



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

---

# Lineární diferenciální rovnice druhého řádu

Vyšší matematika

LDF MENDELU

Podpořeno projektem Průřezová inovace studijních programů Lesnické a dřevařské fakulty MENDELU v Brně (LDF) s ohledem na disciplíny společného základu <http://akademie.ldf.mendelu.cz/cz> (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0021) za přispění finančních prostředků EU a státního rozpočtu České republiky.

---

# Lineární diferenciální rovnice druhého řádu

## Definice (LDR druhého řádu)

Nechť  $p$ ,  $q$  a  $f$  jsou funkce definované a spojité na otevřeném intervalu  $I$ .  
Diferenciální rovnice

$$(L2) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

se nazývá **lineární diferenciální rovnice druhého řádu**.

- Je-li  $f(x) = 0$  pro všechna  $x \in I$ , pak se rovnice (L2) nazývá **homogenní**, v opačném případě se nazývá **nehomogenní**.
- Je-li (L2) nehomogenní rovnice, pak se rovnice

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

která vznikne z rovnice (L2) nahrazením pravé strany  $f(x)$  nulovou funkcí, nazývá **homogenní rovnice příslušná nehomogenní rovnici (L2)**.

## Definice (Řešení LDR druhého řádu)

**Řešením** rovnice (L2) na intervalu  $I$  rozumíme funkci  $y = y(x)$ , která rovnici (L2) na  $I$  splňuje.

- Všechna řešení rovnice (L2) lze vyjádřit ve tvaru obsahujícím dvě nezávislé konstanty  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . Takový předpis se nazývá **obecné řešení**.
- **Partikulárním řešením** rozumíme jednu konkrétní funkci, která na  $I$  rovnici splňuje.
- Nechť  $x_0 \in I, y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ . Úloha nalézt řešení rovnice, které splňuje v bodě  $x_0$  tzv. **počáteční podmínky**

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1,$$

se nazývá **počáteční úloha**. Řešením počáteční úlohy je partikulární řešení.

# Některé vlastnosti LDR druhého řádu

## Věta (Jednoznačnost řešení počáteční úlohy)

Nechť  $p, q, f$  jsou spojité na otevřeném intervalu  $I$ ,  $x_0 \in I, y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ . Pak každá počáteční úloha

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1$$

má jediné řešení definované na celém  $I$ .

## Poznámka (Vlastnosti homogenní rovnice)

- ① Homogenní LDR druhého řádu má vždy tzv. **triviální řešení**  $y = 0$ . (Lze ověřit dosazením do rovnice.)
- ② Linearita = aditivita + homogenita
  - Aditivita: Jsou-li  $y_1$  a  $y_2$  dvě řešení homogenní rovnice, pak jejich součet  $y_1 + y_2$  je také řešením této homogenní rovnice.
  - Homogenita: Je-li  $y$  řešení homogenní rovnice, pak také konstatní násobek  $cy$ , kde  $c \in \mathbb{R}$ , je řešením této rovnice.

Obecně: Jsou-li  $y_1$  a  $y_2$  dvě řešení homogenní rovnice, pak jejich lineární kombinace  $c_1y_1 + c_2y_2$ , kde  $c_1 \in \mathbb{R}, c_2 \in \mathbb{R}$ , je také řešením této homogenní rovnice.

# Homogenní LDR druhého řádu

## Definice (Lineárně nezávislé funkce)

Nechť  $y_1, y_2$  jsou funkce definované na intervalu  $I$ . Jestliže existuje číslo  $k \in \mathbb{R}$  takové, že

$$y_1(x) = ky_2(x) \quad \text{pro všechna } x \in I,$$

říkáme, že funkce  $y_1, y_2$  jsou **lineárně závislé**. V opačném případě říkáme, že funkce  $y_1, y_2$  jsou **lineárně nezávislé**.

# Homogenní LDR druhého řádu

## Věta (Obecné řešení homogenní LDR druhého řádu)

Nechť  $y_1, y_2$  jsou dvě lineárně nezávislá řešení rovnice

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

na intervalu  $I$ . Pak

$$y(x, c_1, c_2) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \quad c_1 \in \mathbb{R}, c_2 \in \mathbb{R}$$

je obecné řešení této rovnice na  $I$ .

## Poznámka

Dvojice lineárně nezávislých řešení  $y_1, y_2$  homogenní LDR druhého řádu tvoří tzv. **fundamentální systém řešení** této rovnice.

