



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Dvojný integrál

Vyšší matematika

LDF MENDELU

Podpořeno projektem Průřezová inovace studijních programů Lesnické a dřevařské fakulty MENDELU v Brně (LDF) s ohledem na disciplíny společného základu <http://akademie.ldf.mendelu.cz/cz> (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0021) za přispění finančních prostředků EU a státního rozpočtu České republiky.

Infimum a supremum

Definice (Dolní závora, infimum)

Nechť A je neprázdná množina reálných čísel.

- Číslo $d \in \mathbb{R}$ se nazývá **dolní závora** množiny A , jestliže pro všechna $a \in A$ platí $d \leq a$.
- Množina A se nazývá **zdola ohraničená**, jestliže existuje alespoň jedna její dolní závora. V tom případě se největší dolní závora množiny A nazývá **infimum** množiny A a značí se $\inf(A)$.

Definice (Horní závora, supremum)

Nechť A je neprázdná množina reálných čísel.

- Číslo $h \in \mathbb{R}$ se nazývá **horní závora** množiny A , jestliže pro všechna $a \in A$ platí $h \geq a$.
- Množina A se nazývá **shora ohraničená**, jestliže existuje alespoň jedna její dolní závora. V tom případě se nejmenší horní závora množiny A nazývá **supremum** množiny A a značí se $\sup(A)$.

Příklad

- 1 Uvažujme interval $(2, 4]$.
 - Dolní závora intervalu $(2, 4]$ je každé reálné číslo, které je menší nebo rovno všem číslům z intervalu $(2, 4]$. Největší z těchto dolních závor je číslo 2, je to tedy infimum intervalu $(2, 4]$.
 - Horní závora intervalu $(2, 4]$ je každé reálné číslo, které je větší nebo rovno všem číslům z intervalu $(2, 4]$. Nejmenší z těchto horních závor je číslo 4, je to tedy supremum intervalu $(2, 4]$.
- 2 Uvažujme interval $(1, \infty)$.
 - Infimum intervalu je číslo 1.
 - Supremum intervalu však neexistuje, interval není shora ohraničená množina.

Poznámka

Infimum a supremum množiny může, ale nemusí být prvkem dané množiny.

- Supremum intervalu $(2, 4]$ je číslo 4, které do intervalu patří.
- Infimum intervalu $(2, 4]$ je číslo 2, které do intervalu nepatří.

Dvojný integrál na obdélníku

Nechť f je funkce dvou proměnných definovaná a ohraničená na obdélníku $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in [a, b], y \in [c, d]\}$, stručně píšeme $R = [a, b] \times [c, d]$.

- Rozdělme obdélník R na n obdélníků p_1, p_2, \dots, p_n o obsahích $\Delta p_1, \Delta p_2, \dots, \Delta p_n$. Mluvíme od tzv. **dělení** obdélníku R . Označme toto dělení D .
- V každém z obdélníků $p_i, i = 1, 2, \dots, n$, najdeme infimum m_i a supremum M_i funkčních hodnot funkce f , tj;

$$m_i = \inf\{f(x, y), (x, y) \in p_i\}, \quad M_i = \sup\{f(x, y), (x, y) \in p_i\}.$$

a určíme součty

$$s(D, f) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta p_i, \quad S(D, f) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta p_i.$$

Číslo $s(D, f)$ se nazývá **dolní součet** příslušný funkci f a dělení D a číslo $S(D, f)$ se nazývá **horní součet** příslušný funkci f a dělení D .

Dvojný integrál na obdélníku

Výše uvedený dolní a horní součet je možné sestavit pro libovolné dělení obdélníku R . Množina všech možných dolních součtů je shora ohraničená, existuje tedy její supremum a podobně množina všech možných horních součtů je zdola ohraničená a má tedy infimum.

- Supremum množiny všech dolních součtů se nazývá **dolní dvojný integrál** funkce f na obdélníku R a značí se

$$\underline{\iint}_R f(x, y) \, dx dy.$$

- Infimum množiny všech horních součtů se nazývá **horní dvojný integrál** funkce f na obdélníku R a značí se

$$\overline{\iint}_R f(x, y) \, dx dy.$$

Dvojný integrál na obdélníku

Definice (Dvojný integrál na obdélníku)

Je-li

$$\iint_R f(x, y) \, dx dy = \overline{\iint_R f(x, y) \, dx dy},$$

pak říkáme, že funkce f je na obdélníku R **integrovatelná** a společnou hodnotu dolního a horního integrálu nazýváme **dvojný integrál** funkce f na obdélníku R a značíme

$$\iint_R f(x, y) \, dx dy.$$

Věta (Postačující podmínka pro integrovatelnost)

Nechť f je funkce dvou proměnných spojitá na obdélníku R . Pak je funkce f na tomto obdélníku integrovatelná.

