

# Lineární diferenciální rovnice prvního řádu

## Vyšší matematika

LDF MENDELU



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Podpořeno projektem Průřezová inovace studijních programů Lesnické a dřevařské fakulty MENDELU v Brně (LDF) s ohledem na disciplíny společného základu <http://akademie.ldf.mendelu.cz/cz> (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0021) za přispění finančních prostředků EU a státního rozpočtu České republiky.

# Lineární diferenciální rovnice prvního řádu (LDR)

## Definice (LDR prvního řádu)

Nechť  $a$  a  $b$  jsou funkce spojité na otevřeném intervalu  $I$ . Diferenciální rovnice

$$(L) \quad y' + a(x)y = b(x)$$

se nazývá **lineární diferenciální rovnice prvního řádu**.

- Je-li  $b(x) \equiv 0$ , pak se rovnice (L) nazývá **homogenní**, v opačném případě se nazývá **nehomogenní**.
- Je-li (L) nehomogenní rovnice, pak se rovnice

$$y' + a(x)y = 0,$$

která vznikne z rovnice (L) nahrazením pravé strany  $b(x)$  nulovou funkcí, nazývá **homogenní rovnice příslušná nehomogenní rovnici (L)**.

## Věta (Jednoznačnost řešení počáteční úlohy)

*Nechť  $a, b$  jsou spojité na otevřeném intervalu  $I$ ,  $x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}$ . Pak každá počáteční úloha*

$$y' + a(x)y = b(x), \quad y(x_0) = y_0$$

*má jediné řešení definované na celém  $I$ .*

## Poznámka (Vlastnosti homogenní rovnice)

- 1 Homogenní rovnice  $y' + a(x)y = 0$  má vždy tzv. **triviální řešení**  $y = 0$ . (Lze ověřit dosazením do rovnice.)
- 2 Linearita = aditivita + homogenita
  - Aditivita: Jsou-li  $y_1$  a  $y_2$  dvě řešení homogenní rovnice, pak jejich součet  $y_1 + y_2$  je také řešením této homogenní rovnice.
  - Homogenita: Je-li  $y$  řešení homogenní rovnice, pak také konstatní násobek  $cy$ , kde  $c \in \mathbb{R}$ , je řešením této rovnice.

Obecně: Jsou-li  $y_1$  a  $y_2$  dvě řešení homogenní rovnice, pak jejich lineární kombinace  $c_1y_1 + c_2y_2$ , kde  $c_1 \in \mathbb{R}, c_2 \in \mathbb{R}$  je také řešením této homogenní rovnice.

# Obecné řešení nehomogenní LDR

## Věta (Obecné řešení nehomogenní LDR)

Obecné řešení nehomogenní lineární rovnice (L) lze vyjádřit ve tvaru

$$y(x, c) = y_h(x, c) + y_p(x),$$

kde  $y_h(x, c)$  je obecné řešení příslušné homogenní rovnice a  $y_p(x)$  je libovolné partikulární řešení rovnice (L).

## Poznámka

K nalezení obecného řešení lineární rovnice (L) je tedy potřeba nalézt

- (a) obecné řešení příslušné homogenní rovnice
  - (b) jedno libovolné partikulární řešení rovnice (L)
- a obě sečíst.

# (a) Obecné řešení homogenní LDR

Homogenní lineární diferenciální rovnice

$$y' + a(x)y = 0$$

je rovnice se separovanými proměnnými, neboť ji lze psát ve tvaru

$$y' = -a(x)y.$$

Řešením této rovnice dostaneme obecné řešení

$$y(x, c) = ce^{-\int a(x) dx}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Tvar tohoto řešení si můžeme snadno zapamatovat, neboť z rovnice vidíme, že řešením homogenní rovnice je složená exponenciální funkce, taková, že derivace exponentu (vnitřní složky) je funkce  $-a(x)$ .

## Příklad (Homogenní rovnice 1)

Najděte obecné řešení následujících rovnic:

1  $y' = y$

## Příklad (Homogenní rovnice 1)

Najděte obecné řešení následujících rovnic:

1  $y' = y$

Funkce, která je rovna své derivaci, je funkce  $e^x$ . Totéž platí pro každý její konstantní násobek. Obecné řešení je tedy

$$y = ce^x, c \in \mathbb{R}.$$



## Příklad (Homogenní rovnice 1)

Najděte obecné řešení následujících rovnic:

1  $y' = y$

Funkce, která je rovna své derivaci, je funkce  $e^x$ . Totéž platí pro každý její konstantní násobek. Obecné řešení je tedy

$$y = ce^x, c \in \mathbb{R}.$$

2  $y' + y = 0$

## Příklad (Homogenní rovnice 1)

Najděte obecné řešení následujících rovnic:

1  $y' = y$

Funkce, která je rovna své derivaci, je funkce  $e^x$ . Totéž platí pro každý její konstantní násobek. Obecné řešení je tedy

$$y = ce^x, c \in \mathbb{R}.$$

2  $y' + y = 0$

Pokud rovnici přepíšeme do tvaru  $y' = -y$ , vidíme, že rovnici splňuje funkce, jejíž derivace je rovna hledané funkci vynásobené číslem  $-1$ . Tuto vlastnost má funkce  $e^{-x}$  a také každý její konstantní násobek. Obecné řešení je tedy

$$y = ce^{-x}, c \in \mathbb{R}.$$

## Příklad (Homogenní rovnice 2)

Najděte obecné řešení rovnice

$$y' - 2xy = 0.$$

## Příklad (Homogenní rovnice 2)

Najděte obecné řešení rovnice

$$y' - 2xy = 0.$$

Pokud rovnici přepíšeme do tvaru  $y' = 2xy$ , vidíme, že hledáme funkci, jejíž derivace je rovna hledané funkci vynásobené funkcí  $2x$ . Řešením je složená exponenciální funkce, kde exponent je funkce, jejíž derivace je funkce  $2x$ . Je to tedy funkce  $e^{x^2}$  a také každý její konstantní násobek. Obecné řešení je tedy

$$y = ce^{x^2}, c \in \mathbb{R}.$$

## (b) Nalezení partikulárního řešení nehomogenní LDR – metoda variace konstanty

Je-li  $y_h(x, c) = ce^{-\int a(x) dx}$  obecné řešení příslušné homogenní rovnice, pak partikulární řešení nehomogenní rovnice

$$(L) \quad y' + a(x)y = b(x)$$

hledáme ve tvaru

$$y_p(x) = K(x)e^{-\int a(x) dx}.$$

(Konstantu  $c$  ve vzorci pro řešení homogenní rovnice nahradíme funkcí  $K(x)$  – odtud název metoda variace konstanty.)

Neznámou funkci  $K(x)$  najdeme následovně:

- Má-li být funkce  $y_p(x)$  řešením rovnice (L), musí rovnici (L) splňovat. Najdeme tedy derivaci  $y_p'(x)$  a společně s  $y_p(x)$  dosadíme do rovnice (L).
- Členy obsahující  $K(x)$  se po dosazení v rovnici vyruší, obdržíme tedy rovnici s neznámou funkcí  $K'(x)$ . Tuto funkci z rovnice vyjádříme, zintegrujeme a dostaneme tak hledanou funkci  $K(x)$ .

# Vzorec pro obecné řešení nehomogenní LDR

Aplikací výše popsané metody na obecnou rovnici dostáváme vzorec pro obecné řešení nehomogenní LDR:

$$y(x, c) = e^{-\int a(x) dx} \left( \int b(x) e^{\int a(x) dx} dx + c \right).$$

Tento vzorec lze též odvodit následujícím způsobem (který zároveň dává návod pro alternativní metodu řešení nehomogenní LDR):

Rovnici (L) vynásobíme tzv. integračním faktorem  $e^{\int a(x) dx}$ :

$$y' e^{\int a(x) dx} + a(x) e^{\int a(x) dx} y = b(x) e^{\int a(x) dx}.$$

Levou stranu vyjádříme jako derivaci součinu

$$\left( y e^{\int a(x) dx} \right)' = b(x) e^{\int a(x) dx}.$$

Integrací obdržíme

$$y e^{\int a(x) dx} = \int b(x) e^{\int a(x) dx} dx + c,$$

odkud vyjádříme  $y$  a dostaneme tak výše uvedený vzorec.

## Příklad (Variace konstanty)

Metodou variace konstanty najděte obecné řešení rovnice  $y' - \frac{2}{x}y = 2x^3$ .

---

## Příklad (Variace konstanty)

Metodou variace konstanty najděte obecné řešení rovnice  $y' - \frac{2}{x}y = 2x^3$ .

- Obecné řešení homogenní rovnice  $y' - \frac{2}{x}y = 0$ :

$$\int \frac{2}{x} dx = 2 \ln |x| \Rightarrow y_h = ce^{2 \ln |x|} = ce^{\ln x^2} = cx^2 \Rightarrow \boxed{y_h = cx^2, c \in \mathbb{R}}$$

- Partikulární řešení nehomogenní rovnice – variace konstanty:

Řešení hledáme ve tvaru  $y_p = K(x)x^2$ . Potřebujeme najít funkci  $K(x)$ .

Zderivujeme:  $y_p = K'(x)x^2 + K(x) \cdot 2x$

Dosadíme do rovnice:

$$K'(x)x^2 + K(x) \cdot 2x - \frac{2}{x}K(x)x^2 = 2x^3$$

Členy obsahující  $K(x)$  se odečtou:

$$K'(x)x^2 = 2x^3 \Rightarrow K'(x) = 2x \Rightarrow K(x) = x^2$$

$$\Rightarrow \boxed{y_p = x^4}$$

Obecné řešení nehomogenní rovnice je součet  $y_h + y_p$ , tedy  $\boxed{y = cx^2 + x^4, c \in \mathbb{R}}$



## Příklad (Integrační faktor)

Pomocí integračního faktoru najděte obecné řešení rovnice  $y' - \frac{2}{x}y = 2x^3$ .

---

## Příklad (Integrační faktor)

Pomocí integračního faktoru najděte obecné řešení rovnice  $y' - \frac{2}{x}y = 2x^3$ .

Integrační faktor je

$$e^{-\int \frac{2}{x} dx} = e^{-2 \ln |x|} = e^{\ln \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x^2}.$$

Rovnici vynásobíme integračním faktorem a upravíme:

$$\begin{aligned} y' \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} y \frac{1}{x^2} &= 2x^3 \frac{1}{x^2} \\ y' \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} y &= 2x \end{aligned}$$

Levou stranu napíšeme jako derivaci součinu:

$$\left( y \frac{1}{x^2} \right)' = 2x$$

Zintegrujeme a vyjádříme  $y$ :

$$y \frac{1}{x^2} = x^2 + c \Rightarrow \boxed{y = x^2(x^2 + c), c \in \mathbb{R}}$$