# Nehomogenní LDR druhého řádu

## Věta (Obecné řešení nehomogenní LDR druhého řádu)

Nechť  $y_p$  je libovolné partikulární řešení rovnice (L2) na  $I$  a necht'  $y_h$  je obecné řešení příslušné homogenní rovnice na  $I$ . Pak obecné řešení nehomogenní lineární rovnice (L2) na  $I$  lze vyjádřit ve tvaru

$$y(x, c_1, c_2) = y_h(x, c_1, c_2) + y_p(x),$$

tj.

$$y(x, c_1, c_2) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x),$$

kde  $y_1, y_2$  jsou dvě lineárně nezávislá řešení příslušné homogenní rovnice na  $I$ ,  $c_1 \in \mathbb{R}$ ,  $c_2 \in \mathbb{R}$ .

## Nehomogenní LDR druhého řádu

K nalezení obecného řešení nehomogenní LDR druhého řádu stačí najít

- (a) dvě lineárně nezávislá řešení příslušné homogenní rovnice
- (b) libovolné partikulární řešení nehomogenní rovnice

Nalezením řešení LDR druhého řádu se budeme zabývat pouze v jednom speciálním případě – v případě, kdy funkce  $p, q$  v rovnici (L2) budou konstantní. Dále budeme tedy uvažovat **lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty**, tj. rovnici

$$(L2c) \quad y'' + py' + qy = f(x), \quad p, q \in \mathbb{R}.$$

## (a) Homogenní LDR 2. řádu s konstantními koeficienty

Uvažujme homogenní LDR 2. řádu s konstantními koeficienty

$$(LH2c) \quad y'' + py' + qy = 0, \quad p, q \in \mathbb{R}$$

a přiřaďme jí kvadratickou rovnici

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

Tato kvadratická rovnice se nazývá **charakteristická rovnice** pro rovnici (LH2c).

### Poznámka

Funkce  $e^{\lambda x}$  je řešením rovnice (LH2c) právě tehdy, když  $\lambda$  je řešením charakteristické rovnice  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ .

### Věta (Obecné řešení homogenní LDR 2. řádu s konstantními koeficienty)

*Nechť  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$  je charakteristická rovnice pro rovnici (LH2c).*

- *Jsou-li  $\lambda_1, \lambda_2$  dva různé reálné kořeny charakteristické rovnice, pak definujeme*

$$\boxed{y_1(x) = e^{\lambda_1 x}}, \quad \boxed{y_2(x) = e^{\lambda_2 x}}.$$

- *Je-li  $\lambda$  dvojnásobný reálný kořen charakteristické rovnice, pak definujeme*

$$\boxed{y_1(x) = e^{\lambda x}}, \quad \boxed{y_2(x) = x e^{\lambda x}}.$$

- *Je-li  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$  dvojice komplexně sdružených kořenů charakteristické rovnice, pak definujeme*

$$\boxed{y_1(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x)}, \quad \boxed{y_2(x) = e^{\alpha x} \sin(\beta x)}.$$

*Ve všech třech případech jsou funkce  $y_1, y_2$  lineárně nezávislá řešení rovnice (LH2c) (tvoří fundamentální systém řešení) a obecné řešení této rovnice je tedy tvaru*

$$y_h(x, c_1, c_2) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \quad c_1 \in \mathbb{R}, c_2 \in \mathbb{R}.$$

### Příklad (Homogenní rovnice 1)

Najděte obecné řešení rovnice  $y'' + 6y' + 13y = 0$ .

---

Charakteristická rovnice:

$$\lambda^2 + 6\lambda + 13 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} = -3 \pm 2i$$

Dvě lineárně nezávislá řešení:

$$y_1 = e^{-3x} \cos 2x, \quad y_2 = e^{-3x} \sin 2x$$

Obecné řešení:

$$y = e^{-3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

### Příklad (Homogenní rovnice 2)

Najděte obecné řešení rovnice  $y'' - 4y' + 4y = 0$ .

---

Charakteristická rovnice:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

$$(\lambda - 2)^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 2$$

Dvě lineárně nezávislá řešení:

$$y_1 = e^{2x}, \quad y_2 = xe^{2x}$$

Obecné řešení:

$$y = e^{2x}(c_1 + c_2x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

### Příklad (Homogenní rovnice 3)

Najděte řešení počáteční úlohy  $y'' - 4y = 0$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 3$ .