Výpočet dvojného integrálu na obdélníku

Výpočet dvojného integrálu provádíme s využitím následující věty převedením na tzv. **dvojnásobný integrál** ("integrál z integrálu").

Věta (Fubini)

Nechť f je funkce spojitá na uzavřeném obdélníku $R = [a, b] \times [c, d]$. Pak

$$\iint_R f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) \, dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) \, dx \right] dy.$$

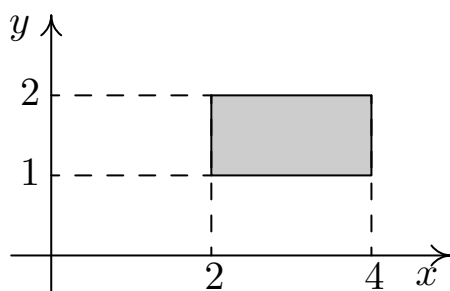
Důsledek Fubiniho věty

Platí-li v předchozí větě navíc, že $f(x, y) = g(x)h(y)$, kde g je funkce spojitá na $[a, b]$ a h je funkce spojitá na $[c, d]$, pak

$$\iint_R f(x, y) \, dx dy = \int_a^b g(x) \, dx \cdot \int_c^d h(y) \, dy.$$

Příklad

Vypočtete $\iint_R (x + 2y) \, dx \, dy$, kde R je obdélník s vrcholy $(2, 1)$, $(4, 1)$, $(4, 2)$, $(2, 2)$.



Podle Fubiniho věty můžeme integrál vyjádřit jako dvojnásobný:

$$\textcircled{1} \quad \iint_R (x + 2y) \, dx \, dy = \int_2^4 \left[\int_1^2 (x + 2y) \, dy \right] \, dx$$

$$\textcircled{2} \quad \iint_R (x + 2y) \, dx \, dy = \int_1^2 \left[\int_2^4 (x + 2y) \, dx \right] \, dy$$

Příklad (pokračování)

①

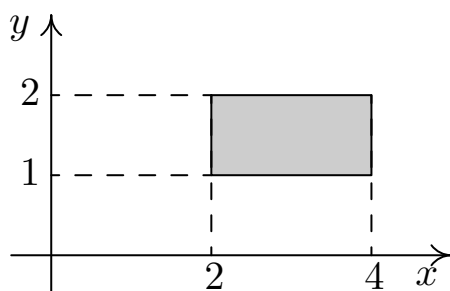
$$\begin{aligned} \iint_R (x + 2y) \, dx \, dy &= \int_2^4 \left[\int_1^2 (x + 2y) \, dy \right] \, dx = \int_2^4 [xy + y^2]_1^2 \, dx \\ &= \int_2^4 (2x + 4 - (x + 1)) \, dx = \int_2^4 (x + 3) \, dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + 3x \right]_2^4 = 8 + 12 - (2 + 6) = 12 \end{aligned}$$

②

$$\begin{aligned} \iint_R (x + 2y) \, dx \, dy &= \int_1^2 \left[\int_2^4 (x + 2y) \, dx \right] \, dy = \int_1^2 \left[\frac{x^2}{2} + 2xy \right]_2^4 \, dy \\ &= \int_1^2 (8 + 8y - (2 + 4y)) \, dy = \int_1^2 (6 + 4y) \, dy \\ &= [6y + 2y^2]_1^2 = 12 + 8 - (6 + 2) = 12 \end{aligned}$$

Příklad

Vypočtete $\iint_R xy^2 \, dx dy$, kde R je obdélník s vrcholy $(2, 1)$, $(4, 1)$, $(4, 2)$, $(2, 2)$.



Podle důsledku Fubiniho věty je možné integrál vyjádřit jako součin dvou jednoduchých integrálů:

$$\iint_R xy^2 \, dx dy = \int_2^4 x \, dx \cdot \int_1^2 y^2 \, dy = \left[\frac{x^2}{2} \right]_2^4 \cdot \left[\frac{y^3}{3} \right]_1^2 = (8 - 2) \cdot \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) = 14$$

Dvojný integrál na obecné uzavřené oblasti

Definice (Dvojný integrál)

Nechť f je funkce definovaná a ohraničená na ohraničené a uzavřené oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a nechť R je obdélník takový, že $\Omega \subseteq R$. Definujme na R funkci g předpisem

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{je-li } (x, y) \in \Omega, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

a předpokládejme, že funkce g je na R integrovatelná. Pak dvojný integrál funkce f na množině Ω definujeme vztahem

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy = \iint_R g(x, y) \, dx dy.$$

Věta (Postačující podmínka pro integrovatelnost)

Nechť f je funkce dvou proměnných definovaná a spojitá na ohraničené a uzavřené oblasti Ω . Pak je funkce f na Ω integrovatelná.

