s neznámou funkcí $K'(x)$. Tuto funkci z rovnice vyjádříme, zintegrujeme a dostaneme tak hledanou funkci $K(x)$.

Vzorec pro obecné řešení nehomogenní LDR

Aplikací výše popsané metody na obecnou rovnici dostáváme vzorec pro obecné řešení nehomogenní LDR:

$$\boxed{y(x,c) = e^{-\int a(x)\,\mathrm{d}x}\left(\int b(x)e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + c\right)}.$$

Tento vzorec lze též odvodit následujícím způsobem (který zároveň dává návod pro alternativní metodu řešení nehomogenní LDR):
Rovnici (L) vynásobíme tzv. integračním faktorem $e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}$:

$$y' e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x} + a(x) e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x} y = b(x) e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Levou stranu vyjádříme jako derivaci součinu

$$\left(y e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}\right)' = b(x) e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Integrací obdržíme

$$y e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x} = \int b(x) e^{\int a(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + c,$$

odkud vyjádříme y a dostaneme tak výše uvedený vzorec.

Příklad (Variace konstanty)

Matodou variace konstanty najděte obecné řešení rovnice $y' - \frac{2}{x}y = 2x^3$.

- Obecné řešení homogenní rovnice $y' - \frac{2}{x}y = 0$:
  $\int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x = 2\ln|x| \Rightarrow y_h = ce^{2\ln|x|} = ce^{\ln x^2} = cx^2 \Rightarrow \boxed{y_h = cx^2,\ c \in \mathbb{R}}$
- Partikulární řešení nehomogenní rovnice – variace konstanty:

  Řešení hledáme ve tvaru $y_p = K(x)x^2$. Potřebujeme najít funkci $K(x)$.
  Zderivujeme: $y_p = K'(x)x^2 + K(x)\cdot 2x$
  Dosadíme do rovnice:

  $$K'(x)x^2 + K(x)\cdot 2x - \frac{2}{x}K(x)x^2 = 2x^3$$

  Členy obsahující $K(x)$ se odečtou:

  $$K'(x)x^2 = 2x^3 \Rightarrow K'(x) = 2x \Rightarrow K(x) = x^2$$

  $\Rightarrow \boxed{y_p = x^4}$.

Obecné řešení nehomogenní rovnice je součet $y_h + y_p$, tedy $\boxed{y = cx^2 + x^4,\ c \in \mathbb{R}}$

Příklad (Integrační faktor)

Pomocí integračního faktoru najděte obecné řešení rovnice $y' - \frac{2}{x}y = 2x^3$.

Integrační faktor je

$$e^{-\int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x} = e^{-2\ln|x|} = e^{\ln\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x^2}.$$

Rovnici vynásobíme inegračním faktorem a upravíme:

$$y'\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}y\frac{1}{x^2} = 2x^3\frac{1}{x^2}$$
$$y'\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}y = 2x$$

Levou stranu napíšeme jako derivaci součinu:

$$\left(y\frac{1}{x^2}\right)' = 2x$$

Zintegrujeme a vyjádříme y:

$$y\frac{1}{x^2} = x^2 + c \Rightarrow \boxed{y = x^2(x^2+c),\ c \in \mathbb{R}}$$