Charakteristická rovnice:

$$\lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2$$

Dvě lineárně nezávislá řešení:

$$y_1 = e^{2x}, \quad y_2 = e^{-2x}$$

Obecné řešení:

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Řešení počáteční úlohy:

$$y' = 2c_1 e^{2x} - 2c_2 e^{-2x}$$

$$\begin{aligned} y(0) = 2 : \quad 2 &= c_1 + c_2 \\ y'(0) = 3 : \quad 3 &= 2c_1 - 2c_2 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad c_1 = \frac{7}{4}, c_2 = \frac{1}{4}$$

Řešení počáteční úlohy:

$$y = \frac{7}{4} e^{2x} + \frac{1}{4} e^{-2x}$$

## (b) Nalezení partikulárního řešení nehomogenní LDR s konst. koeficienty – metoda variace konstant

### Věta (Variace konstant)

*Nechť  $y_1, y_2$  jsou lineárně nezávislá řešení homogenní rovnice (LH2c), tj.  $y_h(x, c_1, c_2) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$  je obecné řešení rovnice (LH2c). Pak partikulární řešení nehomogenní rovnice*

$$(L2c) \quad y'' + py' + qy = f(x)$$

je tvaru

$$y_p(x) = K_1(x)y_1(x) + K_2(x)y_2(x).$$

*(Konstanty  $c_1, c_2$  ve vzorci pro řešení příslušné homogenní rovnice nahradíme funkcemi  $K_1(x), K_2(x)$ .) Přitom funkce  $K_1(x), K_2(x)$  mají derivace  $K_1'(x), K_2'(x)$ , které splňují soustavu*

$$\begin{aligned} K_1'(x)y_1(x) + K_2'(x)y_2(x) &= 0 \\ K_1'(x)y_1'(x) + K_2'(x)y_2'(x) &= f(x). \end{aligned}$$



### Poznámka (Nalezení funkcí $K_1(x)$ , $K_2(x)$ )

Soustava z předchozí věty má vždy jediné řešení a lze ji řešit například Cramerovým pravidlem. Soustavu lze ekvivalentně vyjádřit v maticovém tvaru:

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1'(x) \\ K_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}.$$

Vypočteme determinant matice soustavy  $W$  a dva pomocné determinanty  $W_1$ ,  $W_2$ :

$$W = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}, \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & f(x) \end{vmatrix}.$$

Pak

$$K_1'(x) = \frac{W_1}{W}, \quad K_2'(x) = \frac{W_2}{W}$$

a následně

$$K_1(x) = \int K_1'(x) dx, \quad K_2(x) = \int K_2'(x) dx.$$

Determinant  $W$  se nazývá **wronskián**.

### Příklad (Variace konstant)

Metodou variace konstant najděte obecné řešení rovnice  $y'' - y' - 2y = e^{2x}$ .

Obecné řešení homogenní rovnice:

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \implies \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2 \implies y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$$

Partikulární řešení nehomogenní rovnice:  $y_p = K_1(x)e^{-x} + K_2(x)e^{2x}$

$$\begin{pmatrix} e^{-x} & e^{2x} \\ -e^{-x} & 2e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1'(x) \\ k_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2x} \end{pmatrix}$$

$$W = 2e^x + e^x = 3e^x, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{2x} \\ e^{2x} & 2e^{2x} \end{vmatrix} = -e^{4x}, \quad W_2 = \begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & e^{2x} \end{vmatrix} = e^x$$

$$K_1'(x) = -\frac{1}{3}e^{3x} \implies K_1(x) = -\frac{1}{9}e^{3x}, \quad K_2'(x) = \frac{1}{3} \implies K_2(x) = \frac{1}{3}x$$

$$\implies y_p = -\frac{1}{9}e^{2x} + \frac{1}{3}xe^{2x}$$

Obecné řešení nehomogenní rovnice:

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} - \frac{1}{9}e^{2x} + \frac{1}{3}xe^{2x}$$

## (b) Nalezení partikulárního řešení nehomogenní LDR se speciální pravou stranou – metoda neurčitých koeficientů

V některých speciálních případech je výhodnější místo obecné metody variace konstant použít alternativní metodu nalezení partikulárního řešení rovnice (L2c).

- ① Nechť pravá strana rovnice (L2c) je tvaru  $f(x) = e^{\alpha x} P(x)$ , kde  $\alpha \in \mathbb{R}$  a  $P$  je polynom. Pak partikulární řešení hledáme ve tvaru

$$y_p(x) = x^k e^{\alpha x} R(x),$$

kde

- $k$  je násobnost čísla  $\alpha$  jakožto kořene charakteristické rovnice pro příslušnou homogenní rovnici (LH2c), tj.
  - $k = 0$  pokud  $\alpha$  není kořenem charakteristické rovnice,
  - $k = 1$  pokud  $\alpha$  je jednoduchým kořenem charakteristické rovnice,
  - $k = 2$  pokud  $\alpha$  je dvojnásobným kořenem charakteristické rovnice
- $R$  je polynom stejného stupně jako polynom  $P$ .