Výpočet dvojného integrálu na uzavřené elementární oblasti

Věta (Fubini)

- Necht' g_1, h_1 jsou funkce jedné proměnné spojité na $[a, b]$ a necht' f je funkce dvou proměnných spojitá na množině

$$\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq h_1(x)\}.$$

Pak

$$\iint_{\Omega_1} f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{h_1(x)} f(x, y) \, dy \right] dx.$$

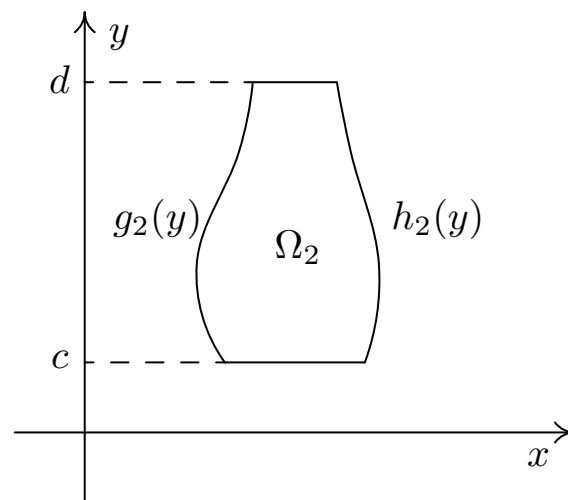
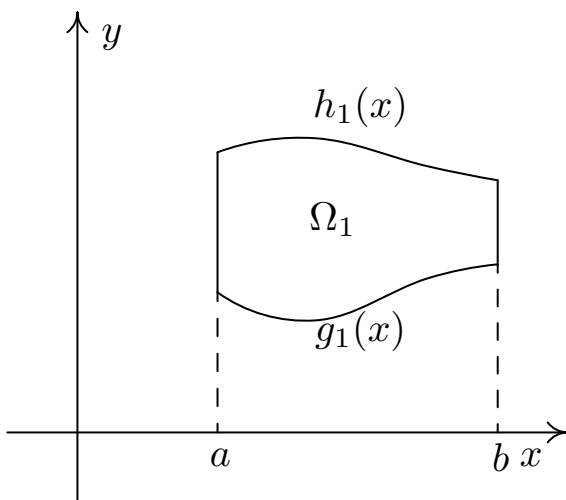
- Necht' g_2, h_2 jsou funkce jedné proměnné spojité na $[c, d]$ a necht' f je funkce dvou proměnných spojitá na množině

$$\Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, g_2(y) \leq x \leq h_2(y)\}.$$

Pak

$$\iint_{\Omega_2} f(x, y) \, dx dy = \int_c^d \left[\int_{g_2(y)}^{h_2(y)} f(x, y) \, dx \right] dy$$

Množiny Ω_1 a Ω_2 z předchozí věty se nazývají **uzavřené elementární oblasti**.



Vlastnosti dvojného integrálu

Věta (Linearita)

Nechť f_1, f_2 jsou funkce integrovatelné na Ω a necht' $c, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Pak

$$\iint_{\Omega} cf(x, y) \, dx dy = c \iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy,$$

$$\iint_{\Omega} [f_1(x, y) + f_2(x, y)] \, dx dy = \iint_{\Omega} f_1(x, y) \, dx dy + \iint_{\Omega} f_2(x, y) \, dx dy.$$

Poznámka

Vlastnosti uvedené v předchozí větě lze shrnout:

$$\iint_{\Omega} [c_1 f_1(x, y) + c_2 f_2(x, y)] \, dx dy = c_1 \iint_{\Omega} f_1(x, y) \, dx dy + c_2 \iint_{\Omega} f_2(x, y) \, dx dy.$$

Vlastnosti dvojného integrálu

Věta (Aditivita vzhledem k integračnímu oboru)

Nechť je funkce integrovatelná na konečném počtu uzavřených elementárních oblastí $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$, které mají společné nejvýše hraniční body a necht' $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_n$. Pak platí

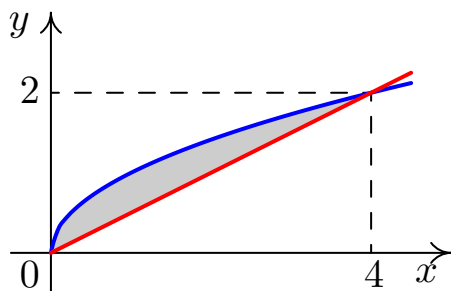
$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy = \iint_{\Omega_1} f(x, y) \, dx dy + \iint_{\Omega_2} f(x, y) \, dx dy + \dots + \iint_{\Omega_n} f(x, y) \, dx dy.$$

Integrujeme-li tedy funkci f na množině, která není elementární oblast, postupujeme tak, že tuto množinu vhodným způsobem na elementární oblasti rozdělíme. Na všech takto získaných elementárních oblastech vypočteme integrál z funkce f a všechny tyto integrály sečteme.

