Aplikace diferenciálních rovnic – řešené příklady

Vyšší matematika

LDF MENDELU

Podpořeno projektem Průřezová inovace studijních programů Lesnické a dřevařské fakulty MENDELU v Brně (LDF) s ohledem na disciplíny společného základu `http://akademie.ldf.mendelu.cz/cz` (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0021) za přispění finančních prostředků EU a státního rozpočtu České republiky.

Simona Fišnarová

Brno 2014

Příklad (Ropná skvrna)

Kruhová ropná skvrna na hladině se rozšiřuje tak, že poloměr roste rychlostí, která je nepřímo úměrná druhé mocnině poloměru. Sestavte diferenciální rovnici popisující tento proces a vyřešte ji – tj. zjistěte, jaká funkce popisuje proces zvětšování poloměru olejové skvrny v čase.

Označme:

$$
\begin{aligned}
x &\ldots \text{ čas} \\
y = y(x) &\ldots \text{ poloměr skvrny}
\end{aligned}
$$

Rychlost růstu poloměru y je vyjádřena derivací y'. Derivace y' je tedy nepřímo úměrná funkci y^2. Nepřímá úměrnost znamená, že existuje konstanta $k \in \mathbb{R}$, že platí:

$$y' = k\frac{1}{y^2}$$

Řešení rovnice

$$y' = k\frac{1}{y^2}$$

Jedná se o rovnici se separovanými proměnnými.

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= k\frac{1}{y^2} \\
y^2 \,\mathrm{d}y &= k \,\mathrm{d}x \\
\frac{y^3}{3} &= kx + c \\
y^3 &= 3(kx + c) \\
y &= \sqrt[3]{3(kx + c)}
\end{aligned}
$$

Příklad (Chladnutí polévky)

V kuchyni je teplota $20°$C. Za jak dlouho je právě vypnutá vroucí polévka ochladí na $25°$C, pokud po 10 minutách má teplotu $60°$C?
Návod: Podle Newtonova zákona je rychlost ochlazování tělesa na vzduchu přímo úměrná rozdílu teploty tělesa a vzduchu.

Označme:

$$x \dots \text{ čas}$$
$$y = y(x) \dots \text{ teplota polévky}$$

Rychlost ochlazování polévky je vyjádřena derivací y'. Podle Newtonowa zákona je tedy derivace y' přímo úměrná rozdílu $y - 20$. Přímá úměrnost znamená, že existuje konstanta $k \in \mathbb{R}$, že platí:

$$y' = k(y - 20).$$

Zároveň platí podmínky $y(0) = 100$ a $y(10) = 60$.
Je potřeba najít řešení rovnice, které splňuje tyto podmínky a pak zjistit, pro jaké x je $y = 25$.

Řešení rovnice

$$y' = ky - 20, \quad y(0) = 100, \quad y(10) = 60$$

Jedná se o rovnici se separovanými proměnnými.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = k(y - 20)$$
$$\frac{1}{y - 20}\,\mathrm{d}y = k\,\mathrm{d}x$$
$$\ln(y - 20) = kx + c$$

Dosazení podmínek:

$$y(0) = 100: \quad \ln 80 = c$$
$$y(10) = 60: \quad \ln 40 = 10k + \ln 80 \Rightarrow k = \frac{\ln 40 - \ln 80}{10} = \frac{\ln \frac{1}{2}}{10} = -\frac{\ln 2}{10}$$

Řešení rovnice lze tedy vyjádřit vztahem

$$\ln(y - 20) = -\frac{\ln 2}{10}x + \ln 80$$

Zbývá zjistit, pro jaké x je $y = 25$. Dosadíme $y = 25$ do rovnice:

$$
\begin{aligned}
\ln 5 &= -\frac{\ln 2}{10}x + \ln 80 \\
\frac{\ln 2}{10}x &= \ln 80 - \ln 5 \\
\frac{\ln 2}{10}x &= \ln \frac{80}{5} \\
\frac{\ln 2}{10}x &= \ln 16 \\
x &= 10\frac{\ln 16}{\ln 2} = 10\frac{4\ln 2}{\ln 2} = 40
\end{aligned}
$$

Polévka se ochladí na $25°$C za 40 minut.

Příklad (Samočištění jezera)

V jezeře je počáteční množství nečistot. Do jezera teče konstantní rychlostí čistá voda, mísí se se znečištěnou a odtéká. Průtok na odtoku je stejný jako na přítoku. Sestavte diferenciální rovnici popisující vývoj nečistot v čase. Předpokládáme, že voda je v jezeře dobře promíchávána.

Označme:

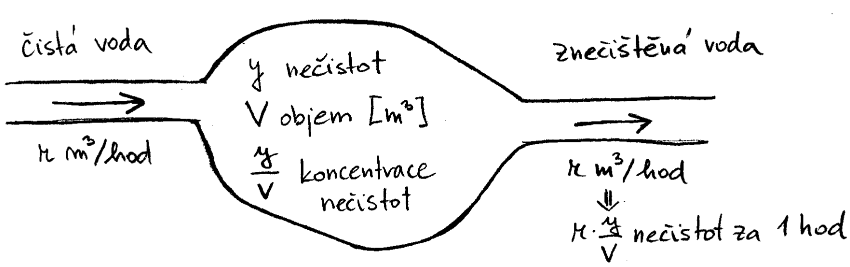
$x \ldots$ čas

$y = y(x) \ldots$ množství nečistot v jezeře

$y_0 \ldots$ počáteční množství nečistot

$r \ldots$ průtok = množství vody, které přiteče/odteče za jednotku času (je konstantní)