- ② Nechť pravá strana rovnice (L2c) je tvaru

$f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos(\beta x) + Q_m(x) \sin(\beta x))$ , kde  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  a  $P_n, Q_m$  jsou polynomy stupně  $n$ , resp.  $m$ . Pak partikulární řešení hledáme ve tvaru

$$y_p(x) = x^k e^{\alpha x} (R(x) \cos(\beta x) + S(x) \sin(\beta x)),$$

kde

- $k$  je násobnost čísla  $\alpha + \beta i$  jakožto kořene charakteristické rovnice pro příslušnou homogenní rovnici (LH2c), tj.
  - $k = 0$  pokud  $\alpha + \beta i$  není kořenem charakteristické rovnice,
  - $k = 1$  pokud  $\alpha + \beta i$  je kořenem charakteristické rovnice,
- $R$  a  $S$  jsou polynomy stejného stupně, který je roven  $\max(n, m)$ .

### Poznámka

I v případě, kdy jeden z polynomů  $P_n$  nebo  $Q_m$  je nulový (tj. na pravé straně rovnice chybí sinus nebo kosinus), je potřeba do vzorce pro  $y_p$  dosadit oba polynomy  $R$  i  $S$  (a tedy obě funkce sinus i kosinus).

V obou uvedených případech postupujeme tak, že napíšeme tvar partikulárního řešení  $y_p$  s neurčitými koeficienty daných polynomů.

(Víme-li například, že polynom  $R$  má být stupně 2, pak do vzorce pro  $y_p$  dosadíme  $R(x) = ax^2 + bx + c$ .)

Tvar řešení  $y_p$  dosadíme do rovnice (L2c) a porovnáním levé a pravé strany nalezneme hledané koeficienty. (Určíme konkrétní hodnoty koeficientů  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .)

### Příklad (Metoda neurčitých koeficientů 1)

Metodou neurčitých koeficientů najděte obecné řešení rovnice  $y'' - y' - 2y = e^{2x}$ .

Obecné řešení homogenní rovnice:  $y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$  ( $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 2$ )

Partikulární řešení nehomogenní rovnice:

$$P(x) = 1, \alpha = 2 \text{ (jednoduchý kořen char. rovnice)} \implies y_p = ax e^{2x}$$

Je potřeba najít konstantu  $a$ :

$$y'_p = ae^{2x} + 2axe^{2x}$$

$$y''_p = 2ae^{2x} + 2ae^{2x} + 4axe^{2x} = 4ae^{2x} + 4axe^{2x}$$

Dosadíme  $y_p$ ,  $y'_p$ ,  $y''_p$  do rovnice:

$$4ae^{2x} + 4axe^{2x} - (ae^{2x} + 2axe^{2x}) - 2axe^{2x} = e^{2x}$$

$$3ae^{2x} = e^{2x} \implies a = \frac{1}{3} \implies y_p = \frac{1}{3} x e^{2x}$$

Obecné řešení nehomogenní rovnice:  $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{3} x e^{2x}$

## Příklad (Metoda neurčitých koeficientů 2)

Metodou neurčitých koeficientů najděte obecné řešení rovnice  $y'' + y = \sin x$ .

---

Obecné řešení homogenní rovnice:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \implies \lambda_{1,2} = \pm i, \implies y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

Partikulární řešení nehomogenní rovnice:

$$P(x) = 0, Q(x) = 1, \alpha + \beta i = i \text{ (kořen char. rce)} \implies y_p = x(a \cos x + b \sin x)$$

Je potřeba najít konstanty  $a$  a  $b$ :

$$y'_p = a \cos x + b \sin x + x(-a \sin x + b \cos x)$$

$$y''_p = -a \sin x + b \cos x - a \sin x + b \cos x + x(-a \cos x - b \sin x)$$

Dosadíme  $y_p$ ,  $y'_p$ ,  $y''_p$  do rovnice:

$$-2a \sin x + 2b \cos x + x(-a \cos x - b \sin x) + x(a \cos x + b \sin x) = \sin x$$

$$-2a \sin x + 2b \cos x = \sin x \implies a = -\frac{1}{2}, b = 0 \implies y_p = -\frac{1}{2}x \cos x$$

Obecné řešení nehomogenní rovnice:

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2}x \cos x$$