Příklad

Vypočtete $\iint_{\Omega} 2xy \, dx dy$, kde Ω je množina bodů, které vyhovují nerovnostem:

$$y \leq \sqrt{x}, \quad y \geq \frac{x}{2}.$$



$$\begin{aligned} y = \sqrt{x} &\iff x = y^2 \\ y = \frac{x}{2} &\iff x = 2y \end{aligned}$$

Podle Fubiniho věty převedeme integrál na dvojnásobný. Máme dvě možnosti:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \iint_{\Omega} 2xy \, dx dy &= \int_0^4 \left[\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} 2xy \, dy \right] dx \\ \textcircled{2} \quad \iint_{\Omega} 2xy \, dx dy &= \int_0^2 \left[\int_{y^2}^{2y} 2xy \, dx \right] dy \end{aligned}$$

Příklad (pokračování)

①

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} 2xy \, dx dy &= \int_0^4 \left[\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} 2xy \, dy \right] dx = \int_0^4 \left[xy^2 \right]_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} dx \\ &= \int_0^4 \left(x^2 - \frac{x^3}{4} \right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{16} \right]_0^4 = \frac{64}{3} - 16 = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

②

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} 2xy \, dx dy &= \int_0^2 \left[\int_{y^2}^{2y} 2xy \, dx \right] dy = \int_0^2 \left[x^2 y \right]_{y^2}^{2y} dy \\ &= \int_0^2 (4y^3 - y^5) dy = \left[y^4 - \frac{y^6}{6} \right]_0^2 = 16 - \frac{2^6}{6} = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

Polární souřadnice

Body v \mathbb{R}^2 jsme dosud vyjadřovali pomocí tzv. **kartézských souřadnic** – každému bodu v pravouhlé souřadnicové soustavě je přiřazena dvojice souřadnic (x, y) , které udávají vzdálenost daného bodu od osy y a od osy x . Každý bod v \mathbb{R}^2 je těmito kartézskými souřadnicemi jednoznačně určen.

Existují i jiné způsoby, jak zadávat body v rovině, například pomocí tzv. **polárních souřadnic** – každý bod v rovině je určen dvojicí (r, φ) , kde

r je vzdálenost bodu od počátku souřadnicové soustavy,

φ je úhel, který svírá spojnice daného bodu a počátku souřadnicové soustavy s kladnou částí osy x .

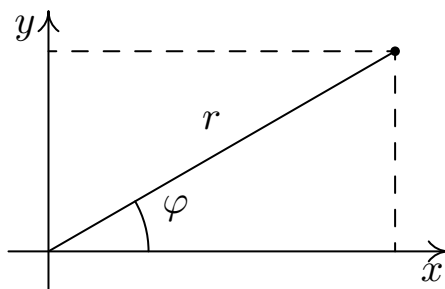
Vztah mezi kartézskými a polárními souřadnicemi:

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\varphi \in [0, 2\pi), r \in [0, \infty)$$



Transformace dvojného integrálu do polárních souřadnic

Nechť f je funkce dvou proměnných spojitá na uzavřené oblasti Ω a necht' Ω^* je množina, pro kterou platí, že každému bodu $(r, \varphi) \in \Omega^*$ je předpisem

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

přiřazen bod $(x, y) \in \Omega$. Pak

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy = \iint_{\Omega^*} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r \, dr d\varphi.$$

Transformace dvojného integrálu do polárních souřadnic

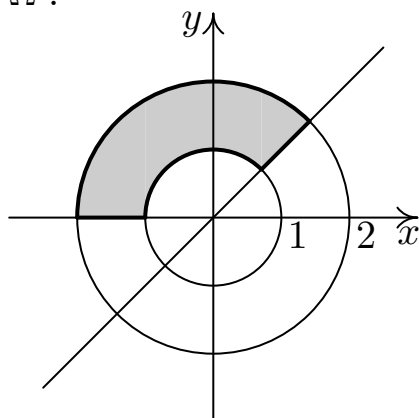
Poznámka

- 1 Transformace dvojného integrálu do polárních souřadnic je speciální případ substituční metody pro dvojný integrál.
 - Transformaci množiny Ω na množinu Ω^* lze chápat jako zobecnění transformace mezi při substituční metodě pro určitý integrál.
 - Transformují se i diferenciály: výraz $dx dy$ je nahrazen výrazem $r dr d\varphi$.
- 2 Transformace do polárních souřadnic je vhodná zejména tehdy, když Ω je kruh, mezikruží nebo kruhová výseč se středem v počátku, neboť v takovém případě bude Ω^* obdélník a tedy transformovaný integrál má konstantní meze.