$V \ldots$ objem jezera (konstantní)



Rychlost úbytku nečistot v jezeře je určena derivací y'. Zároveň je vyjádřena množstvím nečistot, které z jezera odtečou za jednotku času, tj. $r\frac{y}{V}$. Rovnice popisující vývoj nečistot v čase je tedy:

$$\boxed{y' = -r\frac{y}{V}, \quad y(0) = y_0}$$

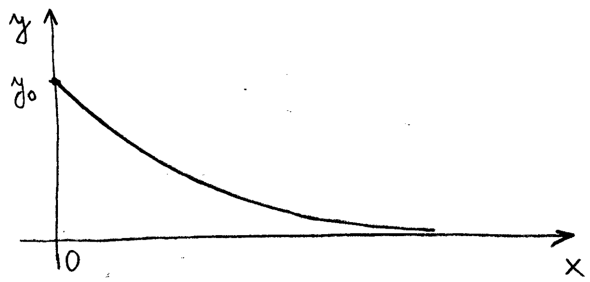
Jedná se o homogenní lineární rovnici, její obecné řešení je

$$y = ce^{-\frac{r}{V}x}.$$

Dosadíme počáteční podmínku:

$$y(0) = y_0 : \quad y_0 = ce^0 \Longrightarrow c = y_0.$$

Vývoj nečistot v čase x je tedy určen funkcí $\boxed{y = y_0 e^{-\frac{r}{V}x}}$



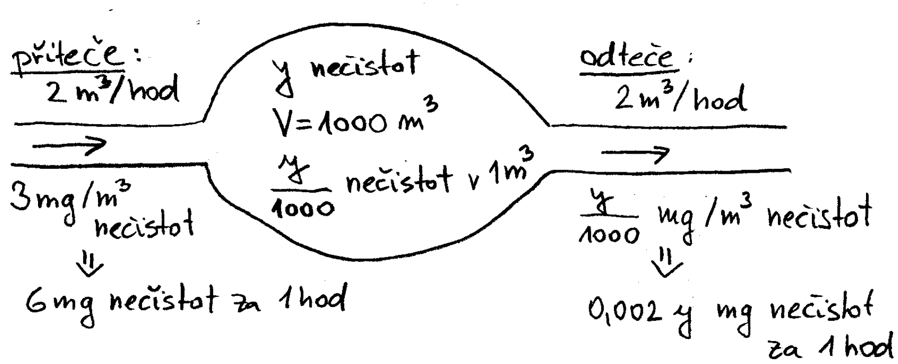
Příklad (Znečišťování jezera)

V jezeře je voda o objemu 1000 m^3. Do jezera přitéká a odtéká voda stejnou konstantní rychlostí - průtok je 2m^3/hod. Voda v jezeře je na počátku čistá, začne však přitékat zněčištěná voda. Koncentrace nečistot na přítoku je 3 mg/m^3. Vaším úkolem je zachránit život v jezeře tak, že udržíte koncentraci nečistot v jezeře pod hodnotou 1 mg/m^3. Kolik máte času na zastavení přísunu nečistot? Předpokládejme, že voda je v jezeře dobře promíchávána.

Označme:

$x \ldots$ čas

$y = y(x) \ldots$ množství nečistot v jezeře



Rychlost změny množství nečistot v jezeře je určena derivací y'. Zároveň je vyjádřena rozdílem nečistot, které do jezera přitečou a z jezera odtečou za jednotku času, tj. $6 - 0,002y$. Rovnice popisující vývoj nečistot v čase je tedy:

$$\boxed{y' = 6 - 0,002y, \quad y(0) = 0}$$

Rovnici můžeme řešit buď jako lineární nebo se separovanými proměnnými:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6-0,002y}\,\mathrm{d}y &= \,\mathrm{d}x \\
\frac{-0,002}{6-0,002y}\,\mathrm{d}y &= -0,002\,\mathrm{d}x \\
\ln(6-0,002y) &= -0,002x + c \\
6 - 0,002y &= Ce^{-0,002x} \\
y &= 500(6 - Ce^{-0,002x})
\end{aligned}$$

Dosadíme podmínku:

$$y(0) = 0: \quad 0 = 300(6 - C) \Longrightarrow C = 6 \Longrightarrow \boxed{y = 3000(1 - e^{-0,002x})}$$

Zbývá zjistit, v jakém čase x dosáhne koncentrace nečistot v jezeře hodnoty 1 mg/m^3. Koncentrace je dána podílem $\frac{y}{1000}$, tedy množství nečistot odpovídající koncentraci 1 mg/m^3 je $y = 1000$ mg. Do vztahu $y = 3000(1 - e^{-0,002x})$ dosadíme tedy $y = 1000$ a vypočteme odpovídající x:

$$\begin{aligned}
1000 &= 3000(1 - e^{-0,002x}) \\
\frac{1}{3} &= 1 - e^{-0,002x} \\
e^{-0,002x} &= \frac{2}{3} \\
-0,002x &= \ln(2/3) \\
x &= -500\ln(2/3) = 500\ln(3/2) \approx 202
\end{aligned}$$

Přísun nečistot je potřeba zastavit do 202 hodin, tj. do 8 dní 10 hodin.