Příklad (Transformace do polárních souřadnic)

Pomocí transformace do polárních souřadnic vypočtěte $\iint_{\Omega} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$, kde Ω je množina zadaná nerovnostmi: $x^2 + y^2 \leq 4$, $x^2 + y^2 \geq 1$, $y \geq x$, $y \geq 0$.

Ω :



Ω^* :

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi \\y &= r \sin \varphi \\x^2 + y^2 &= r^2\end{aligned} \quad \begin{aligned}\frac{\pi}{4} &\leq \varphi \leq \pi \\1 &\leq r \leq 2\end{aligned}$$

$$\iint_{\Omega} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy = \iint_{\Omega^*} \frac{r \cos \varphi}{\sqrt{r^2}} r dr d\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \left[\int_1^2 \frac{r \cos \varphi}{\sqrt{r^2}} r dr \right] d\varphi$$

Příklad (Transformace do polárních souřadnic - pokračování)

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \left[\int_1^2 \frac{r \cos \varphi}{\sqrt{r^2}} r \, dr \right] d\varphi &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \left[\int_1^2 r \cos \varphi \, dr \right] d\varphi \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \cos \varphi \, d\varphi \cdot \int_1^2 r \, dr = \left[\sin \varphi \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \cdot \left[\frac{r^2}{2} \right]_1^2 \\ &= \left(0 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot \left(2 - \frac{1}{2} \right) = -\frac{3\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

Poznámka (Obecná transformace, Jakobián)

Nechť f je funkce dvou proměnných spojitá na uzavřené oblasti Ω a necht' Ω^* je množina, pro kterou platí, že každému bodu $(u, v) \in \Omega^*$ je předpisem

$$\begin{aligned} x &= g(u, v) \\ y &= h(u, v) \end{aligned}$$

přiřazen bod $(x, y) \in \Omega$. Pak

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy = \iint_{\Omega^*} f(g(u, v), h(u, v)) |J(u, v)| \, du dv,$$

kde

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} g'_u(u, v) & g'_v(u, v) \\ h'_u(u, v) & h'_v(u, v) \end{vmatrix}$$

je tzv. **Jakobián**. (Při transformaci do polárních souřadnic je Jakobián roven r .)

Geometrické aplikace dvojného integrálu

- **Objem přímého válce:**

Nechť $z = f(x, y) \geq 0$ je spojitá na uzavřené oblasti Ω . Pak objem V přímého válce s podstavou Ω v rovině xy shora seříznutého plochou $z = f(x, y)$ je dán vzorcem:

$$V = \iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy.$$

- **Obsah rovinného obrazce:**

Nechť Ω je uzavřená oblast v rovině. Obsah S množiny Ω je číselně roven objemu přímého válce nad touto množinou, jehož výška je rovna jedné. Tedy

$$S = \iint_{\Omega} 1 \, dx dy.$$

Fyzikální aplikace dvojného integrálu

- **Hmotnost rovinné množiny Ω :**

$$M = \iint_{\Omega} \rho(x, y) \, dx dy,$$

kde $\rho(x, y)$ je hustota množiny v bodě (x, y) .

- **Statický moment rovinné množiny Ω :**

- Vzhledem k ose x :

$$M_x = \iint_{\Omega} y \rho(x, y) \, dx dy$$

- Vzhledem k ose y :

$$M_y = \iint_{\Omega} x \rho(x, y) \, dx dy$$

- **Těžiště rovinné množiny Ω :**

$$T = (T_1, T_2), \quad \text{kde} \quad T_1 = \frac{M_y}{M}, \quad T_2 = \frac{M_x}{M}.$$

Využití systémů počítačové algebry

- Využití systémů Sage, Maxima, Wolfram Alpha:

`http://user.mendelu.cz/marik/akademie/`

- Matematické výpočty online (MAW) - dvojnásobný integrál

`http:`

`//um.mendelu.cz/maw-html/index.php?lang=cs&form=integral2`